מלכה שפט

בעיות מילוליות בכפל ובחילוק עם מספרים עשרוניים

אם נציג לתלמידים את הבעיה: כמה ליטר דלק רכשתי אם ליטר דלק עולה 2 ש"ח ואני שילמתי 14 ש"ח? רבים מהם יענו תשובה נכונה ויציינו תרגיל חילוק 14:2= כתרגיל המתאים לפתרון הנכון. כאשר נשנה את המספרים למספרים עשרוניים קטנים מ- 1 תתקבל הבעיה הבאה: כמה ליטר דלק רכשתי אם ליטר דלק עולה 0.85 ש"ח ואני שילמתי 0.75 ש"ח? הפעם תלמידים רבים יאמרו כי הבעיה שונה לגמרי מהבעיה הראשונה, ולכן התרגיל לפתרון הנכון יהיה תרגיל כפל 0.75 X 0.85=.

רבות נכתב על הקושי של התלמידים להתמודד עם בעיות מילוליות בשעה שיש בידם לפתור, בקלות יחסית, תרגילי חשבון דומים (ראה: Schoenfeld 1992). אחד משטחי המשנה של הסוגיה הכללית והרחבה הנוגעת בקשיי התמודדות עם בעיות מילוליות הוא פתרון בעיות מילוליות בכפל וחילוק במקרים שהנתונים המספריים בבעיה הם מספרים עשרוניים.

עד לשנות השמונים התמקדו החוקרים במאפיינים החיצוניים של בעיות הכפל. כגון: מבנה משפט השאלה, מיקום השאלה בבעיה, נוכחות רמזים ומילות מפתח. לאחרונה הוסט המיקוד מההיבטים החיצוניים אל המבנה הטקסטואלי של הבעיה המילולית. הניתוח הטקסטואלי מציג שלושה סוגים שונים של בעיות כפל וחילוק (schwartz 1988 ;nesher 1988; fennema et al 1996).

א. בעיות של מכפלה קרטזית: אלו בעיות שעניינן מציאת שטח, תמורות וכו'. לכל אחד משני הגורמים יש אותו תפקיד. בעיות אלה נקראות גם בעיות סימטריות בכפל על שום הסימטריה בתפקידי הגורמים. לדוגמה: כמה חליפות שונות ניתן להרכיב עם 3 חולצות ו- 4 זוגות מכנסיים?

ב. בעיות המתארות מבנה חיבורי חוזר: בבעיות אלה מתוארת כמות חלקית נתונה החוזרת פעמים מספר, ולכן ניתן לפתרן על ידי חיבור חוזר של הכמות החלקית. בבעיות מסוג זה לכל אחד מהגורמים יש תפקיד שונה. הגורם האחד מתאר את הכמות החלקית והוא נקרא "נכפל". הגורם האחר מתאר כמה פעמים כמות זו חוזרת והוא נקרא "כופל". בעיות אלה נקראות גם בעיות א-סימטריות בכפל, על שום התפקידים השונים של הגורמים. לדוגמה: כמה תפוחים נתנה אמא אם יש לה 3 ילדים וכל ילד קיבל 4 תפוחים?

ג. בעיות השוואה בכפל: לתחום זה שייכות כל הבעיות שמתוארות בהן שתי קבוצות. קבוצה קטנה (גורם) וקבוצה גדולה (מכפלה), וקיימת פונקציית הגדלה (גורם שני) הקושרת אותן. לדוגמה: לדן 3 גולות, ליוסי יש גולות פי 4 יותר. כמה גולות יש ליוסי?

לאור חלוקה זו של הבעיות בדקו חוקרים שונים האם לגודל המספרים שבבעיה יש השפעה על מידת ההצלחה בפתרונה. נמצא כי בעיות סימטריות קשות יותר מבעיות א-סימטריות. ואולם כאשר נחקרו בעיות סימטריות בתחומי מספרים שונים התברר, כי משידע תלמיד לפתור בעיה סימטרית בתחום המספרים הטבעיים הוא פתר אותה גם בתחום המספרים הרציונליים הלא - טבעיים*. (de corte 1988 ; hart, 1981). כלומר, אין הבדלים באחוזי הצלחה בבעיות סימטריות כאשר המספרים הם טבעיים, רציונליים לא טבעיים גדולים מ-1, או מספרים רציונליים הקטנים מ-1. לעומת זאת, בבעיות כפל המתארות חיבור חוזר נמצא קשר בין סוג המספרים שבבעיה למידת ההצלחה. כאשר המספרים בבעיות הם מתחומי המספרים הטבעיים, אחוז התלמידים הפותרים

*כל המספרים במאמר זה הם אי שליליים.

