

# הצגותיו השונות של ה- $\frac{1}{3}$

שרה מלצר

כאשר נהפוך את השברים  
 $\frac{1}{16}$  ,  $\frac{1}{10}$  ,  $\frac{1}{8}$  ,  $\frac{1}{5}$  ,  $\frac{1}{2}$  ,  $\frac{1}{4}$   
לשבר עשרוני נקבל בכל אחד מהם שבר עשרוני סופי.

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \frac{1}{4} = 0.25 \quad \frac{1}{5} = 0.2 \quad \frac{1}{8} = 0.125 \quad \frac{1}{16} = 0.0632$$

אולם יש שברים אחרים כגון:  
 $\frac{1}{13}$  ,  $\frac{1}{11}$  ,  $\frac{1}{9}$  ,  $\frac{1}{7}$  ,  $\frac{1}{6}$  ,  $\frac{1}{3}$

שלא ניתן להרחיבם לשברים פשוטים עם מכנה שהוא חזקה של 10. כשכותבים שברים אלה בכתוב עשרוני (בעזרת חילוק המונה במכנה) מקבלים שברים עשרוניים מחזוריים. בשברים אלה יש קבוצה מסוימת של ספרות החוזרת על עצמה עד אינסוף.

$$\frac{1}{6} = 0.16666 \dots = 0.1\bar{6}$$

$$\frac{1}{3} = 0.333 \dots = 0.\bar{3}$$

$$\frac{1}{13} = 0.076923076923\dots = \overline{0.076923}$$

$$\frac{1}{11} = 0.090909\dots = 0.0\bar{9}$$

נשים לב לכך שיש מחזוריים באורכים שונים וכן שלא תמיד המחזור מתחיל מיד לאחר הנקודה העשרונית. הקו מעל הספרות מציין שאלה הן הספרות החוזרות. קבוצה זו של ספרות, לפי הסדר הנתון, יוצרת את המחזור של השבר העשרוני. ואלה נקראים "שברים עשרוניים מחזוריים".

בבואנו להשוות בין שברים פשוטים ועשרוניים עלינו לתת את הדעת לגודלו של השבר העשרוני - המחזורי, למרות הבעייתיות הנובעת מאינסוף הספרות שאחרי הנקודה.

קיימת נטייה לחשוב ש-  $\frac{1}{3}$  שווה ל- 0.3 או ל- 0.33. ולכן יש להפנות את

תשומת לבם של התלמידים לכך ש-  $\frac{1}{3}$  אינו שווה ל- 0.3 או ל- 0.33 אלא מתקרב לשברים אלה.

נראה ש:

$$\frac{1}{3} = \frac{10}{30} ; \quad 0.3 = \frac{3}{10} = \frac{9}{30} \quad \text{כי} \quad 0.3 < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{100}{300} ; \quad 0.33 = \frac{33}{100} = \frac{99}{300} \quad \text{כי} \quad 0.33 < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1000}{3000} ; \quad 0.333 = \frac{333}{1000} = \frac{999}{3000} \quad \text{כי} \quad 0.333 < \frac{1}{3}$$

בצורה דומה אפשר להראות ש  $\frac{1}{3}$  גדול מכל שבר עשרוני, הקטן מ 1 והמכיל

במחזור את הסיפרה 3 בלבד מספר סופי של פעמים.

כדי לעזור לתלמידים להבין רעיון חשוב זה נשתמש באמצעי המחשה, ואלה הם שקפים שעליהם משורטטים צירי מספרים.

ראה שרטוט) **שקף 1** : קטע יחידה המחולק ל-3 חלקים שווים שעליו מסומנים החלקים בשברים .

- " - **שקף 2** : קטע יחידה באורך הנ"ל המחולק ל-10 חלקים שווים שעליו מסומנים החלקים במספרים עשרוניים.

כאשר מניחים שקף על שקף אנו רואים כי ה-  $\frac{1}{3}$  נמצא בין 0.3 ל-0.4.

כלומר באמצעות ישר המספרים ניתן לראות כי:  $0.3 < \frac{1}{3} < 0.4$

הסבר בעזרת היפוך המספרים העשרוניים לשברים:

$$0.3 = \frac{3}{10} = \frac{9}{30} , \quad 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{12}{30} , \quad \frac{1}{3} = \frac{10}{30}$$

$$\frac{9}{30} < \frac{10}{30} < \frac{12}{30} \quad \text{ולכן:}$$

(ראה שרטוט) **שקף 3** : קטע יחידה באורך הנ"ל המתחיל ב-0.3 ומסתיים ב-0.4 המחולק ל-10 חלקים ועליו המספרים הבאים:

