



רעש... חושבים

פיתוח חשיבה

פעילויות חשבוניות

אלכסנדר אגרונובסקי

מאמר זה מוקדש לפעילויות חשבוניות שונות. הפעילויות מתבססות על המושגים והתכונות העיקריים של מספרים טבעיים ומניחות שליטה בסיסית במושגים ותכונות אלה. בחומר המוצג במאמר ניתן להשתמש כדי להפעיל תלמידים בעלי יכולת מתמטית גבוהה ובינונית. בעזרת פעילויות אלה ניתן לעודד את התלמיד להמציא אסטרטגיות לפתרון בעיות, להמציא חוקיות בתהליך או במצב נתון וגם להציג מושגים מתמטיים מוכרים בגישות לא שיגרתיות.

1. נתון משולש מספרים:

```

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1

```

א. המשך משולש זה ורשום עוד כמה שורות.

- ב. מצא את סכום המספרים בשורה החמישית, השמינית.
 ג. האם בכל שורה החל מהשלישית יש מספר זוגי?
 ד. נסה להמציא משולש מספרים אחר ותן לחברך לגלות את החוקיות.

פתרון:

א. במשולש זה כל מספר שווה לסכום שלושה מספרים מעליו.
 אחד מהם נמצא מעל למספר ועוד שניים משני צדדיו.
 (למשל: $7 = 2+3+2$; $6 = 1+2+3$). אם מעל למספר יש רק שני מספרים,
 אז נניח שהמספר השלישי הוא 0

לפיכך תהיה השורה החמישית:

1 4 10 16 19 16 10 4 1

ב. אם בשורה השניה סכום כל מספרים שווה ל-3, אז בשורה השלישית
 הוא $3^2=9$ ובשורה החמישית הוא $3^4=81$, בשורה השמינית יהיה
 סכום המספרים $3^7=2,187$.

ג. נרשום מכל שורה, החל מהשורה השלישית את ארבעת המספרים
 משמאל ובמקום מספר זוגי נציב אות ז ובמקום מספר אי-זוגי נציב
 א נקבל:

				א	ז	א	ז	שורה שלישית
			א	א	ז	א		שורה רביעית
			א	ז	ז			
		א	א	א	ז			
	א	ז	א	ז				

רואים שהשווה השביעית שווה לשורה השלישית. מאחר והזוגיות או
 אי-זוגיות של כל מספר בכל שורה של המשולש תלויה רק בזוגיות או
 אי-זוגיות של המספרים מהשורה הקודמת, נובע שבשורה השמינית
 יהיה אותו מצב כמו בשורה הרביעית, כלומר קיים תהליך מחזורי.

2. מצא מספרים טבעיים המקיימים את התנאי הבא:
 אם נמחק את ספרת האחדות של המספר אז נקטין את המספר פי מספר פעמים שלם, כלומר אם נחלק את המספר הנתון במספר שהתקבל לאחר מחיקת ספרת האחדות תהיה המנה מספר שלם.
 (למשל: אם נמחק 2 במספר 22 אז נקבל 2 ו- $11 = 22 : 2$ אבל אם נמחק 3 במספר 23 אז $23 : 2$ לא שווה למספר שלם).

פתרון:

דרך א: בעזרת שקולים חשבוניים.

1. כל המספרים המסתיימים באפס בודאי מקיימים את תנאי הבעיה, שכן אחרי מחיקת האפס, כל מספר מקטין את עצמו פי 10.

$$50 : 5 = 10$$
2. כל המספרים בעשרת השניה, אחרי מחיקת האחדות ישאר 1 והדבר ברור.
3. כל המספרים הדו ספרתיים, בעלי אותה ספרה באחדות ובעשרות מקטינים את עצמם פי 11.

$$88 : 8 = 11$$

כך אפשר להמשיך לחפש קבוצות מספרים נוספות.

דרך ב: בעזרת שקולים אלגבריים.

נתאר מספר באופן כללי בצורה $x = 10a + b$ (מספר העשרות) (b - ספרת אחדות)

$$\text{למשל: } 39 = 10 \cdot 3 + 9$$

$$159 = 10 \cdot 15 + 9$$

נסמן ב n את מספר הפעמים שהמספר מקטין את עצמו.
 n- מספר שלם וחיובי. לכן נקבל

$$\frac{10a + b}{a} = n$$

למשל:

$$n = 13 \qquad \frac{39}{3} = 13$$

$$\text{לא קיים } n \text{ מתאים} \qquad \frac{159}{15} =$$

נוכיח שמדובר רק במספרים דו ספרתיים:

$$b = a(n-10) \leftarrow 10a + b = an \leftarrow \frac{10a + b}{a} = n$$

מאחר ו b היא ספרת האחדות הרי $0 < b < 10$, חייב להתקיים ש $n > 10$ (מדוע?) ולכן $a < 10$. והמספר הוא דו ספרתי.
כעת בעזרת הנוסחה $b = a(n - 10)$ אפשר למצוא מספרים כרצוננו.