בהצלחה גבוה מאוד. כאשר המספרים הם מספרים עשרוניים לא טבעיים וגדולים מ-1 , רמת ההצלחה יורדת; וכאשר המספרים בבעיות הם מתחום מספרים עשרוניים וקטנים מ-1, אחוז ההצלחה הוא הנמוך ביותר.

משידוע כי לגורמים בבעיות מסוג זה יש תפקידים שונים, נבדקה השפעת המספרים כאשר הם פעם בתפקיד הכופל ופעם בתפקיד הנכפל. נמצא כי רק למספרים המשמשים בתפקיד הכופל ישנה השפעה של גודל המספר על רמת ההצלחה של התלמידים, ואילו למספרים בתפקיד של נכפל לא נמצאה כל השפעה על מידת הצלחה בפתרון הבעיות (זלדיש, 1985; מכמנדורוב, 1989; De Graeber & Tirose1988,Van, Corte, Verchaffel Marino1985 Fischbein, Deri, 1987;Collie, 1988; Nello & Greer). יתר על כן, יש תלמידים שגודל המספרים בבעיה מונע מהם לראות את המבנה התוכני הזהה של הבעיות. גרייר (Greer, 1988) הציג לתלמידים שתי בעיות בעלות אותו תוכן מילולי אך במספרים שונים. כאשר הבעיות ניתנו בנפרד במבחני נייר ועיפרון 93 אחוזים מהתלמידים ענו נכון על הבעיה שבה הכופל היה מספר טבעי, ורק 29 אחוזים ענו נכון על הבעיה שבה הכופל היה מספר עשרוני קטן מ-1. גם כאשר הבעיות ניתנו זו אחרי זו בעת ראיון בעל-פה חזרו התלמידים על אותה שגיאה.

אם דנים בבעיות כפל המתארות מבנה חיבורי חוזר, יש גם לבדוק מה קורה כאשר הבעיה המתוארת היא בעיית חילוק. בבעיות אלה מבחינים בשתי משמעויות.

א.חילוק לחלקים שווים: בבעיות אלה נתונה הכמות הכללית (המכפלה), יודעים לכמה חלקים שווים יש לחלקה (הכופל) ומחפשים את גודל הכמות החלקית (הנכפל). לדוגמה: "אמא קנתה 12 גולות (הכמות הכללית - המכפלה); היא חילקה אותן לארבעת ילדיה (מספר החלקים השווים - הכופל). כמה גולות קיבל כל ילד? (הכמות החלקית - הנכפל)?. בבעיות אלה כאשר נרשם תרגיל החילוק מתקבל:

(הנכפל) המנה = (הכופל) המחלק: (המכפלה) המחולק.

ב.חילוק להכלה: בבעיות אלה ידועה הכמות הכללית (המכפלה), ידועה הכמות החלקית (הנכפל) ומחפשים כמה פעמים אפשר ליצור קבוצה בגודל הכמות החלקית (הכופל). שואלים כמה פעמים מוכלת הכמות החלקית בתוך הכמות הכללית. לדוגמה: "אמא קנתה 12 גולות (הכמות הכללית - המכפלה); היא נתנה לכל ילד 4 גולות (הכמות החלקית - הנכפל); לכמה ילדים תחלק את הגולות? (מספר הפעמים שניתן ליצור את הכמות החלקית - הכופל)? בבעיות אלה כאשר נרשם תרגיל החילוק מתקבל:

(הכופל) המנה = (הנכפל) המחלק: (המכפלה) המחולק.

במחקרים רבים נמצא שגם בתחום זה יורדת רמת ההצלחה של התלמידים כאשר מציגים שאלות דומות, אך בתחומי מספרים שונים.

