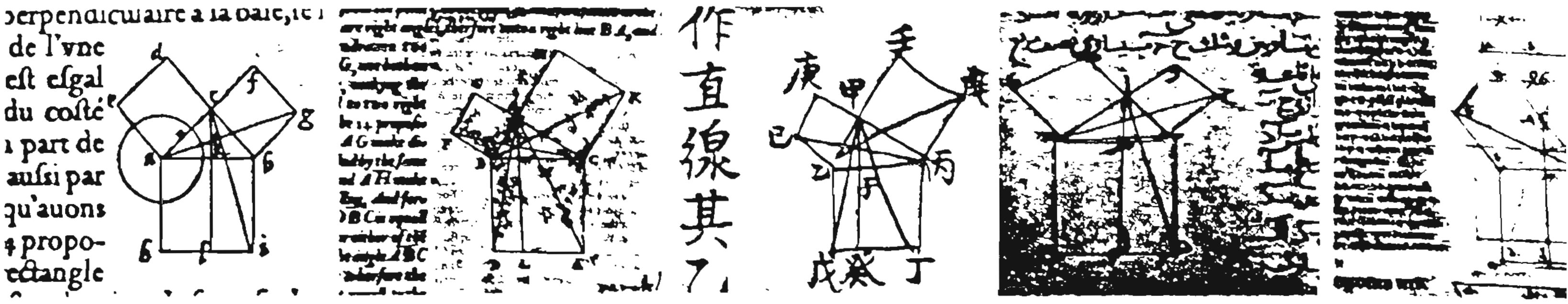

רבותי ההיסטוריה...

תולדות המתמטיקה.

מפלאי המספרים הראשוניים

ד"ר אלי מאור

חלק ב'

במאמר הקודם אמרנו, שעד כה לא ידועה כל נוסחה שתיתן את כל המספרים הראשוניים. אבל ישנו תהליך המאפשר למצוא אותם אחד אחד, ואפילו לפי סדרם. תהליך זה ידוע בשם הנפה של ארתוסטנס, על שם המלומד היוני הידוע שחי במאה השלישית לפנה"ס. (זהו אותו ארתוסטנס אשר חישב לראשונה את היקף כדור הארץ, הישג מרשים באותם הימים).

אם ברצוננו למצוא את כל המספרים הראשוניים עד מספר נתון, נניח **100**, נרשום את כל המספרים הטבעיים מ־**2** עד **100** (כזכור **1** איננו נחשב לראשוני). עתה נמחק מן הרשימה את כל הכפולות של **2**, שכן כפולות אלה הן כל המספרים הזוגיים (פרט ל־**2** עצמו), שאינם כמובן ראשוניים, שכן הם מתחלקים ב־**2**. אחר־כך נמחק מן הרשימה את כל הכפולות של **3**, את כל הכפולות של **5**, של **7**. (כמובן, אחדות מן הכפולות כבר נמחקו קודם, למשל **6**, שהוא כפולה של **2** וגם של **3**. אגב, מדוע אין צורך למחוק את הכפולות של **4,6,8,9**, וכו'?) המספרים שישרדו הם המספרים הראשוניים. אם לא טעינו בדרך, נמצא כי ישנם **25** מספרים ראשוניים קטנים מ־**100**: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.**

באופן עקרוני ניתן למצוא בעזרת הנפה של ארתוסטנס את כל המספרים הראשוניים עד למספר נתון N. **אבל באופן מעשי, הזמן הדרוש ליישום התהליך הולך וגדל ככל ש־N גדל, ולכן השיטה אינה מעשית עבור מספרים גדולים. מאותה סיבה השיטה איננה יכולה לענות על השאלה, האם מספר נתון** הוא ראשוני או פריק.

כמובן ישנם סימני התחלקות שונים המאפשרים לקבוע שמספר נתון **איננו** ראשוני, כגון אם הוא זוגי, או אם סכום ספרותיו מתחלק ב־**3** (שכן אז המספר עצמו מתחלק ב־**3**); אבל מכאן ועד המסקנה שהמספר הוא ראשוני רחוקה הדרך. כדי להחליט על מספר N אם הוא ראשוני, עלינו לבדוק אם הוא מתחלק לכל המספרים הקטנים מהשורש שלו. (מדוע אין צורך להמשיך לבדוק?)

