רגע... חושבים

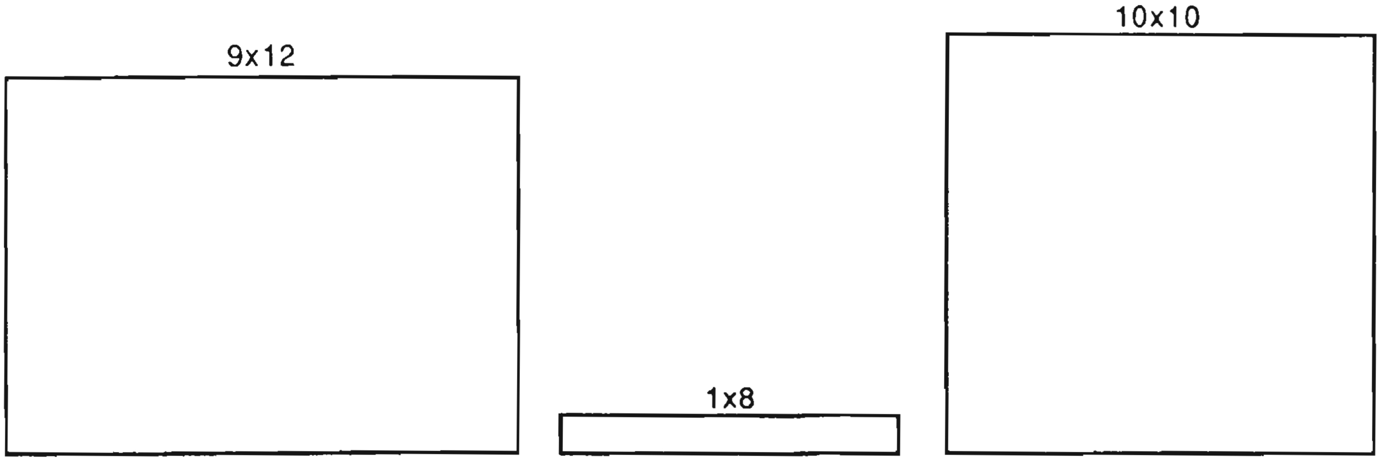
פיתוח חשיבה

חידות (מתימטיות) ומתימטיקה (המשך)

ד"ר בנו ארבל

מאמר זה הנו המשך של המאמר חידות (מתימטיות) ומתימטיקה שהופיע ב "מספר חזק" 2

החידה אותה נציג להלן תספק לנו הזדמנות להציג רעיון יסודי בפתרון בעיות "רעיון בדיקת מקרים פרטיים". מדובר בבדיקת מקרים פרטיים ייצוגיים דיים כדי להקיש מפתרונם לגבי פתרון הבעיה הכללית. פתרון החידה נראה ארוך, אך הוא קל להבנה. הנה החידה:
מריבוע 10x10 ומרצועה 1x8 יש להרכיב מלבן 9x12 באמצעות חלוקת הריבוע ל-2 חלקים והרכבתם מחדש יחד עם הרצועה.



כדי לגשת למקרים פרטיים מייצגים, עלינו למצוא את חוק המעבר מהמקרה הנתון למקרים הפרטיים.

מהריבוע 10x10 ורצועה 1x8=1x(10-2) רוצים לבנות מלבן שמידותיו (10-1)x(10+2) . על

כן, אם הריבוע הנו 2x2 אז הרצועה צריכה להיות 1x0=1x(2-2) ולקבל מלבן שמידותיו 1x4=(2-1)x(2+2).

אם הריבוע הנו 3x3 אז הרצועה צריכה להיות 1x1=1x(3-2) ולקבל מלבן שמידותיו 2x5=(3-1)x(3+2).

ניצור טבלה על פי המתכון הזה:

מידות הריבוע	מידות הרצועה	מידות המלבן
2x2	1x0	1x4
3x3	1x1	2x5
4x4	1x(4-2)=1x2	(4-1)x(4+2)=3x6
5x5	1x(5-2)=1x3	(5-1)x(5+2)=4x7
6x6	1x(6-2)=1x4	(6-1)x(6+2)=5x8
7x7	1x(7-2)=1x5	(7-1)x(7+2)=6x9
8x8	1x(8-2)=1x6	(8-1)x(8+2)=7x10
9x9	1x(9-2)=1x7	(9-1)x(9+2)=8x11
10x10	1x(10-2)=1x8	(10-1)x(10+2)=9x12

לאלה המעוניינים בכתיבה האלגברית: הרי מריבוע שמידותיו mxm ורצועה שמידותיה 1x(m-2) יש ליצור מלבן שמידותיו (m-1)x(m+2).