בבעיות חילוק לחלקים כאשר המספרים היו רציונלים לא - טבעיים התעוררו בעיות במקרים האלה:

1. המחולק קטן מהמחלק (המכפלה קטנה מהכופל);
2. המחלק מספר לא שלם (הכופל אינו מספר טיבעי);
3. המחולק קטן מהמנה (המכפלה קטנה מהנכפל).

בבעיות חילוק להכלה אותרו קשיים אצל התלמידים כאשר המחולק היה קטן מהמחלק (המכפלה קטנה מהנכפל).

פרופ' פישביין הציג תיאוריה פסיכו-דידקטית שבאמצעותה ניסה להסביר מדוע תלמידים מתקשים בפתרון סוגים מסוימים של שאלות מילוליות שפתרונן באמצעות פעולה אריתמטית אלמנטרית (חיבור, חיסור, כפל, חילוק), בעוד שפתרון בעיות דומות לכאורה אינו מקור לקשיים.

על פי תיאוריה זו לכל פעולה אלמנטרית קשור מודל אינטואיטיבי פרימיטיבי, אשר שורשיו נעוצים במכלול התנהגויות ובמצבים מעשיים שהוצגו בעת למידת הנושא. למודלים אילו השפעה הנמשכת זמן רב אחרי שהפעולה קיבלה סטאטוס פורמלי. הילד, ולפעמים המבוגר, ממשיכים להשתמש, לעתים באופן לא מודע, במודלים האינטואיטיביים הפרימיטיביים בעת פתרון בעיות מילוליות. כאשר הלומד עומד בפני בעיה מילולית שבה הוא נדרש לזהות את הפעולה הנחוצה לשם פתרון הבעיה, במקרים רבים הוא בוחר בפעולה משיקולים הנובעים ממודלים אלה. שיקולים אלה לא תמיד מוליכים לפתרון נכון של הבעיה.

המודל האינטואיטבי של הכפל בנוי על הכפל כחיבור חוזר. למודל זה שתי דרישות:

1. **על הכופל להיות מספר שלם** – הכופל מציין כמה פעמים מבצעים את החיבור החוזר (כמה פעמים הכמות החלקית מופיעה), ולכן הוא חייב להיות מספר טבעי.

2. **המכפלה (הכמות הכוללת) גדולה מהנכפל (הכמות החלקית)** – אם לקחנו כמות חלקית מספר פעמים הרי שסך הכול קיבלנו יותר.

כאשר תלמיד ניצב בפני בעיה מילוליות שבה הכופל הוא מספר טבעי הרי ששתי הדרישות הללו מתקיימות והתערבות המודל האינטואיטיבי הפרימיטיבי תביא לבחירת הפעולה הנכונה. כאשר הכופל הוא מספר עשרוני גדול מ-1 נפגמת הדרישה הראשונה, אבל נשמרת הדרישה השנייה. במקרה זה התערבות המודל האינטואיבי הפרימיטיבי תוביל לבחירת פעולה ההולמת את המודל אבל ייתכן שהבחירה תהא שגויה. בבעיה שבה הכופל הוא מספר עשרוני קטן מ-1 שתי הדרישות נפגמות והתערבות המודל האינטואיטיבי הפרימיטיבי אינה עוזרת. לתלמיד אין כל אינטואיציה בדבר הפעולה הנכונה שיש לבחור.
לעומת זאת בנכפל מכל סוג הדרישות מתמלאות, התערבות המודל תוביל לבחירת הפעולה הנכונה.

בפעולת החילוק קיימים שני מודלים אינטואיטיביים פרימיטיביים. המודל האחד קשור לפעולת החילוק לחלקים, והמודל השני לפעולת החילוק להכלה.

על-פי המודל לחילוק לחלקים חייבים להתקיים התנאים האלה:

1. המחולק יהיה גדול מהמחלק; הכמות הכוללת חייבת להיות שווה או גדולה ממספר הקבוצות שיש לחלק.
2. המחלק יהיה מספר טבעי; מספר הקבוצות שיש
לחלק בהן את הכמות הכוללת חייב להיות מספר שלם.
3. המחולק חייב להיות גדול מהמנה (או המנה קטנה מהמחולק); הכמות החלקית שתתקבל כתוצאה של פעולת החילוק תהיה קטנה מהכמות הכוללת ההתחלתית.