אנו רואים אם כן שהמשימה של גילוי מספרים ראשוניים איננה קלה כלל ועיקר. בימינו המחשב מקל בהרבה על משימה זו, ובעזרתו מתגלים מדי שנה מספרים ראשוניים חדשים. המספר הראשוני הגדול ביותר שהיה ידוע בשנת 1986 היה בן **65,050** ספרות. **(למי שמתעניין, המספר הוא שתיים מוכפל בעצמו 216,091 פעמים פחות אחד).**

נציין לבסוף שתי שאלות ידועות הקשורות למספרים הראשוניים, שתיהן ללא תשובה עד היום. המתימטיקאי גולדבך בשנת 1742 שם לב לעובדה שכל מספר זוגי גדול מ־**2** ניתן לכתיבה כסכום של שני מספרים ראשוניים. לדוגמה: **3+3=6, 2+2=4, 5+3=8, 7+3=10** (וגם **5+5**), **7+5=12, 11+3=14** (וגם **7+7**), וכו'. גולדבך לא הצליח להוכיח כי תכונה זו קיימת תמיד, כלומר לכל מספר זוגי. הוא הפנה את הבעיה לידידו המלומד השוויצרי אוילר, שהיה גדול המתימטיקאים של המאה ה־18. לא ידוע לנו מה עשה אוילר בבעיה, אנו רק יודעים שהבעיה עדיין פתוחה: איש עדיין לא מצא מספר זוגי שאיננו ניתן לכתיבה כסכום שני מספרים ראשוניים, אבל זו כמובן איננה הוכחה שהדבר נכון **לכל מספר זוגי**.

קל להפעיל את הכיתה סביב השערת גולדבך. אפשרות אחת היא לחלק את הכתה לשתי קבוצות: האחת מכריזה על מספר זוגי כלשהו מתחת ל־**100**, והקבוצה השנייה צריכה למצוא שני מספרים ראשוניים שסכומם שווה למספר הנתון. אפשרות אחרת היא לתת לתלמידים למנות את כל המספרים הזוגיים עד **100**, שניתן לכתוב אותם כסכום שני מספרים ראשונים **ביותר מאופן אחד** למשל **7+7=11+3=14**. כמובן, ככל שהמספר שייבחר גדול יותר, כן יהיה גדול יותר האתגר של מציאת המספרים הראשוניים הדרושים.

את השערת גולדבך ניתן לגלות עם הילדים ע"י הצגת הבעיה הבאה: נסו לכתוב כל מספר עד **30** כסכום שני מספרים ראשוניים:

א. האם תמיד אפשרי הדבר?

ב. נסו למיין את המספרים לכאלו שהצלחתם לתארם כסכום ראשוניים וכאלו שלא. האם תוכלו לאפיין כל קבוצה?

ג. למספרים שהצלחתם לבנות סכום **2** ראשוניים — האם קיימות מספר דרכים או ההצגה היא יחידה?

ד. מה לדעתכם ישתנה אם נחליף את פעולת הסכום בכפל?

לאחר החקירה הנ"ל אפשר לספר לילדים על קיומה של השערת גולדבך ועל היותה עדיין בעיה פתוחה (ללא הוכחה), דבר שהוא לא רגיל בהתייחסותנו הרגילה לעולם המתימטי, שבו הכל **מוכח**.

השאלה השנייה נוגעת לזוגות של מספרים ראשוניים מן הצורה **p,p+2**. זוגות כאלה הם די נפוצים, למשל **5** ו־**7**, **11** ו־**13**, **17** ו־**19**, **29** ו־**31**. מוצאים אותם גם בקרב מספרים ראשוניים גדולים יחסית, למשל **29,879** ו־**29,881**. לא ברור לגמרי מדוע יש למספרים ראשוניים נטייה להסתדר בזוגות כאלה, וכן לא ידוע האם מספרם של זוגות אלה הוא סופי או אינסופי. קיימות סיבות טובות להאמין שמספרם הוא אינסופי — כמו המספרים הראשוניים בכלל — אבל השערה זו טרם הוכחה. בשנת 1982 הכריזה חברת מחשבים אמריקאית על פרס בסך **$25,000** לראשון שיוכיח השערה זו. הפרס עדיין מחכה לזוכה...

לסיכום, המספרים הראשוניים, על תכונותיהם המעניינות והמסתוריות, מהווים נושא עשיר, אשר בעזרתו ניתן לגוון כל שיעור במתימטיקה, תהי רמתו אשר תהיה. הנושא עשוי לגרות את סקרנותו של כל תלמיד ואולי אף למשוך אל עולם המתימטיקה תלמידים, אשר קודם לכן פחדו ממקצוע "יבש" זה.

ועוד שאלה למחשבה בקשר למספרים הראשוניים

ד"ר יהודה רודיטי

לפניך ריבוע של **2×2** משבצות. עליך לשבץ את המספרים **1,2,3,4**, כך שסכום האיברים בשורות ובעמודות (לא באלכסון) יהיה מספר ראשוני.

דוגמא לפתרון אפשרי

1	2	3
4	3	7
5	5	

עתה ניקח ריבוע של **3×3** עליך לשבץ את המספרים **1,2,3,....9** (כל מספר פעם אחת בלבד), כך

שסכום כל **שניים** סמוכים יהיה מספר ראשוני. (הערה: שתי משבצות **סמוכות** פירושו שיש לְהן צלע משותפת).

האם הדבר אפשרי? אם כן, הראה כיצד, אם לא — הסבר מדוע לא.

שלח אלינו את תשובתך.
הפתרון יופיע בגיליון הבא.