4.2 סדרות של מספרים למדריך

מטרות

- זיהוי חוקיות של סדרות הנוצרות על-ידי הצבת מספרים עוקבים בתבניות ליניאריות.
- מציאת קשר בין תבניות ליניאריות בעלות אותו מקדם למשתנה.
- הכרת ייצוג של סדרה חשבונית בעזרת גרף של קו ישר במערכת צירים.
- הכרת ייצוג של חוקיות בעזרת תבניות.
- זיהוי תופעות של חוקיות בלוח דו-מימדי.
- שימוש באלגברה ככלי יעיל להנמקת חוקיות.
- עיסוק מקביל בייצוג מספרי ואלגברי.

מקורות

Friedlander, A. (1998). An Excel-lent bridge to algebra. *Mathematics Teacher* , *91*(*5*)*,* 382–3.

Friedlander, A., Hershkowitz, R. & Arcavi, A. (1989). Incipient "algebraic" thinking in pre-algebra students. In: *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, (pp. 283-290). Paris, France.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

רזניק, צ. וטבח מ., (2002). ***מתימחשב*** *: בארמון המתמטיקה – אלגברה לכיתה ז' בעזרת מחשב חלק ג.* רחובות: מכון ויצמן למדע.

חומרים

דפי פעילות לתלמיד (6 עמודים).

מחשב עם תוכנת *Excel*.

זמן משוער

שלושה שיעורים.

מבנה הפעילות

1. תבניות וסדרות (שאלות 1–3) – עבודה בקבוצות ודיון.
2. לוח של שברים (שאלות 4–12) – עבודה בקבוצות ודיון.
3. מספרים משולשים ועוד (שאלות 13–15) – עבודה בקבוצות ודיון.

מהלך הפעילות

1. תבניות וסדרות וייצוגן הגרפי (שאלות 3–1) – עבודה בקבוצות ודיון.

שאלות 3–1 מטפלות בסדרות חשבוניות. בדרך כלל כאשר עוסקים בסדרות חשבוניות מתחילים מסדרת המספרים, ויוצרים תבנית עבור המספר ה- n. בשלב מאוחר יותר בלימוד, יוצאים מתבנית, מציבים בה מספרים, ונוצרת סדרה חשבונית. הגישה פה היא הפוכה, כי הדגש הוא על חוש לתבניות. מקיימים דיון אחרי כל שאלה.

<u>נקודות אפשריות להתייחסות בדיון</u>

- דנים על החוקיות שהתגלתה (בשאלה 1).

שואלים את המורים כיצד מלאו את הטבלה, והאם היה צורך להציב את **כל** המספרים.

בכיתות הניסוי המורים התחילו להציב מספרים ואחרי שראו את החוקיות המשיכו למלא את הטבלה לפי החוקיות.

מתבוננים בטבלה המלאה, מבקשים לגלות בה חוקיות מסוגים שונים, מבקשים לבסס את החוקיות על התבניות. מתייחסים גם לתופעות ברורות מאליהן, כדי לקשור את המספרים לתבניות.

דוגמאות:

- בכל טור, המספרים בשורה השנייה גדולים ב- 1 מהמספרים בשורה הראשונה.
- בשורות השנייה והשלישית, רשומים אותם מספרים בהזזה של מקום אחד.
- בשורה הראשונה, כל המספרים מתחלקים ב- 5.
- בשורה הרביעית, כל המספרים מסתיימים באותה ספרה.
- הסדרות בכל שורה הן חשבוניות, כלומר ההפרש בין כל שני מספרים סמוכים בסדרה הוא קבוע.

מתייחסים לכך שכאשר n מייצג מספר שלם, $2n$ היא תבנית לייצוג המספרים הזוגיים, $5n$ היא תבנית לייצוג המספרים המתחלקים ב- 5, וכך הלאה.

מתייחסים לתופעות המשותפות לשלוש התבניות הראשונות, ולשורות המתאימות להן.

מתייחסים לתופעות המשותפות לזוגות התבניות $2n + 3$ לעומת $2n$ ו- $4n + 3$ לעומת $4n$ וכן $2n$ לעומת $4n$ ו- $2n + 3$ לעומת $4n + 3$, ולשורות המתאימות להן.

