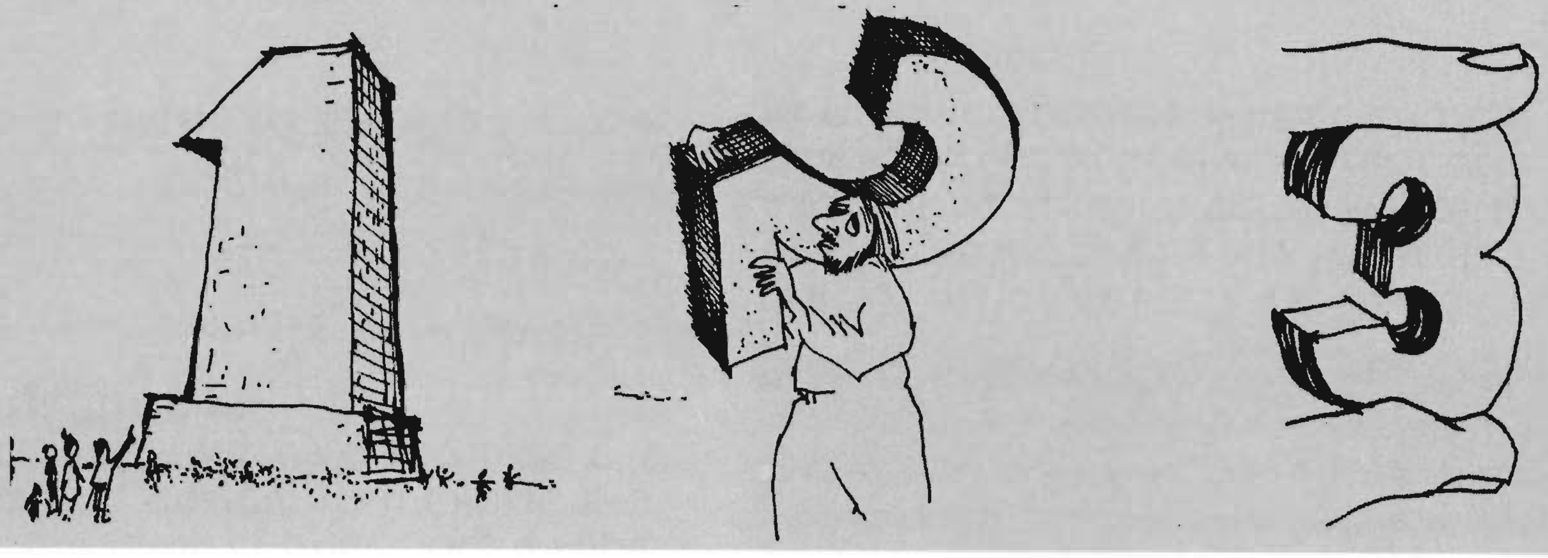

ד"ר ויקטור אוקסמן

סימני התחלקות מורחבים

הערך המעשי של סימני ההתחלקות קטן היום יותר מבעבר, שכן לכל תלמיד יש מחשבון. אף-על פי-כן, על ידי בנייה מתאימה של שיעור, יכול המורה לעניין את התלמידים ולעורר מוטיבציה להפעיל חשיבה ולקבוע במהירות וללא טעויות חלוקה של מספר מסוים במספר אחר ללא שארית.
כפי שמלמדים בבית-הספר סימני ההתחלקות מאפשרים בדרך כלל לקבוע בקלות אם מספר אחד מתחלק בשני. ואולם ניתן לבחון גם את סימני ההתחלקות המורחבים, המאפשרים לקבוע די מהר את השאריות המתקבלות בחלוקת המספרים.
כל אחד מהסימנים הללו מאפשר במקרה הפרטי, שבו השארית היא 0, להסיק אם מתחלק מספר אחד בשני ללא שארית.
נתבונן בסימני ההתחלקות המורחבים במספרים מ-3 עד 15.
יצוין, כי ניתן להוכיח את סימני ההתחלקות האלה בצורה כללית (כמו במאמר זה) רק אם התלמידים שולטים בשפה האלגברית ובפעולות עם נעלמים. אחרת כדאי להסביר אותם בעזרת דוגמאות.

א. התחלקות ב-3 וב-9:

השארית מחלוקת מספר ב-3 (או ב-9) שווה לשארית מחלוקת סכום ספרות המספר ב-3 (ב-9).
נבהיר את הנאמר באמצעות דוגמה של מספר תלת-ספרתי $\overline{abc}$* (ללא הגבלת הכלליות):

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + a + 9b + b + c$$
$$= (99a + 9b) + (a + b + c)$$

המחובר הראשון של הסכום המתקבל מתחלק הן ב-3 והן ב-9, השארית מחלוקת $\overline{abc}$ ב-3 או 9 שווה לשארית המתקבלת מחלוקת הסכום $a + b + c$ בהם.