למשל:

נבחר ספרת אחדות $b = 6$ נקבל $6 = a(n - 10)$ והאפשרויות הן:

$26 : 2 = 13$	$n = 13$	$a = 2$	$2 \cdot 3$
$36 : 3 = 12$	$n = 12$	$a = 3$	$3 \cdot 2$
$66 : 6 = 11$	$n = 11$	$a = 6$	$6 \cdot 1$
$16 : 1 = 16$	$n = 16$	$a = 1$	$1 \cdot 6$

אם רוצים למצוא מספרים המקטינים פי מספר מסויים כמו למשל - פי 12 אז בוחרים $n = 12$ ומשתמשים שוב בעזרת הנוסחה $b = a(12 - 10)$
 $b = 2a$

והמספרים המתאימים: 12, 24, 36, 48.

3. א. מצא מספרים (שווים אחד לשני) שסכומם שווה למכפלה שלהם.
 ב. מצא כמה זוגות מספרים (לא שווים אחד לשני) שסכומם שווה למכפלתם.

פתרון:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 \times 0 = 0$$

א. $2 + 2 = 4$

$$2 \times 2 = 4$$

* אילו שני המספרים השלמים היחידים המקימים זאת.

$$5 \times 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}$$

ב. $5 + 1\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}$

$$3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$11 \times 1.1 = 12.1$$

$$11 + 1.1 = 12.1$$

$$9 \times 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}$$

$$9 + 1\frac{1}{8} = 10\frac{1}{8}$$

$$101 \times 1.01 = 102.01$$

$$101 + 1.01 = 102.01$$

$$21 \times 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20}$$

$$21 + 1\frac{1}{20} = 22\frac{1}{20}$$

קיימת קבוצה אין-סופית של זוגות כאלה.

אפשר לתת לתלמידים כמה זוגות ולבקשם למצוא מה המאפיין את זוג המספרים ולנסות למצוא זוגות נוספים כאלו.

ההסבר המתמטי למעוניינים:
מחפשים זוג מספרים x ו- y המקיימים:

$$x + y = x y$$

$$x = x y - y$$

$$x = y (x - 1)$$

$$\frac{x}{x - 1} = y$$

$$y = \frac{9}{8} \leftarrow x = 9 \text{ למשל}$$

אפשר להעלות את הבעיה בהקשר לגאומטריה: מחפשים מלבן ששטחו שווה למחצית הקפו.

4. למספרים 12 ו 60 יש תכונה מעניינת:

$$12 \times 60 = 720 \quad 12 + 60 = 72$$

מצא עוד כמה זוגות מספרים עם אותה תכונה.

פתרון:

$$11 \times 110 = 1210$$

$$11 + 110 = 121$$

$$14 \times 35 = 490$$

$$14 + 35 = 49$$

$$15 \times 30 = 450$$

$$15 + 30 = 45$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 + 20 = 40$$

לתלמידים אפשר להציג את הבעיה כך:

$$\triangle \square \times \bigcirc \square = 490$$

$$\triangle \square + \bigcirc \square = 49$$

5. בתבנית הבאה יש 5 מספרים תלת ספרתיים:

1	1	1	איך למחוק תשע ספרות
3	3	3	ולכתוב במקומן 0 כדי שסכום
5	5	5	חמשת המספרים
7	7	7	יהיה שווה ל- 1111?
9	9	9	

פתרון:

101	.ד	011	.ג	111	.ב	100	.א
303		330		030		000	
+ 000		+ 000		+ 000		+ 005	
707		770		070		007	
<u>000</u>		<u>000</u>		<u>900</u>		<u>999</u>	
1111		1111		1111		1111	

6. כדי לרשום את השבר $\frac{6729}{13458}$ השתמשו בכל אחת מהספרות 1 עד 9.

$$\frac{6729}{13458} = \frac{1}{2} \quad \text{אחרי צמצום נקבל:}$$

איך להרכיב מתשע ספרות שברים, שווים ל:

$$\frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{7} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{9}$$

פתרון:

$$\frac{1}{3} = \frac{5823}{17469}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3942}{15768}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2697}{13485}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2943}{17658}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{2394}{16758}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{3187}{25496}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{6381}{57429}$$

קימים גם פתרונות אחרים.