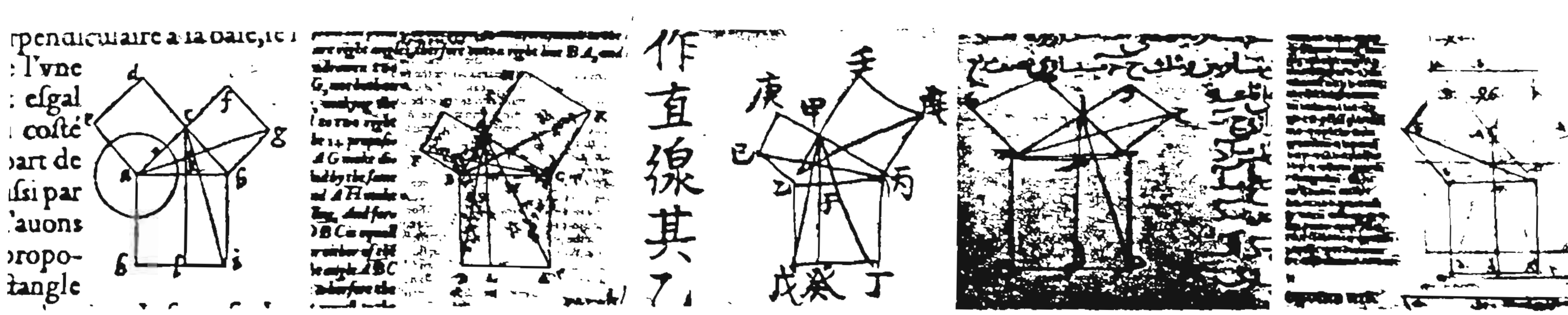
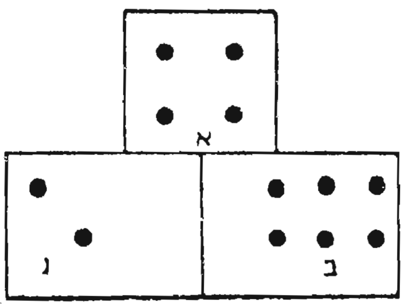


התפתחות המספר ושיטות ספירה

מאת ד"ר בנו ארבל

תחושת המספר

בני אדם, וגם מינים רבים של בעלי חיים, נחנו ביכולת שאפשר לכנותה "תחושת המיספר". אם לקבוצה קטנה של עצמים (למשל הקבוצה בתמונה 1-א) נוספו פריטים אחרים (תמונה 1-ב) - נרגיש בכך. כן הדבר אם נגרעו מן הקבוצה פריטים אחדים (השוו את 1-א עם 1-ג). "תחושת המיספר" אינה ספירה: אנו מרגישים בשינוי גם בלי לספור. אדם אומר "נעלם לי עיפרון" גם אם אינו יודע כמה עפרונות יש לו בסך הכל.



תמונה 1

מניה (ספירה) היא יכולת ברמה גבוהה הרבה יותר, אופיינית לאדם. כמעט כל אחד השתמש באצבעותיו כאמצעי הנוח ביותר למניה. בשפות רבות מתגלה נטיה זו מעצם המינות. למשל, המלה הלטינית עבור אצבע (digitum) משמשת באנגלית עבור ספרה (digit).

קבוצות בסיסיות

בשלב מסוים של ההתפתחות האנושית, לא הספיקו כבר אצבעות הידיים והרגליים, והיה צורך ליצור שיטה לרישום מספרים גדולים. הצעד הראשון בכיוון זה היה סידורם של המיספרים ב"קבוצות בסיסיות". אך טבעי הוא שהקבוצות הבסיסיות התקשרו לשיטות המניה העתיקות יותר. האדם המודרני משתמש בבסיס עשר, שהוא מספר אצבעות הידיים. אך היו שימושים בקבוצה של חמש (אצבעות יד אחת) ובקבוצה של עשרים (אצבעות ידיים ורגליים). בקבוצה האחרונה השתמשו השבטים האינדיאנים של תרבות המאיה.

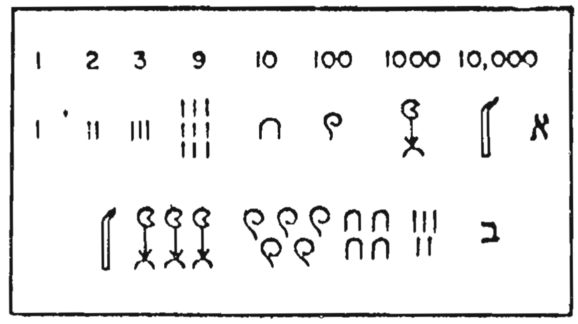
על תרבות המאיה ראו "לדעת" י"א/7, עמ' 3.