ב. התחלקות ב-4:

השאלה מצטמצמת לקביעת השארית מחלוקת מספר המורכב מספרת העשרות והאחדות של המספר המקורי ב-4, כלומר: של מספר דו-ספרתי. זאת משום שאם נתון, למשל, מספר בעל ארבע ספרות $\overline{abcd}$, הרי שהוא שווה ל- $100\overline{ab} + \overline{cd}$, אבל $100\overline{ab}$ מתחלק ב-4. לכן השארית המבוקשת שווה לשארית מחלוקת $\overline{cd}$ ב-4.

$$\overline{cd} = 10c + d = 8c + 2c + d \ .$$

$8c$ מתחלק ב-4. לכן מספיק למצוא את השארית מחלוקת המספר $2c + d$ ב-4. את זה ניתן לחשב בקלות בראש, מפני ש- $2c + d$ לא יעלה על 27 (חשבו מדוע).
בדרך זו למציאת השארית של חלוקה ב-4 די לחשב את השארית של חלוקת סכום ספרת

$\overline{abc}$ מבטא מספר שספרת המאות שלו היא a, ספרת העשרות b וספרת היחידות c.
* צרוף אותיות שמעליהן קו מבטא מספר רב ספרתי

האחדות שלו וספרת העשרות הכפולה ב-2 , ב-4.

למשל, שארית החלוקה של המספר 324987 ב-4 שווה לשארית חלוקת המספר 23=8+7 X 2 ב- 4, כלומר – 3.

ג. התחלקות ב-5:

כאן הכול פשוט מאוד. השארית מחלוקה ב-5 שווה לשארית מחלוקת ספרת האחדות ב-5. ואמנם, ניתן לרשום כל מספר בצורה A·10 + b, כאשר b היא ספרת האחדות שלו. ממכיוון ש-A·10 מתחלק ב-5, מקבלים מכאן את הטענה דלעיל.

למשל, המספר 283 נותן אחרי חלוקה ב-5 את השארית 3, ממכיוון ששארית זאת מתקבלת אחרי חלוקת ספרת האחדות שלו, 3, ב-5.

ד. התחלקות ב-6:

סימן ההתחלקות ב-6 מנוסח בדרך כלל בצורה פשוטה: מספר מתחלק ב-6 אך ורק אם הוא מתחלק ב-2 וב-3. אבל כיצד לקבל את הסימן המורחב?

קל למצוא את השאריות של חלוקה ב-2 וב-3. נניח שהם m ו-n בהתאמה. השארית מחלוקת המספר ב-6 שווה ל-x. ואז המספר המקורי שווה ל- 6k+x (k – מספר שלם). ומכיוון ש- 6k מתחלק ב-2 ללא שארית, הרי ש-x צריך להתחלק ב-2 עם שארית m. בצורה דומה x צריך להתחלק ב-3 עם שארית n. ממכיוון ש-x הוא אחד המספרים מ-0 עד 5, הרי שקל למצוא ביניהם לפי השאריות m ו-n את הערך המבוקש של x.

למשל, עבור המספר 8459 נקבל:
m=1 (מספר אי-זוגי).
n=2 (8+4+5+9=26, מתחלק ב-3 עם שארית 2).
לכן מבין המספרים 0,1,2,3,4,5 צריך לבחור מספר אי-זוגי המתחלק ב-3 עם שארית 2. המספר הזה הוא 5, ולכן 8459 מתחלק ב-6 עם שארית 5.

ה. התחלקות ב-7:

זהו מקרה מעניין, שלא מתבוננים בו בדרך כלל בבית-הספר. ראשית נשתמש בעובדה ש- $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$.

נחלק את המספר שלנו למחלקות, החל בצד ימין, שלוש ספרות בכל מחלקה. המחלקה השמאלית ביותר יכולה להיות לא מלאה, כלומר להכיל פחות משלוש ספרות. לדוגמה, נתבונן במספר המורכב משלוש מחלקות כאלה – ABC (המחלקות – A,B,C), ואז המספר הזה יהיה שווה ל-

$$\begin{aligned}1000000A + 1000B + C &= A\cdot(1000)^2 + B\cdot1000 + C\\ &=A\cdot(1001-1)^2 + B\cdot(1001-1) + C\\ &= A\cdot1001^2 - 2A\cdot1001 + A + B\cdot1001 - B + C\\ &=1001\cdot(A\cdot1001 - 2A + B)+(A- B + C).\end{aligned}$$

המחובר הראשון של הסכום הזה מתחלק ב-7. לכן השארית מחלוקת המספר ב-7 שווה לשארית מחלוקת הסכום A – B + C ב-7.
בצורה כללית ניתן להוכיח

כי $(1001-1)^n$ שווה ל-:
$$\begin{cases}1001k + 1, & \text{כאשר } n \text{ – זוגי,}\\ 1001k - 1, & \text{כאשר } n \text{ – אי-זוגי.}\end{cases}$$

לכן במקרה הכללי השארית מחלוקת מספר ב-7 שווה לשארית מחלוקת סכום המחלקות, אשר נלקחות עם סימן + וסימן – לסירוגין, החל מימין.