מבררים מדוע תוצאות ההצבה של מספרים שלמים בתבנית $10n + 3$ הם מספרים המסתיימים ב- 3, ומדוע בכל שורה של התבניות שבהן המקדם של n הוא 5, המספרים מסתיימים באותן שתי ספרות המתחלפות לסרוגין.

מתייחסים לכך שהמקדם של n בתבנית ממעלה ראשונה, קובע את גודל הדילוג הקבוע בסדרה (כאשר מציבים מספרים עוקבים), והמספר הקבוע בתבנית קובע רק לגבי המספר ההתחלתי בסדרה.

ניתן להרחיב את הפעילות ולהוסיף לטבלה גם תבניות היוצרות סדרות יורדות, כמו למשל $30 – 2n$. אפשר לדחות את העיסוק בסדרות יורדות לאחר השרטוט של סדרות במערכת צירים (שאלה 3).

מתייחסים לייצוג המספרים על ציר מספרים שבו המקדם של n קובע את הרווח בין מספרים סמוכים בסדרה, והאיבר החופשי "מזיז" את כל מספרי הסדרה. את תפקיד האיבר הקבוע המתקבל בהצבת 0 בתבנית, ניתן לדחות לדיון אחרי שאלה 3.

- דנים על דרכים להגיע לתבנית מסדרת מספרים בדילוגים קבועים (שאלה 2).

הדיון הקודם, מעודד גישה שבה, אם ברצוננו למצוא תבנית של סדרה בדילוגים שווים, קובעים תחילה את המקדם של n לפי גודל הדילוג. לאחר התבוננות בסדרה היסודית הנוצרת על-ידי הצבת מספרים עוקבים, "מתקנים" את התבנית על-ידי הוספה או הפחתה של מספר קבוע, לפי "התזוזה" של הסדרה הנתונה מהסדרה שנוצרה. מתייחסים לכך שגישה זו נפוצה במתמטיקה, ועיקרה יצירת בסיס על-ידי ראייה גלובלית, ואחריה תיקון פרטים.

גישה אחרת היא הגישה המסורתית של התייחסות לסדרה חשבונית. כדי למצוא איבר בסדרה, יש להוסיף לאיבר כלשהו (הקטן ממנו) את גודל הדילוג של הסדרה כפול במספר הדילוגים שנעשו בין שני האיברים, והנוסחה הסטנדרטית היא $a_n = a_1 + d(n-1)$. אפשר לבנות יחד עם המורים את הנוסחה באופן אינטואיטיבי, ולהשוות בין שתי הגישות. אין צורך בניסוח פורמלי של הנוסחה, ואפשר להסתפק בניסוח מילולי.

אם יש גישה למחשב, מבקשים מן המורים להכניס את המספרים לטבלות של Excel, בעזרת נוסחאות. כדאי להקדים ולהראות את שתי הגישות של תבניות במחשב:

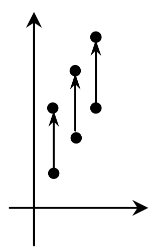
- נוסחאות נסיגה, שבהן המשתנה הוא האיבר הקודם בסדרה. ליצירת נוסחת נסיגה יש לקבוע תחילה את גודלו של המספר הראשון בסדרה. בניית הסדרה מתבצעת בטור אחד (או בשורה אחת).
- תבניות רגילות לפי משתנה (בסדרות – "תבניות לפי מקום"). אלה תבניות המשתמשות כמשתנה בטור מספרים נוסף המציין את מקומו של כל מספר בסדרה. מזכירים כי כאשר מדובר בסדרות, המספר להצבה קובע את המקום שבו יעמוד המספר בסדרה, ותוצאת ההצבה מציינת את גודלו של האיבר המתאים.

כלל נסיגה מבהיר את הרעיון של דילוג קבוע המתחיל ממספר כלשהו. תבנית לפי מקום, מבהירה את ההבדל בין מקום האיבר לערכו. העבודה במחשב, מבהירה את הקשרים בין הסדרות לתבניות.

