

בעיית בריכת השחייה



בעקבות המטרות החדשות בהוראת המתמטיקה אני מנסה להביא לתלמידי בעיות לא שגרתיות, המזמנות פיתוח חשיבה מתמטית: מיצוי אפשרויות, הנמקה וכדומה. הקיץ שקפץ עלינו הביא לחיבור בעיית בריכת השחייה שניתנה לתלמידי כיתה ב':

בבריכת השחייה של דן ודינה

חלק א

דינה ודן שוחים יום-יום. דינה שוחה רק לרוחב הבריכה, דן שוחה רק לאורך הבריכה. אורך בריכת השחייה שבה שוחים הילדים הוא 20 מ'. רוחב הבריכה הוא 15 מ'.

יום אחד התווכחו הילדים מי שחה יותר. דן אמר: אני שחיתי 5 פעמים לאורך הבריכה. דינה אמרה: אני שחיתי 6 פעמים לרוחב הבריכה, לכן שחיתי יותר ממך. עזרו לשני הילדים. הסבירו לדינה ודן מי שחה יותר ומדוע.

חלק ב

כמה פעמים צריך כל אחד מהילדים לשחות כדי ששניהם ישחו אותו מרחק בדיוק? מדוע? מצאו כמה אפשרויות. הסבירו את המשותף לכל זוגות המספרים שמצאתם.

שאלות על היווצרות חוקיות מסוימת. מכיוון שאפשר למצוא יותר מחוקיות אחת ומכיוון שחוקיות אחת קשורה לחוקיות אחרת, השאלות והתהיות מובילות להנמקה ולהצדקה של החוקיות שמצאנו. חקירת הבעיה מזמנת טיפול והתייחסות למגוון נושאים מתמטיים: מדידות-הקשר בין גודל יחידת אורך לבין מספר הפעמים שבה היא "נכנסת" בקטע מסוים; סדרות חוקיות בסדרות, כפולות, גורמים; יחס-אפשר למצוא את היחס בין מספר

התהליך שעברה הכיתה בעבודה על בעיה זו ריגש אותי מאוד. למדתי מתלמידי, תוך כדי הבניית הידע, דברים שלא הייתי מודעת להם די. שוב ראיתי שיש לתת לילדים אפשרות לעבוד בדרכים וברמות שונות ולהאמין ביכולתם להתמודד עם משימות מורכבות ומאתגרות.

הבעיה המוצגת בחלק ב' של בעיית הבריכה מאפשרת אינסוף פתרונות, דבר המזמן חקירה. חיפוש וזיהוי החוקיות מובילים לתייה ולשאלות

אחד מהם עבר אחרי "בריכה" אחת, אחרי שתי "בריכות", אחרי שלוש "בריכות" וכו'.

התלמידים בכיתה נוהגים לאסוף נתונים בטבלה, ואכן הם ניגשו מיד לבניית טבלה. להלן דוגמה לטבלה שיצר אחד הילדים:

מספר הבריכה	מרחק ב' (מ')	מרחק א' (מ')	מספר הבריכה
1	15	20	1
2	30	40	2
	45	60	
	60	80	
	75	100	
	90	120	
	105	140	
	120	160	
	135	180	
	150	200	
	165	220	
	180	240	
	195	260	
	210	280	
	225	300	
	240	320	
	255	340	
	260	360	
	275	380	
	290	400	

הערות ידניות: ג' 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240, 255, 260, 275, 290. מספר הבריכה 1, 2.