למשל, למספר 044 648 981 25 יש למצוא את הסכום 44 + 648 – 981 + 25 ולמצוא את השארית של חלוקת סכום זה ב-7.

אבל קשה מאוד לחשב פעולות כאלו בראש. לכן נמצא שיטה לחישוב השארית למספר תלת-ספרתי.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 2a + 7b + 3b + c =7(14a + b) + 2a+ 3b + c$$

לכן מספיק למצוא את השארית מחלוקת המספר 2a + 3b + c , ב-7, וזאת ניתן לחשב בקלות בראש. ייתכן שקל יותר לחשב זאת לפי התבנית 2(a+b) + b + c.

למשל, למספר 698 נקבל:
47 = 8+ 9+ (9 + 6)2 , והשארית אחרי החלוקה ב-7 תהיה 5.

כעת, כל מספר אפשר לחלק למחלקות, לכל מחלקה למצוא את השארית של החלוקה ב-7, ולחבר את השאריות שהתקבלו, עם הכנסת הסימנים + ו- − לסירוגין. לתוצאה שמתקבלת יש למצוא שוב את השארית של חלוקה ב-7. זו תהיה כבר התשובה הסופית.

למשל למספר 25981648044 נקבל:
44 – שארית 2 (בראש)
648 – $2(6+4)+4+8 = 32$, שארית 4
981 – $2(9+8)+8+1 = 43$, שארית 1
25 – שארית 4 (בראש)
והתשובה: $-5 = -4 + 1 - 4 + 2$
$-5 = 7\cdot(-1) + 2$ השארית היא 2.

ו. התחלקות ב-8:

מספיק להתבונן במספר המורכב מספרת המאות, העשרות והאחדות של המספר המקורי. זאת משום שאם במספר יש, למשל, חמש ספרות

הרי $\overline{abcde} = \overline{ab}\cdot 1000 + \overline{cde}$.

מכיוון שהמחובר הראשון של סכום זה מתחלק ב-8 ($125\cdot 8=1000$), הרי שצריך למצוא את השארית של חלוקת המספר cde ב-8 .

$$cde = 100c+10d+e = 96c + 4c + 8d + 2d + e = (96c + 8d) + (4c+2d+e)$$

מכיוון שהמחובר הראשון של סכום זה מתחלק ב-8, $96c+8d = 8(12c+d)$, הרי שיש לחפש את השארית של חלוקת המספר $4c+2d+e$ ב-8. זאת ניתן ללא ספק לחשב בראש, במיוחד כאשר החישוב הוא לפי התבנית $2(2c+d)+e$.

למשל, למציאת השארית של חלוקת המספר 795 ב-8, נחשב: $2(2\cdot 7+9)+5=51$. אחרי חלוקת 51 ב-8 השארית היא 3. לכן 3 הוא גם השארית של חלוקת המספר 795 ב-8.

אפשר לפשט יותר את הסימן הזה. מספר מהצורה n00, כאשר n הוא מספר זוגי, ($n=2k$) מתחלק ב-8

כי $n00 = n\cdot 100 = 4n\cdot 25 = 8k\cdot 25$.

לכן מהמספר התלת-ספרתי הנתון מספיק לחסר את המספר הקטן יותר הקרוב ביותר מהצורה n00 (n – זוגי) ולהפרש המתקבל, אשר לא יעלה על 199, למצוא את השארית מחלוקה ב- 8 בדרך שצוינה לעיל.

כך למספר 795 נקבל:
$795 - 600 = 195$
$2\cdot(2\cdot 1+9)+5 = 27$. השארית היא 3.

ז. התחלקות ב-11:

נשים לב ש-:

$10 + 1$	מתחלק ב- 11
$10^2 - 1$	מתחלק ב- 11
$10^3 + 1$	מתחלק ב- 11
$10^4 - 1$	מתחלק ב- 11

קל להוכיח כי $10^n + 1$ מתחלק ב-11 כאשר n – אי-זוגי, $10^n - 1$ מתחלק ב-11 כאשר n זוגי. לדוגמה נתבונן במספר בעל 5 ספרות $\overline{abcde}$:

$$\overline{abcde} = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e$$
$$=(10^4-1)\,a+a+(10^3+1)\,b-b+(10^2-1)\,c+c+(10+1)\,d-d+e.$$

ממכיוון שהביטויים המודגשים מתחלקים ב-11, השארית הרצויה שווה לשארית מחלוקת הסכום $a-b+c-d+e$ ב-11, כלומר סכום ספרות המספר הלקוחות עם סימני + ו- −לסירוגין, החל מימין.