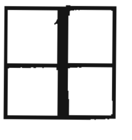
נשים לב לכך כי, כמובן, מתקיים השוויון:

$$\underbrace{(m-1)x(m+2)}_{\text{מלבן}}=m^2+m-2=\underbrace{mxm}_{\text{ריבוע}}+\underbrace{1x(m-2)}_{\text{רצועה}}$$

הרעיון של בדיקת מקרים פרטיים הוא יעיל, כאשר תוך מספר קטן יחסית של צעדים יכולים להגיע למקרה מייצג. נתחיל את הבדיקות על פי הסדר:

א.

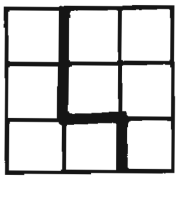
2x2



1x4

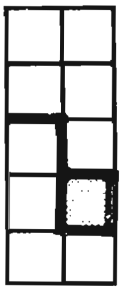
ב.

3x3



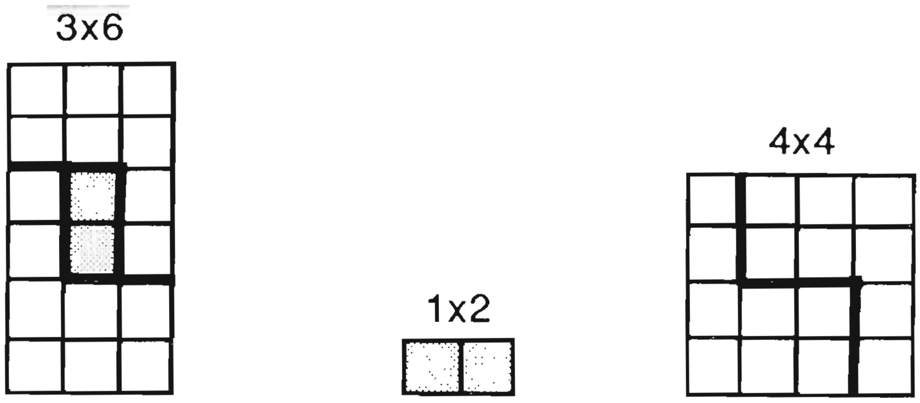
1x1

2x5



נשים לב לכך, כי חייבים ליצור (בתוך הריבוע 3x3) מדרגה בגובה 2, כדי להגיע למלבן 2x5.

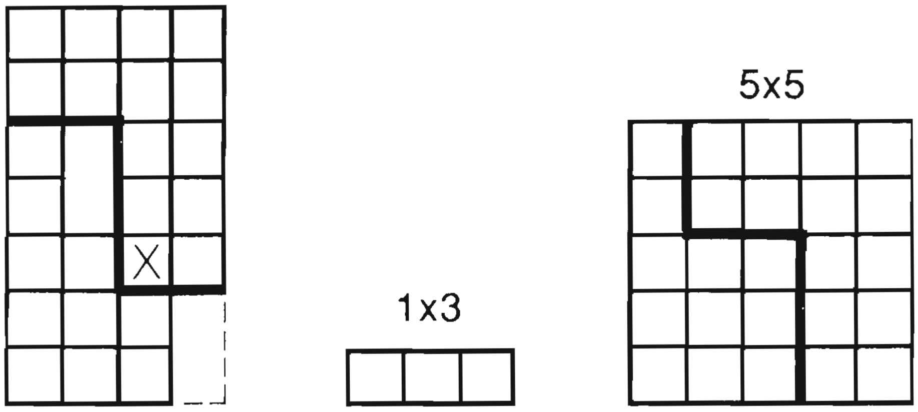
ג.



אם נמשיך את חתכי הריבוע באופן דומה, נקבל:

ד.

