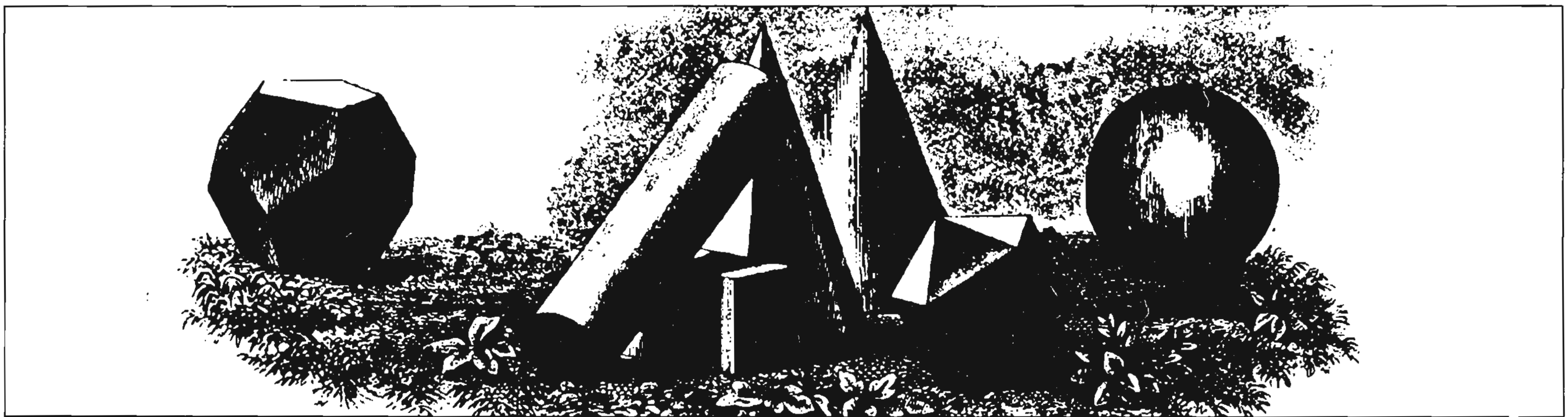


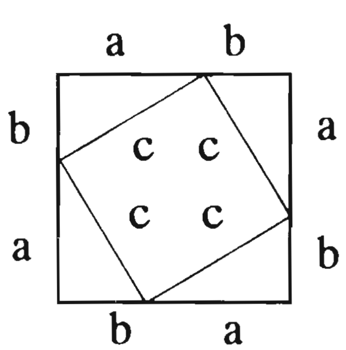
משפט פיתגורס

רינה גפני

משפט פיתגורס הוא אחד מהמשפטים החשובים והידועים ביותר בתחום הגיאומטריה האוקלידית, גם בקרב אוכלוסיה רחבה שאיננה מתמחה במתימטיקה. משפט זה נתגלה עוד בתקופת הבבלים, אולם את צורתו הפורמלית כמשפט עם הוכחה קיבל רק כעבור 1000 שנה ע״י פיתגורס ותלמידיו (כ 500 שנה לפני הספירה), ומכאן שמו.

משפט פיתגורס הטוען: ״סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר״, מקשר בין תכונות גיאומטריות-״היות המשולש ישר זוית״ ובין מדידות: מדידת אורכי ניצבים וחישובי שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים. הוכחות רבות קיימות למשפט, למן כאלה המבוססות על משפטים גיאומטריים בלבד, ועד כאלה המערבות שיקולים אלגבריים. נציג לדוגמא הוכחה פשוטה של המשפט, המסתמכת על חישובי שטח של ריבוע ומשולש ועל חוק הפילוג באלגברה: נתון משולש ישר זוית שניצביו הם a , b ויתרו הוא c, יש להוכיח

שמתקיים $a^2+b^2=c^2$



נבנה ריבוע שצלעו היא a+b ונחלקו ל 4 משולשים ישרי זוית, שניצביהם הם a ו b ולריבוע שצלעו c. המשולשים חופפים למשולש הנתון (מדוע?)
שטחו של הריבוע הגדול ניתן לחישוב בשתי דרכים:

(a+b שטח ריבוע שצלעו) (1 $S=(a+b)^2$

(שטח 4 משולשים וריבוע קטן) (2 $S=4ab+c^2$

מהשוואת שתי הדרכים, לאחר פתיחת סוגריים ב (1) לפי חוק הפילוג, נקבל את המשפט המבוקש.