דוגמה: למספר 91845 נחבר את הסכום $17 = 9 - 1 + 8 - 4 + 5$. השארית מחלוקת 17 ב-11 היא 6. לכן השארית מחלוקת המספר המקורי ב-11 שווה גם כן ל-6.

ח. התחלקות ב-12:

השארית של חלוקה ב-12 היא אחד המספרים בין 0 ל-11.

למציאתה ננהג בדומה למקרה של חלוקה ב-6. מוצאים את השאריות של חלוקה ב-3 וב-4. כעת מוצאים את המספר בין 0 ל-11, אשר נותן אחרי חלוקה ב-3 וב-4 את אותן השאריות, כמו המספר המקורי.

דוגמה: המספר 45678. $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$, השארית מחלוקה ב-3 היא 0. לחישוב השארית מחלוקה ב-4 מוצאים: $22 = 8 + 2\cdot 7$, השארית היא 2. מה שנותר הוא למצוא מבין המספרים מ-0 עד 11 את המספר אשר מתחלק ב-3 ללא שארית, ואילו בחלוקה ב-4 השארית היא 2. לאחרונים שייכים המספרים 10, 6, 2. ביניהם רק 6 מתחלק ב-3 ללא שארית. לכן התשובה הסופית היא 6. בדיקה: $45678 = 3806\cdot 12 + 6$.

ט. התחלקות ב-13:

מכיון ש- 7·11·13 = 1001, יש לנהוג תחילה כמו במקרה של חלוקה ב-7 ולפצל את המספר למחלקות, 3 ספרות בכל מחלקה. אחר כך יש למצוא עבור כל מחלקה את השארית מחלוקה ב-13 ולסכם שאריות אלה עם הכנסת סימני + ו- - לסירוגין החל מימין.
כדי לקבוע את השארית מחלוקת מספר תלת-ספרתי ב-13, נשים לב ש-:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = (104 - 4)a + (13 - 3)b + c$$
$$= 104a + 13b - 4a - 3b + c =$$
$$= 13(8a + b) - 4a - 3b + c$$

כך, השארית המבוקשת בחלוקה ב-13 שווה לשארית מחלוקת המספר

$$-4a - 3b + c = -3(a + b) - a + c$$

דוגמה: המספר 645 981 25.
645
, -31 = 13 (-3) + 8 , -3(6+4) – 6 + 5 = -31
השארית - 8.
981
, -59 = 13· (-5) + 6 , -3(9 + 8) – 9 + 1 = -59
השארית - 6.
25
שארית 12 (בראש).
התשובה הסופית: 14 = 8 + 6 – 12, השארית היא 1.
בדיקה: 1 + 1998588·13 = 25981645

י. התחלקות ב-14:

ננהג כמו במקרה של חלוקה ב-6.
מוצאים את השאריות של חלוקה ב-2 וב-7, ואז מוצאים מבין המספרים מ-0 עד 13 את המספר שנותן את אותן השאריות אחרי חלוקה ב-2 וב-7.

דוגמה: המספר 457 68.
מוצאים את השאריות של חלוקת המספר ב- 7.
457 – 30 = 7 + 5 + (4+5)·2, השארית היא 2.
68 – השארית היא 5 (בראש).

-3 = 7·(-1) + 4 ; -5 + 2 = -3 ; כלומר: השארית אחרי חלוקה של 68457 ב-7 היא 4. מבין המספרים מ-0 עד 13 בוחרים את אלה שאחרי חלוקה ב-7 השארית היא 4. המספרים הם 4 ו-11. המספר 68457 הוא אי-זוגי. לכן התשובה הסופית היא 11.
בדיקה: 11+ 4889·14 = 68457.

יא. התחלקות ב-15:

נוהגים בדומה למקרה הקודם. מוצאים את השאריות מחלוקה ב-3 וב-5 ובוחרים את השארית המתאימה מבין המספרים מ-0 עד 14.

דוגמה: 28947 .
30 = 7 + 4 + 9 + 8 + 2, מתחלק ב-3 ללא שארית.
השארית אחרי חלוקה ב-5 שווה ל-2.
מבין המספרים מ-0 עד 14 אחרי חלוקה ב-5 מותירים שארית 2 המספרים 2, 7, ו-12. ביניהם רק 12 מתחלק ב-3 ללא שארית, כלומר: התשובה היא 12.
בדיקה: 12 + 1929·15 = 28947.

לסיום נציין, כי למעשה סימני ההתחלקות מיושמים בדרך כלל עבור מספרים לא כל-כך גדולים, ולכן הם הרבה יותר פשוטים ממה שיכול להיראות במבט ראשון בתיאוריה.