- הייצוג הגרפי של סדרה (שאלה 3).

מתייחסים לכך שהנקודות המתאימות בגרף לתבנית ממעלה ראשונה נמצאות על ישר, ומבקשים לברר איך מתבטאים בגרף המספרים שבתבנית. כלומר, היכן "רואים" את הדילוג, ואיך מתבטא בגרף המספר הקבוע בתבנית.

אם מתייחסים לגישה של תבנית יסודית ו"תיקון", אין צורך להמשיך את הסדרה שמאלה (על-ידי הצבת 0), כי שרטוט באותה מערכת צירים, של הסדרה המתאימה לתבנית היסודית, ושל סדרת התבנית הנתונה בעלת מספר קבוע שונה מ- 0, מבהירה את רעיון ה"תיקון" (הוספת או גריעת מספר קבוע מכל מספר בסדרה).



קושרים את הרעיון של סדרה חשבונית לפונקציה קווית. מזכירים כי ניתן למצוא תבנית לפונקציה קווית על-ידי התבוננות בגרף ומציאת שיפוע ונקודה. במשוואה $y = ax + b$, a מייצג את הדילוג. אם מציבים 1 במקום x, ואת המספר הראשון בסדרה במקום y, ניתן לחשב את המספר הקבוע של התבנית (b). כדי לחשב את b אפשר גם לדלג בדילוג הקבוע, פעם אחת אחורה מן המספר הראשון בסדרה, ולהגיע לנקודת החיתוך של הישר עם ציר y.

שואלים: כיצד ייראו הגרפים של שלוש התבניות הראשונות בשאלה 1? מה ההבדל בינם לבין הגרפים ששרטטתם?

- דנים בעיצוב המטלה.

מתייחסים לכך שאם רוצים למצוא תכונות משותפות (למשל, לראות איזו השפעה יש למקדם של n על הסדרה), נותנים מספר תבניות בעלות אותו מקדם של n (ראו שאלה 1), ומספרים קבועים שונים. זהו אותו רעיון שנקרא במדע "בידוד משתנים".

מתייחסים לכך שכדאי לבחור דוגמאות שהן בעלות השלכות מגוונות לגבי תחומים שונים. במקרה הספציפי שלנו, היה צורך בבחירת תבניות היוצרות סדרות חשבוניות בהצבת מספרים עוקבים, ולצורך רעיון זה ניתן היה לבחור בכל תבנית לינארית. התבניות שנבחרו הן תבניות "שימושיות" מכמה בחינות (למשל, ליצירת מספרים זוגיים, מספרים אי-זוגיים, מספרים המתחלקים ב- 5 וכדומה).

2. לוח של שברים (שאלות 4–12) – עבודה בקבוצות ודיון.

לוח של שברים הנתון בשאלה 4 דומה לטבלה הנתונה בשאלה 2, אבל הוא שונה ממנה בכך שגם המספרים בכל טור יוצרים סדרות חשבוניות. לכן, גם באלכסונים יש סדרות חשבוניות. הבדל נוסף הוא מתן האפשרות להרחיב את הלוח באותה חוקיות לכל הכיוונים (שאלה 5). כתוצאה מכך, יש להתייחס גם למספרים שליליים. המטרה במטלה זו היא פיתוח תובנה מספרית ואלגברית, זיהוי חוקיות ותרגומה לתבניות, והכרה כי סדרות אינן חייבות להיות של מספרים שלמים בלבד.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון במבנה הלוח.

כדאי לערוך את הדיון לאחר שרוב המשתלמים סיימו לעבוד על שאלה 8. דנים בהבדלים בין הלוח הזה לטבלות בשאלות 1 ו- 2. מתייחסים לכך שיצירת סדרות חשבוניות הן בשורות והן בטורים, קובעת סדרות חשבוניות לכל הכיוונים (למשל, אלכסונים או מהלך סוס בשחמט השקול לישר בשיפוע 2).