על-פי מודל החילוק להכלה חייב להתקיים התנאי הבא:
המחולק חייב להיות גדול מהמחלק.

למודלים האינטואיטיביים הפרימיטיביים יש כל התכונות שיש להכרה אינטואיבית, (Fischbein 1987) והן:

1. **מובנות מאליה** – כל קוגניציה אינטואיטיבית יוצרת תחושה של נכונות בהכרח, שאין צורך להצדיקה באמצעות הוכחות.

2. **ביטחון בנכונות** – לקוגניציה הקוגנטיבית מתלווה תחושה של ביטחון.

3. **התמדה** – לאינטואיציה , מרגע שנוצרה, חסינות רבה היכולה לעמוד גם כנגד למידה פורמלית.

4. **כפייתיות** – האינטואיציה כופה את עצמה על הפרט כאבסולוטית וכבעלת אינטרפרטציה יחידה, וכל החלופות האחרות נראות לפרט בלתי מתאימות.

5. **סטטוס של תיאוריה** – האינטואיציה אינה נתפסת כמיומנות או כפירוש נתונים. בעיני הלומד היא תיאוריה שיש ייצוג נבחר והוא המודל המסוים.

6. **חיוץ** – על סמך חלק מהנתונים הפרט משער את שאר הנתונים. המבדיל בין ניחוש לאינטואיציה הוא תחושת הבטחון באמיתות התשובה.

7. **כוללניות** – האינטואיציה מציעה נקודת מבט כוללנית למצב נתון. ההעברה ממצב למצב אינה נעשית באמצעות תהליכי חשיבה אלא בתפיסה אינטואיטיבית. הארגון השלם שהאינטואיציה יוצרת מסביר את ההתנגדות הרבה לשינוי ואת חסינות האינטואיציה בפני למידה פורמלית המנוגדת לתפיסה האינטואיבית.

8. **אי מודעות** – החשיבה האינטואיטיבית אינה תהליך ברור וגלוי ללומד, ובמקרים רבים הוא אינו מודע לה ואינו מסוגל להסביר מדוע הגיע לתוצאה שהאינטואיציה הורתה לו.

מתוך המודלים האינטואיביים של הכפל והחילוק שתוארו לעיל צומחות אמונות התלמיד:

1. הכופל חייב להיות מספר טבעי.
2. המכפלה גדולה תמיד מהגורמים (הכפל מגדיל).
3. המחולק חייב להיות גדול מהמחלק.
4. המחלק חייב להיות מספר טבעי.
5. המנה חייבת להיות קטנה מהמחולק (החילוק מקטין).

יש להדגיש, כי המודלים והאמונות הצומחים מהם מתאימים לתחום המספרים הטבעיים, ובעת הלמידה הראשונית של הכפל והחילוק הם מסייעים לבניית המושגים של הכפל והחילוק והסכמות המתאימות. ואולם בתחום המספרים הרציונליים המודלים אינם מתאימים ועלולים להוביל את הלומד לפתרונות שגויים.
התמונה לא תהיה שלמה אם לא נוסיף ונתאר התנהגויות של תלמידים בעת שהם פותרים בעיות מילוליות של כפל וחילוק במספרים שאינם טבעיים.

א. אומדן: חוקרים רבים מצאו שתלמידים יכלו לאמוד את התשובה הנכונה בדרכים א-פורמליות. אולם, כאשר הם נתבקשו לבחור בפעולה מתאימה, בחרו בכפל כאשר האומדן היה גדול יותר ובחילוק כאשר האומדן היה נמוך יותר, שהרי "ידוע" שהכפל מגדיל והחילוק מקטין.