בזמן רישום הנתונים בטבלה ביקשתי שיבדקו ויקיפו את המרחקים השווים בשני הטורים, ובנוסף את מספר הבריכות ששוחה כל אחד מהילדים כדי להגיע למרחק זה. בשיחת ההבניה שבאה בסיום הפעילות עם הקבוצה הסתכלנו על המספר 60 וראינו שדן שוחה שלוש בריכות כדי להגיע למרחק זה, ואילו דינה שוחה ארבע בריכות. לשאלתי מדוע זה קורה, ראינו כי ההפרש במרחק לאחר "בריכה" אחת הוא 5 מ', לאחר שתי "בריכות" ההפרש במרחק הוא 10 מ', לאחר שלוש "בריכות" ההפרש גדל ל-15 מ', והרי 15 מ' זהו בדיוק רוחב הבריכה שדינה שוחה, זוהי אפוא הבריכה הרביעית שעליה לשחות כדי להשוות מרחקים. מעניין שבכל הקבוצות, ברגע שהגיעו הילדים אל המספר המשותף הראשון; 60 מ', וגילו את החוקיות, הם לא רצו להפסיק והמשיכו לחפש מהו המרחק הבא המשותף. היו ילדים שסירבו

הבריכות שעוברים שני הילדים במרחקים שווים ובהמשך לעבוד על חלקי שלמים; פירוק לגורמים למשל זיהוי מקומות המרחקים השווים; מדוע כדאי להגיע למכנה המשותף הקטן ביותר? ועוד. זוהי בהחלט בעיה שאפשר באמצעותה לטפל במגוון נושאים מתמטיים וברמות מורכבות שונות, החל מכיתות ב'-ג' ועד כיתות ה'-ו'.

*אנו עובדים בבית הספר בגישה של הבניית הוראת המתמטיקה על דרכי החשיבה של ילדים. המורה יושבת בכל פעם עם קבוצה אחת לאורך זמן, בשעה ששאר הקבוצות עוסקות בפעילויות מגוונות אחרות. ארגון הזמן מאפשר לה לעקוב אחרי חשיבת הילדים בתהליך החקר, לתווך, לתעד ולעזור בהבניית הידע של הלומד או של הקבוצה.

בתהליך העבודה בכיתה ב, חשבתי להביא לתלמידי רק את החלק הראשון של הבעיה, שבו צריך למצוא מי משני הילדים שחה מרחק גדול יותר; להתמקד בהבנת הטעות של דינה, שחשבה כי אם מספר הבריכות ששחתה גדול יותר, המרחק שעברה גדול יותר. לחזור ולטפל שוב בנושא מדידות אורך, בקשר בין גודל יחידת אורך לבין מספר הפעמים שהיא "נכנסת" בקטע מסוים.

כשנתתי את הבעיה לקבוצה הראשונה גיליתי שרוב הילדים פתרו את החלק הראשון במהירות ובקלות. התלמידים ידעו להסביר ולנמק את תשובתם וזכרו את מהות הקשר שבין גודל יחידת אורך לבין מספר הפעמים שהיא "נכנסת" בקטע מסוים. לפיכך החלטתי לתת להם גם את החלק השני של הבעיה: למצוא כמה בריכות כל אחד מהם צריך לשחות כדי לעבור בדיוק אותו מרחק. כאן התברר שיש צורך להסביר לחלק מהלומדים כי עליהם למצוא מרחק שווה שאותו ישחו הילדים בבריכות שלמות ולא בחלקי בריכות, היות שהיו ילדים שחשבו כי מספיק להוסיף לדינה 5 מ' כדי ששניהם ישחו אותו מרחק. (בכיתה ה' אולי ניתן להשוות את חלקי הבריכות ולטפל בנושא השברים.) חלק מהילדים הבינו מיד שאם יעלו ב-20 מ' עבור דן וב-15 מ' עבור דינה וימשיכו לעלות, יגיעו למספר שווה, כלומר למרחק שווה. לתלמידים שלא הבינו מיד, הצעתי לבדוק מהו המרחק שכל

*מידע נוסף על גישת ההוראה במאמר: הקניית הוראת המתמטיקה על דרכי חשיבה של ילדים: ד"ר רותי שטיינברג, שרה הוכנר ואילה טל, א', ב', מספר חזק, גליונות 16, 17

גם נמרוד חישב בעל-פה ובדרך זו גילה את החוקיות וארגן אותה בטבלה בדרך שונה:

4	3	קטן	קטן
8	6	בינוני	בינוני
12	9	גדול	גדול
16	12	אדום	אדום
20	15	צהוב	צהוב
24	18	ירוק	ירוק
28	21	סגול	סגול
32	24	אפור	אפור
36	27	לבן	לבן

נמרוד הסביר: "החוקיות היא שצריך כל פעם אצטוף כ-60 מ' כדי ששניהם ישאו אותו מרגק. הטור של מספר הבריכות ששואה זן שואה כ-3, הטור של זינה שואה כ-4, ההפרש (של מספר הבריכות) שואה כל הזמן". נמרוד התייחס לחוקיות נוספת, ששאר הילדים לא התייחסו אליה ישירות, אלא לאחר הדיווח של נמרוד במליאת הכיתה. הוא התייחס לכך שטור מספר הבריכות שזן שוחה עולה כל פעם ב-3, ואילו טור מספר הבריכות של דינה עולה כל פעם ב-4.

בכיתה גבוהה יותר הבניית הידע שאפשר לעשות כאן היא לבדוק את הגורמים של 60, ולהסיק מכך את המסקנות המתבקשות.

יובל, נמרוד, נוי ודני גילו את החוקיות של מספר הבריכות ושל ההפרש ההולך וגדל במספר הבריכות בין שני הילדים. הם אלה שהסבו את תשומת לבי ואת תשומת לב שאר ילדי הכיתה לכך. לא לחינם אמרו חז"ל: "מכל מלמדי השכלתי ומתלמידי יותר מכולם".

אין ספק, כי אמונה עמוקה ביכולתם של הילדים להתמודד עם בעיות קשות, ידיעה טובה של מה מכילה בעיה ומה ניתן להפיק ממנה, הנכונות להקשיב לחשיבה של הילדים וללמוד ממנה, ובנוסף, היכולת לנהל דיאלוג מבנה ידע עם הלומדים - כל אלה הניבו תוצאות יוצאות דופן לתלמידים בכיתה ב': פתרון בעיה מורכבת ומאתגרת, גילוי חוקיות והצדקתה.

להפסיק את הפעילות גם לאחר סיום שיעור המתמטיקה ומהם שהמשיכו את הטבלה עד 360 מ' ויותר. בכל קבוצה ילד או שניים חישוב בעל פה וכך הגיעו מהר יותר לחוקיות.

יובל היה בין הילדים שחישוב בראשם. לאחר דקות אחדות הוא מצא החוקיות ולכן ארגן באופן שונה את הטבלה שלו:

חוקיות	דינה	זינה	בריכות	
			3.1	4.2
אני גיליתי	60	60	4.2	3.1
סקסני ערדן	120	120	8.2	6.1
עזרה ק.3. וקמור	180	180	12.2	9.1
עזרה ק.3. וקמור	240	240	16.2	12.1
	300	300	20.2	15.1
	360	360	24.2	18.1
	420	420	28.2	21.1
	480	480	32.2	24.1
	540	540	36.2	27.1
	600	600	40.2	30.1
	660	660	44.2	33.1
	720	720	48.2	36.1
	780	780	52.2	39.1
	840	840	56.2	42.1
	900	900	60.2	45.1
	960	960	64.2	48.1
	1020	1020	68.2	51.1

יובל הסביר: "אישבתי בראש ואילתי שהמרגק הראשון שבו יפגשו זן ודינה הוא 60 מ' והמרגק השני 120 מ'. כדי אהגיש ל-60 מ' זן שואה: 1, 2, 3 בריכות. דינה שואה 1, 2, 3, 4 בריכות כדי אהגיש ל-60 מ'. אז ברור שכל פעם אק נוסוף 60 מ' הם יפגשו. בפעם הראשונה רואים שדינה שואה בריכה אג ויגר מדין. בפעם השנייה היא שואה שתי בריכות יוגי, אז בפעם השלישית היא שואה שלוש בריכות יוגי ואגו כך ארבע בריכות יוגי."

כאן נגמר השיעור, וביקשתי מיובל לחשוב מדוע דינה צריכה לשחות כל פעם יותר ויותר.