מתייחסים לכך, שמתן מספר אחד במבנה של משבצות שנגזרו מהלוח (תרגילים 5 , 6 , ו- 9), קובע את שאר המספרים שלידו. כתוצאה מכך, אם במקום המספר הנתון נרשום משתנה, נוכל להביע את הקשר הזה בעזרת תבניות.

- הסבר מילולי לעומת הסבר אלגברי (דיון בשאלה 7).

מבקשים מן המשתלמים לספר על מופעי החוקיות שגילו. מבקשים שיסבירו את החוקיות שמצאו בעזרת החוקיות הבסיסית של הלוח (ההפרשים הקבועים בשורות ובטורים). מתייחסים להשוואה בין הסברים במילים לבין הסברים בעזרת תבניות. תלמידים רבים מעדיפים הסברים מילוליים, כי הם אינם מיודדים מספיק עם תבניות. את התופעה הזאת אפשר להבין גם לאור ההיסטוריה של המתמטיקה. בתחילת התפתחות האלגברה, בעיות ומשוואות, אשר כיום נפתרות בעזרת אלגברה, נפתרו בעזרת הפעלת שיקולים מילוליים. מתייחסים ליעילות שבייצוג האלגברי, שהוא קצר ותמציתי, ולעיתים ברור יותר מן הייצוג המילולי.

- דיון בשאלה 9.

בשאלה זו ההתייחסות היא אל הלוח המוצג, ללא המשכו לכל הכיוונים. רק למשבצת של e אין בת זוג במסגרת הנתונה של הלוח. בת הזוג של המשבצת של c נמצאת בשורה התחתונה. כיוון החיפוש של בנות הזוג ל- a ול- b שונה מן הכיוון של c, ולכן עלול לבלבל.

דנים באפשרות לעודד הכללה על-ידי שימוש בלוח מוסתר, שבו אי-אפשר לראות את המספרים ולהשתמש בהם. מבקשים מן המשתלמים לתת דוגמאות לפעילויות שבהם משתמשים בהסתרה, ומגיעים למסקנה כי בעצם כל תרגיל שיש בו משבצת ריקה ויש למלא בה מספר, הוא הסתרה. בכל משוואה שפותרים על-ידי הפעלת שיקולים ולא על-ידי "העברת אגפים" משתמשים בהסתרה.

מתייחסים לכך שיש דרכים רבות לפתרון, ופעמים רבות אחת מהן דומיננטית. למשל כדי להראות מספרים שווים בלוח, הדרך הדומיננטית תהיה בהתאם לדוגמה הגזורה הימנית בשאלה 9ה בעלת המשתנה a. יחד עם זאת, יש לעודד ולתת לגיטימציה להצעת דרכי פתרון מגוונות.

- דיון בשאלות 10–12.

שאלות 10 ו- 11 הפוכות זו לזו. בדיון מבקשים הסברים ונימוקים לטענות. יש דרכים רבות להגיע לתשובות, את חלקן הבאנו בתחילת הפעילות, בדיון על שאלה 1.

להלן דרכי פתרון אפשריות לשאלה 10

- אפשר להתייחס לסדרה שבטור הראשון (וכן בשורה הראשונה) כאל תוצאות הצבה של המספרים הטבעיים בתבנית כלשהי, למצוא את התבנית $\frac{1}{4}n$ בדומה לתרגיל 2, ולהציב בה את מקום המספר.
- אפשר להתבונן מחדש בחוקיות של הטור הראשון ולגלות שכל ארבע משבצות מופיע מספר טבעי (לפי הסדר), לכן במשבצת העשרים יופיע 5 ובמשבצת הבאה יופיע $5\frac{1}{4}$.
- אפשר לראות כי בין המשבצת הראשונה למשבצת ה- 21 יש 20 דילוגים שכל אחד מהם הוא דילוג של $\frac{1}{4}$. לכן ל- $\frac{1}{4}$ שמופיע במשבצת הראשונה יש להוסיף $20\cdot\frac{1}{4}$.