אפילו בשפה הצרפתית נמצאים עקבותיה: למספר 80 קוראים "ארבע-פעמים עשרים" (quatre-vingts). הבסיס הגדול ביותר שזוהה הוא בסיס שישים, ששימש בבבל. קשה להסביר כיצר הגיעו לבסיס כזה.

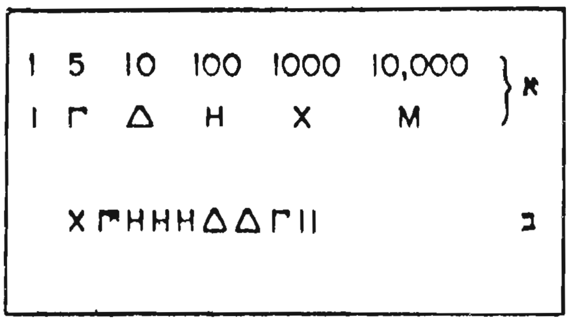
משנקבעה הקבוצה הבסיסית, מציינים מיספרים גדולים יותר על ידי מחזור נוסף של איברי הקבוצה הבסיסית. לדוגמא, הבסיס חמש. הבה נסמן את מיספר איברי הקבוצה באות h (במקרה זה h=5). לאחר h הראשונים, המניה היא: h ואחד, h ושניים, h ושלוש, h וארבע, שני h (כאשר 2h הם 10). בהמשך נגיע ל-2h, 3h, 4h, ואחר כך ל-hh (שהוא 25). בידקו ותיווכחו שבבסיס-5, ערך הביטוי 2hh+3h+1 הוא 66. באופן זה ניתן להציג בצורה נאותה כל מיספר בכל בסיס.

התפתחותה של כתיבת המיספרים נמשכה אלפי שנים. תחילה ציינו מיספרים באמצעות חריטה על מקלות. את עקבותיה של אותה חריטה אפשר למצוא בשיטה הרומית לרישום מיספרים: I הוא 1, II הוא 2, III הוא 3.

בתמונה 2-א מוצגים הירוגליפים ששימשו את המצרים הקדמונים לרישום מיספרים (כ-3,400 שנה לפנה"ס). בדיקה תגלה שהמיספר בתמונה 2-ב הוא 13,545. המיספרים של היוונים העתיקים מוצגים בתמונה 3-א. הצירוף שבתמונה 3-ב מייצג את המיספר 1827.



תמונה 2



תמונה 3

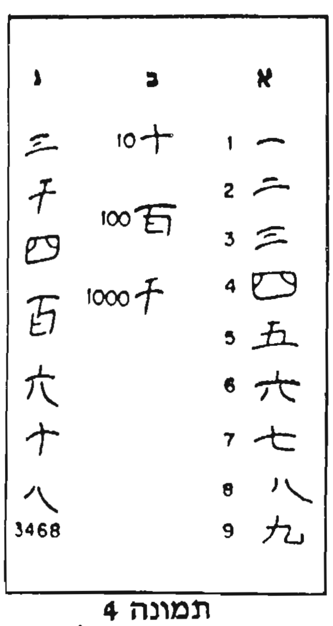
מערכות מניה כפליות

סימונים מעין אלו הוליכו לשיטות מניה שניתן לכנותן מערכות-מניה כפליות. במערכת כפלית קיימים סימונים מיוחדים עבור מיספרים בקבוצה הבסיסית, וגם סימונים עבור קבוצות גדולות יותר. כזו היא שיטת הספירה הסינית-יפאנית המסורתית. בתמונה 4-א רואים את הסימונים עבור האיברים 1-9; בתמונה 4-ב מוצגים הסימונים עבור הקבוצות הגדולות.

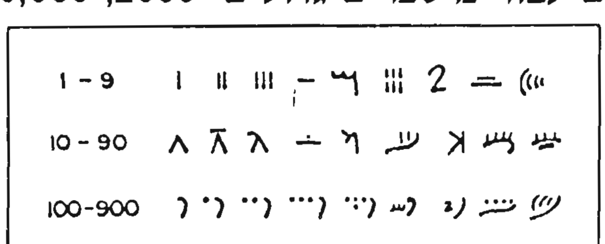
הבה נתרגם ללשון תקופתנו את המיספר המופיע בתמונה 4-ג. הוא כתוב מלמעלה למטה. לפנינו שלוש-פעמים אלף, ועוד ארבע-פעמים-מאה, ועוד שש-פעמים-עשר, ועוד שמונה: המיספר הוא איפוא 3468.