ב. אי שמירת הפעולה: במחקרים אותרה התופעה הבאה: תלמידים נדרשו לבחור בפעולה המתאימה לבעיה מילולית שאת המספרים שבה כיסו בדגלים. רוב התלמידים בחרו בפעולה הנכונה. ואולם כאשר גילו את המספרים היו תלמידים שטענו כי השאלה עתה שונה לגמרי, ועקב כך שינו את הפעולה שבחרו. דבר דומה קרה בעת שהוצגו לתלמידים בעיות עם מספרים טבעיים והם נדרשו לבחור בפעולה המתאימה. כאשר באותה הבעיה שינו את המספרים ובמקומם הציבו מספרים רציונליים קטנים מ- 1, התאימו לה התלמידים תרגיל אחר. תופעה זו מכונה בפי גרייר (Greer, 1988) **"אי - שימור הפעולה".**
במשימה של אי - שימור בנושא כלשהו משתמשים בדרך כלל בשלבים הבאים:
שלב 1 – מוצג מצב מסוים -‹ התלמיד מתבקש להביע דעה.
שלב 2 – נעשה שינוי חיצוני במצב המוצג, שינוי שאינו משנה את מהות המצב שהוצג בשלב 1 -‹ התלמיד שוב מתבקש להביע דעה.
הדעה המובעת בשלב 2 אמורה להיות זהה לזו שבשלב 1. במקרה של אי - שימור, התלמיד הוסט על - ידי השינוי החיצוני ומשייכו למהות. במקרה שלפנינו התלמידים הוסטו על - ידי השינוי החיצוני של גילוי (או החלפת) המספרים ובחרו בפעולה אחרת - תלמידים אלה אינם משמרים את הפעולה.

ג. הכללת יתר של טכניקות ואלגוריתם: במהלך ראיונות היו תלמידים שאחזו באופן גלוי באמונה: "המחלק חייב להיות מספר טבעי", התברר שהם נימקו אמונה זו על סמך האלגוריתם של חילוק מספרים עשרוניים.
בתרגילי חילוק אלה נהוג להרחיב את המחלק ואת המחולק עד שהמחלק יהיה מספר טבעי. ההוראה: "הרחב עד שהמחלק יהיה מספר טבעי" מתפרשת בעיניהם כזהה לקביעה שלא ניתן לחלק בשבר.

ד. שפה: המילה "כפל" וכל המילים הנגזרות ממנה משמשות בשפה במשמעות של הגדלה, למשל: "הכפיל את הרווח", או השופט הכפיל את עונש המאסר", ואילו שבמתמטיקה משתמשים במילה "כפל" גם כדי לתאר הקטנה, למשל: "כפול ב- 1/5". כך גם המילה "פעמים"- השימוש בה מחזק את מודל החיבור החוזר בכפל.

נוכל לסכם את אמור בטבלה ולהוסיף הצעות איך לנצל את הידע בעת הוראת הנושא בכיתה.

הנושא	הסבר	השימוש המומלץ
1. אומדן	התלמיד יכול לאמוד את גודל התוצאה הנדרשת בבעיה.	יש לנצל יכולת זו ולשפרה. לחזק את ביטחון התלמיד בנכונות האומדן. לאמן את התלמיד לבדוק אם תוצאת הפעולה שבחר מתיישבת עם האומדן שהציע.
2. מודלים אינטואיטיביים פרימיטיביים	כאשר חלק מהדרישות שהמודלים מציבים אינו מתקיים, התלמיד אינו יודע באיזו פעולה לבחור, או מכוון לבחור בפעולה שגויה.	להעלות למודעות התלמיד שהמודלים של כפל כחיבור חוזר ומודל החילוק לחלקים ומודל חילוק להכלה אינם מתאימים למספרים הרציונליים שאינם טבעיים. לפתח בקר לאינטואיציה.
3. אמונות שגויות	האמונות הגלויות הצומחות מתוך המודלים האינטואיטיביים הפרימיטיביים מובילות את התלמיד לבחור פעולה שגויה.	להעלות למודעות התלמיד את מגבלות האמונות תוך כדי העבודה בבעיות מילוליות ועימות האמונות בתחומי המספרים הנתונים.
4. אי שימור הפעולה	התלמידים אינם רואים את המבנה הלוגי הזהה של שתי בעיות הנבדלות אך ורק בתחומי המספרים. בעיני תלמידים החלפת מספרים "קלים" במספרים "קשים" משנה את מהות הבעיה.	א. להימנע מהחלפת המספרים ה"קשים" במספרים "קלים" כדי לרמוז לתלמיד על הפעולה הנדרשת. ב. לאמן את התלמידים לראות את המבנה הלוגי הזהה של בעיות השונות אך ורק במספרים המופיעים בהן, וכך להבין שאותה הפעולה מתאימה לכל הבעיות.
5. הכללת יתר של טכניקות ואלגוריתם	דרכי חישוב של פעולות במספרים עשרוניים או רציונליים עלולות לחזק תפיסות שגויות לגבי פעולות אלה.	שימוש במחשבון בעת פתרון בעיות מילוליות ינטרל את הצורך בשימוש באלגוריתמים. התלמיד יתמקד בבחירת הפעולה, ולביצועה ייעזר במחשבון.
6. שפה	המשמעות היום - יומית של מילים מסוימות יכולה להתפרש במקום המשמעות המתמטית שלהן.	לעורר את מודעות התלמיד למשמעויות השונות של המילים, והדגשת המשמעות המתמטית שלהן.