שאלה 11 היא שאלה הפוכה לשאלה 10. יש לשים לב שבשאלה זו לא התבקשנו למצוא את מקום המספר, אלא רק להחליט אם הוא שייך לסדרה. בדרך כלל, הנטייה היא למצוא את מקום המספר בעזרת פתרון משוואה, ובחינת סוג הפתרון. אם הפתרון הוא מספר טבעי מסיקים כי המספר הנתון אכן שייך לסדרה, ואם הפתרון שבר, מסיקים את המסקנה ההפוכה.

במקרה שלנו פשוט יותר להתבונן בחוקיות. למשל, 21 שייך לכל הסדרות שבטורים כי כל טור מכיל את כל המספרים הטבעיים.

בשאלה 12, הדרך הפשוטה ביותר היא להתבונן באלכסון הראשי שבכיוון ↘. כיוון כזה בדרך כלל פחות מטופל, וזו הזדמנות לדון בכך שכדאי להתבונן היטב לפני שמתחילים לפעול. אחרי שמוצאים מקום אחד שבו נמצא ריבוע של ארבע משבצות עם המספר $16\frac{1}{4}$, אפשר למצוא מקומות רבים כאלה. בעזרת המסקנות של שאלה 9א.

מעודדים את המשתלמים לתת הסברים מסוגים שונים לכל שאלה, בעזרת תבניות או בלעדיהן. עיסוק בחוקיות ופתרון שאלות בעזרתה, לאו דוקא בייצוג אלגברי, מפתחים תובנה מספרית, ומעודדים הכללות, ולכן מפתחים גם תובנה אלגברית.

- דיון בהתאמת הפעילות על לוח שברים לכיתת בית ספר יסודי הלומדת שברים.

מבררים עם המורים איזה חלק מהפעילות אפשר להביא לכיתה, ומבקשים הצעות לשינוי הפעילות, כדי שתתאים לכיתה.

3. מספרים משולשים ועוד (שאלות 13–15) – עבודה בקבוצות ודיון

סדרת המספרים המשולשים היא סדרה מסוג אחר, כלומר אינה סדרה חשבונית כמו כל הסדרות שעסקנו בהן אבל יש לה קשר הדוק לסדרה חשבונית – היא סדרת הסכומים החלקיים של המספרים הטבעיים – וזהו מקרה פרטי של סדרת הסכומים החלקיים של סדרת מספרים בדילוגים קבועים. חשוב לציין כי סדרת הסכומים בעצמה איננה חשבונית ואיננה הנדסית. בפעילות יוצאים מייצוג ויזואלי, ומגיעים בעזרתו לתבנית המייצגת את המספר המשולש ה- n.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בהסברים שונים למציאת סכום סופי של מספרים טבעיים עוקבים, החל מ- 1 (שאלה 13ב).

אפשר להציג זה מול זה שלושה הסברים למספר המשולש השמיני (סכום המספרים הטבעיים מ- 1 ועד 8).

א. ההסבר הויזואלי המופיע בדף.

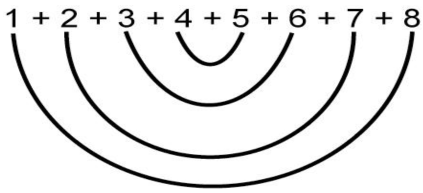
ב. ההסבר המספרי הבא:

לפניכם סכום המספרים הטבעיים מ- 1 ועד 8 רשום פעמיים. מההתחלה לסוף, ומן הסוף להתחלה.

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \\ \underline{8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} \end{array}$$

- חברו במאונך כל זוג מספרים.
- הסבירו מדוע הסכום שווה בכל זוג.
- מצאו את סכום המספרים הטבעיים מ- 1 ועד 8.

ג. שילוב של הסבר ויזואלי ומספרי:

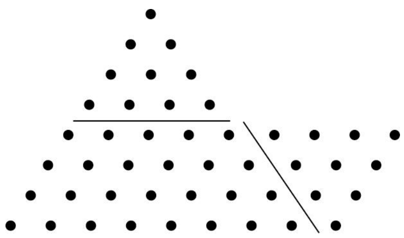


- חברו כל זוג מספרים המחוברים בקשת.
- הסבירו מדוע הסכום שווה בכל זוג.
- מצאו בעזרת הסבר זה את סכום המספרים מ- 1 עד 8.