ההיגרופילים של המצרים התפתחו ל"מערכת ספרתית". כאן היו סימנים מיוחדים למיספרים 1-9, סימנים מיוחדים לכפולות-10 של מיספרים אלו (10, 20, ... 90), ועוד סימונים לכפולות-100. המערכת מוצגת בתמונה 5. גם השיטה ההודית-ברהמנית היתה מסוג זה.

בשיטות הספירה העברית והיוונית שימשו אותיות כסימונים לספרות ולמיספרים. בשיטתנו, השנה הנוכחית היא שנת ה' תשמ"ח, כלומר: חמשת אלפים (ה) ועוד ארבע מאות (ת), ועוד שלוש מאות (ש), ועוד ארבעים (מ) ועוד שמונה (ח). בשיטה היוונית, בנוסף לסימונים שבתמונה 3, היו גם סימונים מיוחדים עבור מיספרים גדולים 2000, 10,000, (1000,ועוד).



תמונה 4



תמונה 5

כך חישבו

מערכות המיספרים שתוארו לעיל אינן נוחות כלל וכלל לחישובים. כדי לעמוד על הקושי, נדגים חישובים אחדים בשיטה הרומית. הסימונים הבסיסיים מוצגים בתמונה 6. בין אלו,

הסימון L (עבור 50) והסימון D (עבור 500) אינם שייכים לקבוצה הבסיסית, ונוספו כדי להקל. יש לדעת, שאם סימן נמוך מופיע לשמאלו של סימן גבוה, מחסרים את הנמוך מן הגבוה; ואם הנמוך מופיע מימין, מוסיפים אותו. כך, I הוא 1, V הוא 5, הצירוף IV הוא 4, והצירוף VI הוא 6. כך הדבר כשרושמים מיספרים. לצורך חישוב במיספרים, עלינו להיפטר מן ההחסרות: את IV, למשל, נחזיר לצורתו המסורבלת IIII.

I	II	V	X	L	C	D	M
1	2	5	10	50	100	500	1000

תמונה 6

ועתה לעבודה! ותחילה, דוגמא של חיבור:

XXIV+XIX

(פענחתם! התרגיל הוא 24+19). ניפטר מן ההחסרות:

XXIIII+XVIIII

נקבץ סימונים זהים:

=XXXVIIIIIIII
=XXXVVIII
=XXXXIII = XLIII

לפי הכלל, XL הוא חמישים-פחות-עשר, כלומר 40)
הבה נעבור לחבר שלושה מיספרים:

CCXXVII+XXXIV+CLXVI

(בסימון מודרני: 227+34+166). הפתירה היא כזאת:

=CCXXVII+XXXIIII+CSXVI
=CCCLXXXXXXVVIIIIIII
=CCCLLXXIIIIIII
=CCCCXXVII
=CDXXVII

ושוב, CD הוא חמש מאות-פחות-מאה, כלומר 400).
על כפל וחילוק בשיטות כאלה אין מה לדבר: אבל החיסור הוא עדיין בגדר האפשר. הבה נבצע בשיטה הרומית את התרגיל 251-162=89
נתרגם לספרות רומיות,

CCLI-CLXII

ונפתור

=CLLLI-CLXII
=LLI-XII
=LXXXXXI-XII
=LXXXX-I=LXXXIX

ברוב התרבויות הקדומות נחשבה יכולת חישוב לאמנות מסובכת ומתקדמת. אולם הכושר לחשב היה נחוץ. משום כך נולדו אמצעים שונים להקלת החישוב. ידועה מכולם היא החשבוניה, שרבים מאתנו מכירים כצעצוע בזכות החשבוניה, שתפוצתה היתה רבה, הגיעו הרומים ליכולת חישוב טובה. כדאי לדעת שהחשבוניה נמצאה בשימוש, במקומות שונים בעולם, אפילו במאה הנוכחית. אך את מקומה המרכזי בחשבון איבדה עוד לפני מאות אחדות בשנים, כשהצגת המיספרים עברה גילגול נוסף.
ההתפתחות האחרונה בהצגת המיספרים היא המצאת שיטת המיקום. זו השיטה המשמשת אותנו. לסיפורה של שיטת המיקום נקדיש כתבה מיוחדת, בחוברת הבאה.

מאמר זה פורסם בירחון "לדעת מדע לנוער" י"ז/8, מוסד ויצמן למדע, 1987.