0.30 0.31 ..... 0.40

כאשר מניחים שקף על שקף רואים כי ה-  $\frac{1}{3}$  נמצא בין 0.33 ל 0.34

ההסבר לכך יעשה בעזרת היפוך המספרים העשרוניים לשברים:

$$0.34 = \frac{34}{100} = \frac{102}{300}, \quad 0.33 = \frac{33}{100} = \frac{99}{300}, \quad \frac{1}{3} = \frac{100}{300}$$

$$\frac{99}{300} < \frac{100}{300} < \frac{102}{300} \quad \text{ולכן:}$$

$$0.334 < \frac{1}{3} < 0.34 \quad \text{כלומר:}$$

**שקף 4:** קטע יחידה באורך הנ"ל מחולק ל- 10 חלקים ועליו המספרים הבאים:

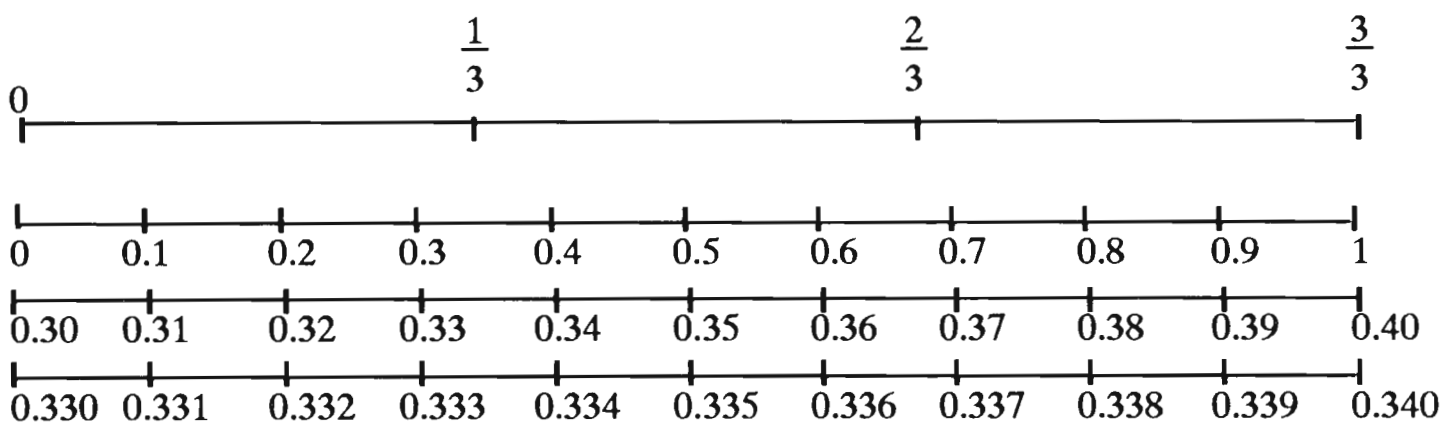
0.330 0.331 ..... 0.340

אם נניח שקף על שקף נוכל לראות כי:  $\frac{1}{3}$  נמצא בין 0.333 ל 0.334.

ההסבר בעזרת היפוך המספרים העשרוניים לשברים:

$$0.334 = \frac{1002}{3000}, \quad 0.333 = \frac{999}{3000}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1000}{3000}$$

שרטוט השקפים:



וכך מגיעים למסקנה, כי ככל שהסיפורה 3 תחזור פעמים רבות יותר במספר העשרוני, אנו נתקרב יותר ל-  $\frac{1}{3}$

אבל למרות שאיננו מגיעים ל-  $\frac{1}{3}$  כשמספר הפעמים שמופיע ה- 3 במחזור הוא סופי

(אפילו גדול מאד), אפשר להראות בדרך מתימטית כי  $\frac{1}{3}$  שווה לשבר המחזורי האינסופי ... 0.33333

הוכחה:

$$\begin{array}{ll} x = 0.333... & \text{נסמן:} \\ 10x = 3.333... & \text{נכפיל ב- 10!} \\ 9x = 3 & \text{נחסר:} \\ x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} & \end{array}$$

(הספרות אחרי הנקודה התבטלו כתוצאה מהחיסור).

תרגיל:

כתוב את הסימן המתאים < או >

|                      |                        |
|----------------------|------------------------|
| $0.3 < \frac{1}{3}$  | $0.334 > \frac{1}{3}$  |
| $0.33 < \frac{1}{3}$ | $0.333 < \frac{1}{3}$  |
| $0.4 > \frac{1}{3}$  | $0.3333 > \frac{1}{3}$ |
| $0.34 > \frac{1}{3}$ | $0.3334 > \frac{1}{3}$ |
| <b>ב</b>             | <b>א</b>               |

ועוד על שברים עשרוניים מחזוריים:

הפוך לשבר עשרוני את השבר הפשוט  $\frac{1}{81}$

האם קיבלת שבר מחזורי ?

מה המעניין בשבר מחזורי זה ?