בעת לימוד הנושא, משהוצגה הבעיה המילולית רצוי לבקש מהתלמידים לשער אומדן לתוצאה, ורק אז לבחור בפעולה מתאימה לפתרון הבעיה ולחשב התוצאה. כדאי להתמקד באותן בעיות בהן התעוררו סתירות בין האומדן ותוצאת התרגיל. מקרים אלה בהם התלמיד מתלבט מה נכון? האומדן ששער או התוצאה שחישב, הם הזדמנות לעריכת דיונים. הדיונים יאפשרו מחד,לתלמיד לבטא את התלבטויות, האמונות והשיקולים השונים שהנחו אותו ומאידך, למורה להציג את מגבלות האמונות הגלויות והמודלים האינטואיטיביים, לחזק הבטחון באומדן ולהדגיש משמעותן המתמטית של מילים הקשורות לכפל ולחילוק. כל זה עשוי להוביל את התלמיד לבדוק ולבחון נטיתו המיידית לבחור בפעולה מסוימת ובכך לפתח בקרה על האינטואיציה.

לגבי השאלה אם לערוך הדיונים במליאה, בקבוצות הטרוגניות או בקבוצות הומוגניות, על כל מורה לענות לפי הבנתו, ארגון כיתתו ותפיסת עולמו. אולם הידע כי עליו לערוך דיונים אלה, ולאן להובילם הם הנקודות החשובות.

רשימת ביבליוגרפיה:

זלדיש – אבישר, ת' (1985). **השפעת מודלים אינטואיטיביים על בחירת פעולות אלמנטריות לפתרון בעיות מילוליות.** עבודת גמר לקראת תואר מוסמך. אוניברסיטת תל-אביב.

מכמנדורוב, א' (1989). **שימוש בטבלאות בפתרון של בעיות כפל ובעיות חילוק.** דו"ח מספר 1 שהוגש ל"מרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה שליט" – פרוייקט המתמטיקה לביה"ס היסודי. אוניברסיטת חיפה.

De Corte, E., Verchaffel, I. & Van Collie, V. (1988). The Repeated Addition Model Of Multiplication Word Problems. ***The Journal of Mathematical Behavior, 7,*** 197-218.

Fischbein, E. (1987). ***Intuition in Schience and Mathematics: An Educational Approach.*** **Dordrecht**, Holland: Reidel Pub.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L. Jacobs, V. R. & S. B. Empson (1996). A Longitudinal Study of Learning to Use Children's Thinking in Mathematics Instruction. ***Journal for Research in Mathematics Education, 27*** 403-434.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division**.** ***Journal of Research in Mathematics Education 16***, 3-17.

Graeber, A. & D. Tirosh. (1988). Multiplication and Division Involving Decimals; Preserve Elementary Teachers' Performance and Beliefs. ***Journal of Mathematical Behaviour, 7,*** 263-280.

Greer, B. (1988). Non-Conservation of Multiplication and Division: Analysis of a Symptom. ***Journal of Mathematical Behaviour, 7,*** *281-299.*

Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approches and Empirical Findings. In M. Behr, J. Hiebert (Eds.), ***Number Concepts and Operations in Middle Grades*** *Vol. 2* (pp.19-40). The Natinal Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, H. A. (1992). Learning to Think Mathematically: Poblem Solving, Metacognition, and Sense Making in ***Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning***. NY: Macmillan Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.) Publishing Company.

Schwartz, J. (1988). Lntensive Quantity and Transforming Aritmetic Operations. In M. Behr, J. Hiebert (Eds.), ***Number Concepts and Operations in Middle Grades*** *Vol. 2* (pp. 41-52). The Natinal Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.