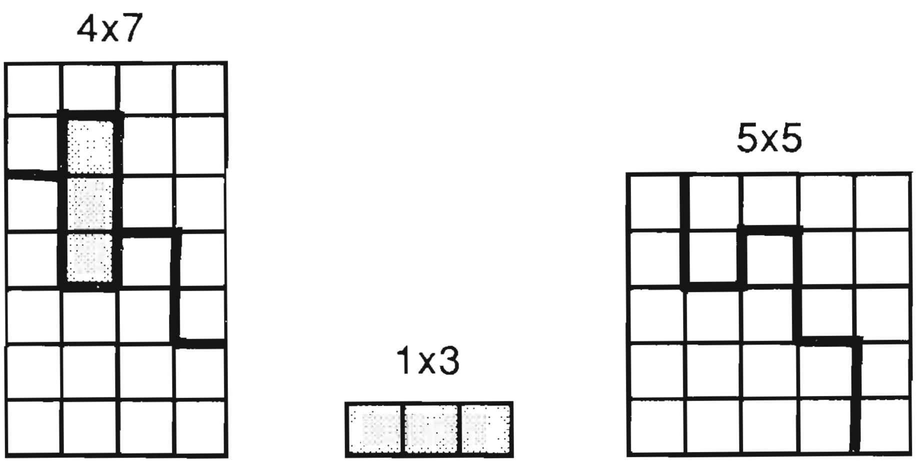
T_1



מתברר, כי אחת המשבצות "כפולה", ועל כן נותרו 4 משבצות ריקות, אותן אי אפשר לכסות באמצעות הרצועה 1x3. הגענו למקרה בו צריכים לשנות את החתך.

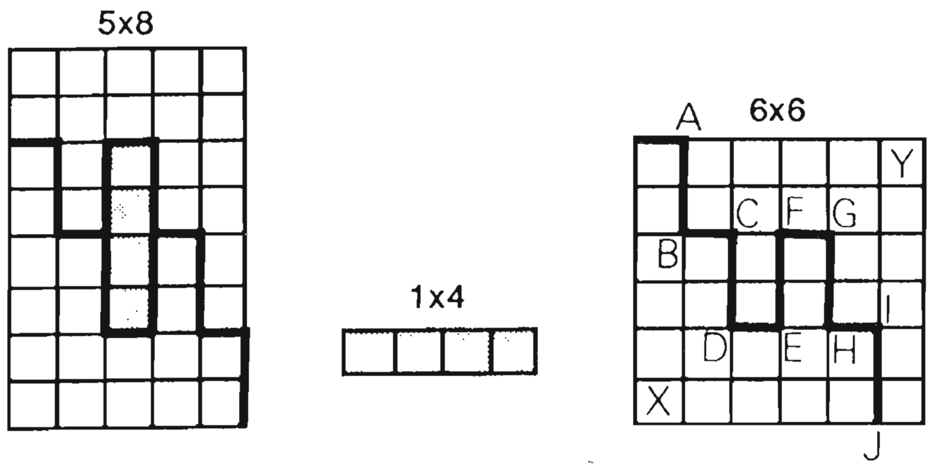
נשים לב גם לכך, כי בעקבות החתך T_1 (הלא מוצלח) נותר ריק מלבן 1x2 ואילו לרשותנו עומדת רצועה 1x3. כדי לתקן את המעוות, נלמד מהשגיאה ונבצע את החתך T_2.

T_2



האם מצאנו כבר את התבנית שלפיה נוכל לבצע את החתך "המוצלח"?
ננסה מקרה נוסף.

ה.



נשים לב לזאת, כי במקרה של ריבוע 6x6, היינו חייבים להמשיך בירידה גם לאחר שהגענו ל-C, כיוון שהרצועה שעומדת לרשותנו היא 1x4, וכדי להכין מקום מתאים, אילו עלינו ב-C, היינו מגיעים לקצה הריבוע: הירידה CD הכינה את מקום לרצועה.

הגיע הזמן לנתח את הפתרון.

א. החתך ABC בגודל 2 (משבצות) הכרחי כדי להגיע לגובה הרצוי (8=6+2). החתך CDEF (בגודל 2) הכרחי כדי למלא את המקום המפונה על ידי ABC. כעת FGH (בגודל 2) כדי להכין את מקום הרצועה 1x4. הסיום HIJ (בגודל 2) כדי להגיע ל 6+2=8. אם נוסיף, כי בהרכבה אנו מבצעים הזזה שמאלה של חלק Y על חלק X (ראה תרשים ה'), הרי נוכל לרשום את הסדרות של עמודות החלקים באופן הבא:

חלק Y		2	4		2	4	6
הרצועה:				4			
חלק X	6	4	2		4	2	
סך הכל (חלק Y+X)	8	8	8		8	8	

ננסה עתה לרשום את הסדרות במקרה של ריבוע 7x7 ורצועה 1x5 שבאמצעותם צריכים לקבל מלבן 6x9

חלק Y		2	4	6		3	5	7
הרצועה:					5			
חלק X	7	5	3	1		4	2	
סך הכל (חלק Y+X)	9	9	9	9		9	9	

אפשר להיווכח, כי אמנם החתכים הם כנדרש. נרשום עוד מקרה של ריבוע 8x8 והרצועה 1x6

חלק Y		2	4	6		2	4	6	8
הרצועה:					6				
חלק X	8	6	4	2		6	4	2	

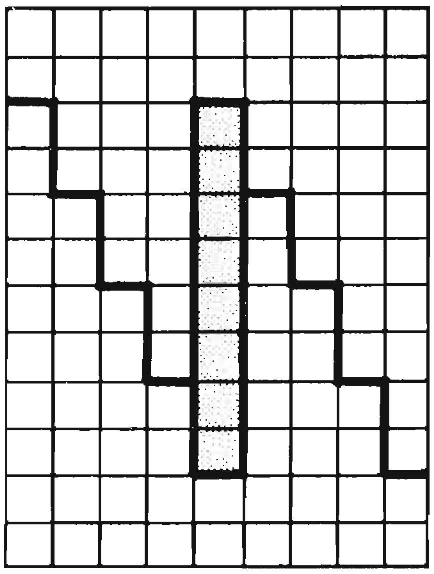
יש לשים לב לזאת, כי במקרה שמידות הריבוע הן מספר זוגי (8x8 , 6x6 וכו'), שתי סדרות החלקים זהות לחלוטין. את האחת נקרא משמאל לימין ואת השנייה מימין לשמאל. (לדוגמה 2 4 6 2 4 6 8 בקריאה משמאל לימין עבור חלק Y ובקריאה מימין לשמאל עבור חלק X).

במקרה האי-זוגי שתי הסדרות נבדלות רק בעמודה "האמצעית" (אם נתייחס לחלק X), אז מהן הסדרות במקרה של 10x10 ורצועה 1x8?

חלק Y		2	4	6	8		2	4	6	8	10
הרצועה:						8					
חלק X	10	8	6	4	2		8	6	4	2	

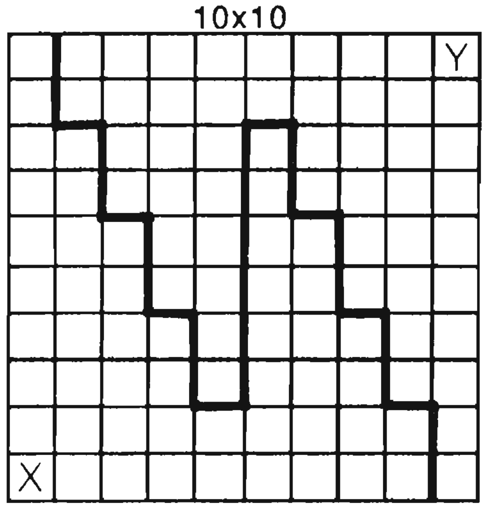
התרשים:

9x12



1x8

10x10



לאלה שמעוניינים בפתרון כללי, הנה הסדרות:

1. **המקרה הזוגי** n=2m , **כלומר מריבוע** 2m x 2m **ורצועה** (2m-2) x 1 **לקבל מלבן** (2m-1) x (2m+2).

חלק Y		2	4	...	2m-2		2	...	2m-2	2m
הרצועה:						**2m-2**				
חלק X	2m	2m-2	...	4		**2**		4	2	
סך הכל (חלק X+Y)	2m+2	2m+2	...	2m+2		**2m+2**	**2m+2**	...	**2m+2**	

2. **המקרה האי זוגי** n=2m+1 , **כלומר מריבוע** (2m+1) x (2m+1) **ורצועה** (2m-1) x 1 **לקבל מלבן** (2m+3) x 2m

חלק Y		2	4	...	2m-2		3	5	...	2m-1	2m+1
הרצועה:						2m-1					
חלק X	2m+1	2m-1		...	5	1	2m-2		...	4	2
סך הכל חלק Y+X	2m+3	2m+3			2m+3	2m+3	2m+3				2m+3