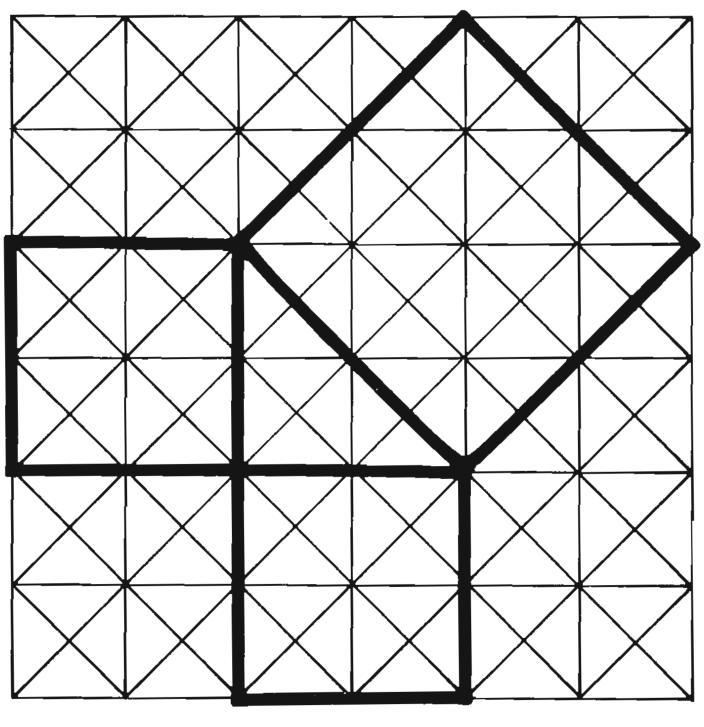
הצגת המשפט בכיתה ו׳

שילוב המשפט בלימודי הגיאומטריה בכיתה ו׳ , מתקשר עם נושאים רבים הנלמדים בכיתות ה׳ ו -ו׳, ולכן אף-על-פי שאיננו חלק הכרחי מתוכנית הלימודים, אני מציעה לשלבו במהלך לימודי הגיאומטריה, ולו גם לחלק מתלמידי הכיתה . הפעילות כוללת שלבי חקירה וגילוי של המשפט עצמו, תוך שימוש במחשבון כיס, והרחבות שלו לגבי משולשים שאינם ישרי זוית.

הצעות לפעילות בכיתה

א. גילוי המשפט

נשתמש בדף המרושת במשולשים ישרי זוית שווי שוקיים, (ראה בשרטוט), ונבקש לשרטט בו משולש ישר זוית, ולבנות ריבוע על כל ניצב, כשאנו משתמשים בקווים הקיימים בדף בלבד, (לא כל שרטוט של משולש ישר זוית, מאפשר את בניה הריבועים).
נבקש מהתלמידים לחקור את שטחי הריבועים והקשר ביניהם.



אחרי שתימצא השערה יש לבדקה במשולשים נוספים. לשם כך יוכן דף בו ישורטטו משולשים ישרי זוית, והתלמידים יתבקשו לחשב בעזרת מחשבון את שטחי הריבועים ולבדוק את ההשערה.

אפשר לבקש מהתלמידים לשרטט בעצמם משולש ישר זוית, תוך בחירת אורכי הניצבים כמספרים שלמים, ולבדוק את קיום ההשערה.

חשוב לציין שבכל הבדיקות שבהן אורך היתר שיתקבל לא יהיה מספר שלם יתקבל קירוב של ההשערה. למשל אם הניצבים יהיו 1 ס״מ, ו 2 ס״מ הרי שהיתר צריך להיות שורש של 5

$(1^2 + 2^2 = 5)$,

מאחר שמספר זה הוא אי ראציונאלי, הרי שקבלתו ע״י מדידה תהיה בקירוב בלבד.

הוכחת המשפט לא תוצג לתלמידים, אך הפעילות תסוכם בהפיכת ההשערה למשפט, ללא הוכחה בשלב זה, תוך תיאור הרקע ההיסטורי וחשיבותו.
(ראה על כך בביבליוגרפיה למאמר זה).