אחרי הצגת ההסברים שואלים:

- איזה מההסברים ב או ג מתאים להסבר הויזואלי של שאלה 13?
- נסו להתאים הסבר ויזואלי להסבר שלא בחרתם.

הסבר ב משתמש בסדרה פעמיים (פעם בכל כיוון), ולכן הוא מתאים להסבר הויזואלי המובא בשאלה 13ב, שבו מעתיקים את המשולש והופכים אותו. גם לחיבור בטורים (הנותן תוצאה קבועה) בהסבר ב, יש ייצוג ויזואלי.



כדי להתאים הסבר ויזואלי להסבר ג, יש לחתוך את ראש המשולש בקטע האמצעים שלו, ולסובב אותו לצד המשולש. מתקבלת מקבילית שמספר הנקודות שבבסיסה הוא הסכום 8 + 1 (המספר הראשון והאחרון בסדרה), ומספר השורות בה הוא חצי ממספר המספרים בסדרה.

מבררים איזה מההסברים עדיף כאשר מחשבים מספר משולש אי-זוגי.

דנים ברעיון של הסבר ויזואלי, יתרונותיו וחסרונותיו.

יתרון בולט של הייצוג הויזואלי הוא היכולת שלו להסביר ללא מילים, להכליל בעזרתו, ולתרגם אותו לייצוג אלגברי. חסרונו הבולט של הסבר ויזואלי הוא באי-יכולתו להסביר תופעות במספרים שליליים, ובהסתמכותו לעיתים קרובות על דוגמה אחת (מבלי לפגוע בכל זאת בכלליותו).

- דיון בייצוג האלגברי של חוקיות סכום הטבעיים (שאלה 14).

שני ההסברים העיקריים לחישוב המספר המשולש השמיני, יובילו להכללה לתבנית. התבנית המתאימה להסבר הויזואלי הראשון היא $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ (חצי ממספר הנקודות במלבן) והתבנית המתאימה להסבר עם הקשתות או להסבר הויזואלי שבדיון הקודם היא $(n+1)\cdot\frac{n}{2}$ (המכפלה של הסכום הקבוע של כל זוג במספר הזוגות).

מבקשים לתת נימוקים שונים לכך שהתבניות תואמות.

את סכום המספרים הזוגיים מ- 2 ועד 200 (שאלה 14ג) אפשר למצוא בדרכים שונות – למשל, אפשר למצוא את סכום המספרים מ-1 ועד 100 לפי הנוסחה שמצאנו, ולכפול ב- 2 (לפי חוק הפילוג).

האתגר נועד למשתלמים זריזים, במטרה להעסיק אותם ביישום וחיבור כל הנלמד בפעילות זו. יש מספר רב של דרכים לחישוב סכום המספרים בלוח. להלן מספר דוגמאות לא סטנדרטיות:

- מחברים את המספרים בשורה הראשונה בדרך כלשהי. כופלים את הסכום ב- 6 (מספר השורות) ומוסיפים את ההפרשים בין המספרים שבשורה הראשונה, ואת אלה שבשורות האחרות. אחת הדרכים לסיכום ההפרשים האלה היא: $(1+2+3+4+5)\cdot 7\cdot \frac{1}{4}$

- אפשר לפעול באותה דרך ביחס לטורים.

- אפשר לפעול בדרך דומה אבל לחבר את המספרים בשורה השלישית, לכפול את הסכום ב- 6 ולחבר רק 7 פעמים $\frac{3}{4}$, עבור ההפרשים בין המספרים בשורה השלישית, ואלה שבשורה השישית. שאר ההפרשים בין השורה השלישית והשורות האחרות מתקזזים (שורה 1 עם שורה 5 ושורה 2 עם שורה 4).

- מתבוננים ורואים כי שלוש השורות הראשונות בלוח, פרט לטור הראשון, שוות לשלוש השורות האחרונות פרט לטור האחרון. זה נובע מהמסקנה של שאלה 9. אפשר לחשב סכום של המחצית, לכפול ב- 2, ולחבר את שני חצאי הטורים.