ב. בדיקת המשפט ההפוך

השאלה המוצגת לקראת פעילות זאת היא, האם משולש שאורכי צלעותיו מקיימים את משפט פיתגורס יהיה ישר זוית.

חומרי העבודה הם קשיות, שאותן יגזרו התלמידים לפי האורכים הרצויים. מאחר שלא קיימות שלשות רבות של מספרים שלמים המקיימות את הכלל -

$$a^2 + b^2 = c^2$$

מומלץ להציג לתלמידים את השלשות.

לדוגמא: 3, 4, 5   5, 12, 13   7, 24, 25 . ניתן לכפול כל אחת מהשלשות הללו בכל מספר שנרצה, ושלשת המספרים החדשה שתתקבל תמשיך לקיים את הכלל הנ"ל, למשל: 6, 8, 10   9, 12, 15 וכו'.

סיכום הפעילות - בדיון במשמעות של משפט והיפוכו ובהבאת משפט זה כדוגמא למצב שבו נכון גם המשפט ההפוך. רצוי להציג לתלמידים מצבים, מתחום הידע שלהם, שבהם אין הדבר כך.

ג. בדיקת השינויים שיחולו במשפט כשהמשולשים לא יהיו ישרי זוית.

במקרה זה לאחר חקירת מספר דוגמאות ניתן להגיע להכללה, שאם במשולש שבו c היא הצלע הארוכה , a ו b הן שתי הצלעות האחרות

קיים $a^2 + b^2 > c^2$ אזי המשולש הוא חד זוית.

ואם קיים $a^2 + b^2 < c^2$ אזי המשולש הוא קהה זוית.

אפשר להציג זאת ע"י בחירת a ו b קבועים ושינוי הזוית שביניהם.

למשל, לגזור שתי קשיות באורך 6 ס"מ, ו 8 ס"מ . כשהזוית ביניהם ישרה יהיה אורכה של הצלע השלישית c=10 , כאשר מקטינים את הזוית ביניהם , תקטן גם הצלע השלישית, c<10 ולכן ודאי שסכום הריבועים של a ו-b (100) יהיה גדול מריבוע האורך של צלע c. כאשר מגדילים את הזוית לזוית קהה, גדלה הצלע השלישית c>10 ולכן סכום הריבועים שלהם (100) יהיה קטן מריבוע האורך של צלע c .

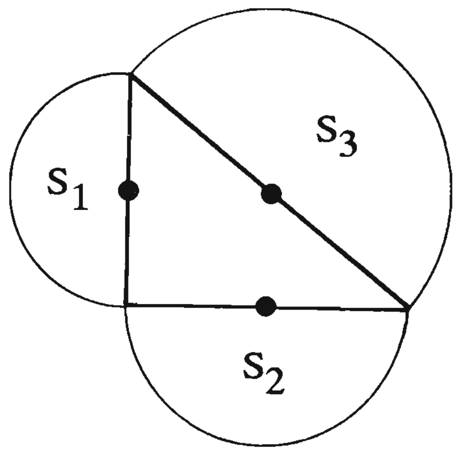
אם כך, מצאנו קריטריון למיון המשולשים לפי זויותיהם: ישרי זוית, חדי זוית וקהי זוית, על פי מידע על אורכי הצלעות.

ד. העשרה - שינויים קלים במשפט

ננסה לערוך שינויים קלים במשפט ולראות האם נשמרת תקפותו.

במקום לשרטט ריבועים על הצלעות נשרטט מעגלים על כל צלע, כך שהצלע משמשת כקוטר המעגל, ונחשב האם סכום שטחי המעגלים הבנויים על הניצבים שווה לשטח העיגול הבנוי על היתר. באופן דומה אפשר לבנות על כל צלע משולש שווה צלעות, או כל מצולע משוכלל.

ראה דוגמה לשרטוט מעגלים :



$$S_1 + S_2 = S_3$$

לסיכום, התנסות קצרה במשהו ממטעמי המתימטיקה, רק תוסיף ותעשיר את עולמם של תלמידינו , לקראת פגישתם בעתיד עם מושגים אלו, שתהיה, כנראה, הרבה יותר פורמלית .

ביבליוגרפיה:
אליעזר שישא , "מתימטיקה ומתימטיקאים", הוצ׳ מסדה.
הספריה המדעית של Life , "מתימטיקה" , הוצ׳ ספריית מעריב.