מערכות מספרים רציונליים ואי-רציונליים

ד״ר איליה סיניצקי - מכללת גורדון לחינוך

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס): מספרים רציונליים ואי-רציונליים.

זמן משוער ללימוד הנושא: 4 ש״ל.

רשימת מושגים מתמטיים: מספרים אי-רציונליים, מספרים ממשיים, ציר המספרים והרציפות, מספר עשרוני אינסופי לא מחזורי, שברים משולבים (שברי שרשרת).

קישור לנושאים נוספים:
סגירות קבוצת המספרים לגבי פעולה, צפיפות , הצגות של מספר רציונלי , הוכחה דרך סתירה, הכלה בין קבוצות מספרים (טבעיים, שלמים, רציונלים, אי-רציונליים, ממשיים), סדרת פיבונצ׳י.

חומרי עזר: דף מידע למשתלמים, 2 דפי פעילות למשתלמים, 3 שקפים. הדפים למשתלמים והשקפים נמצאים בנספחים שבסוף היחידה.

הרציונל: הנושא מסכם את לימוד המודולה המתקדמת ״**שברים פשוטים ועשרוניים**״ ונותן סקיצה של ראייה תיאורטית של הנושא ״המעבר מקבוצת המספרים הרציונליים לקבוצת המספרים הממשיים״ (״ישר המספרים״). בשלב זה, המתמקצעים אמורים לשלוט היטב בתכונות הבסיסיות של מספרים רציונליים, בהצגות שונות, ובאלגוריתמים חישוביים בקבוצה זאת. יחד עם זאת, למרות היכרות עם מספרים אי-רציונליים בודדים, לרוב המתמקצעים אין הבנה ברורה של המושג ״מספר אי-רציונלי״ ושל יחסים בין קבוצות שונות של המספרים – מהטבעיים עד לממשיים. במסגרת היחידה, אנחנו מנסים לטפל בהבנת המושג ״מספר אי-רציונלי״ מבלי לטבוע עמוק בדיון על אינסופיות והסוגייה של מושג הגבול ברמה פורמלית.

דפי הנחיות למרצה

מהלך המפגש:

1. מערכת מספרים רציונליים – ומה הלאה?

א. חזרה: המבנה של קבוצת המספרים הרציונלים. בפתיחה כדאי להזכיר את יחסי ההכלה בין קבוצות המספרים הנלמדים בבית הספר היסודי: קבוצת המספרים הטבעיים, קבוצת המספרים השלמים וקבוצת המספרים הרציונליים. שוב, חשוב מאוד להדגיש כי קבוצת המספרים הרציונליים מכילה את המספרים הטבעיים ואת המספרים השלמים, ומצד שני, מספר רציונלי הוא מושג מתמטי שמכיל גם את המושגים הדידקטיים שאנחנו משתמשים בהוראה בבית הספר (שבר פשוט אמיתי ומדומה, שבר עשרוני). החשוב כאן, כי כל מספר רציונלי הוא מנה של שני מספרים שלמים. להמשך כדאי לנסח זאת גם בצורה שלילית: מספר שלא ניתן להצגה כמנה של שני מספרים שלמים – הוא אינו מספר רציונלי. שאלות חזרה רלוונטיות מרוכזות ב**דף למשתלמים מס' 1**.

ב. תכונות סגירות וצפיפות של קבוצת המספרים הרציונליים מסוכמות כמבוא לנושא ב**שקף מס' 1**בעבודה על תוכן השקף, רצוי לבקש את ההשתתפות הפעילה של המתמקצעים במעבר מהנוסח הקצר המסכם למשמעותו המתמטית.

לפני הצגת הצורך בהרחבה של קבוצת המספרים הרציונליים, חשוב להפגיש את המשתלמים עם הדילמה הידועה מתולדות המתמטיקה: בניגוד לקבוצות המספרים הצרות יותר, קבוצת המספרים הרציונליים מאפשרת ביצוע של כל אחת מארבע פעולות החשבון **בתוכה**. ובשפה המתמטית: קבוצה זאת סגורה לגבי הפעולות חיבור, חיסור, כפל וחילוק (ניתן לבצע פעולות אלה עם איברי הקבוצה, פרט לחילוק ב- 0, והתוצאה שייכת לאותה הקבוצה). זאת אומרת, שהשיקולים שגרמו להרחבת קבוצות המספרים המוכלות בקבוצת המספרים הרציונליים אינם תקפים למצב הנוכחי.

בנוסף, קבוצת המספרים הרציונליים צפופה על ציר המספרים: בין כל שני מספרים רציונליים תמיד קיים מספר רציונלי נוסף – חשוב לציין שעובדה זו גוררת מיד את הקיום של אינסוף מספרים רציונליים בין שני המספרים הנתונים. (שתי העובדות הנ"ל מעוררות אצל התלמידים את השאלות: מאיפה לוקחים עוד מספרים? ואיפה המקום שלהם על ישר המספרים?) חשוב כאן לציין, כי צפיפות של קבוצת מספרים לא מבטיחה את רציפותה – וזאת, בהחלט, נקודה שלא קלה להבנה ברמה אינטואיטיבית, כאשר הסיפור מתקיים בתחום די מופשט של קבוצות אינסופיות.

2. הצמחת המספרים האי-רציונליים

א. מדידה - בנוסף לגישה אריתמטית להגדרת מספרים רציונליים (הרחבת קבוצת המספרים השלמים לצורך ביצוע פעולת חילוק בתוך הקבוצה), ניתן להגיע לאותו המבנה משיקולים גיאומטריים, הקשורים במדידת קטעים (**שקף מס' 2**).

המקרה הפשוט ביותר בהשוואת אורכים של שני קטעים a ו- b, הוא שקטע b מכיל את קטע a בדיוק r פעמים (למשל, בקטע שאורכו 3 ס"מ נכנסים בדיוק 3 קטעים של סנטימטר אחד). ייתכנו מצבים אחרים (למשל, לקטעים שאורכם 2 ס"מ ו- 5 ס"מ), אך ניתן תמיד לחלק קטע בעל אורך a ל- n חלקים שווים, ומספר שלם m של חלקים אלה (עם אורך של $\frac{a}{n}$ לכל אחד מהם) נכנס בתוך קטע בעל אורך b.

בכתיבה מתמטית ניתן לבטא את המצב כשוויון: $b = \frac{a}{n}m = \frac{m}{n}a$.

למשל, אחרי חלוקת קטע של 5 ס"מ ל- 10 חלקים שווים, בתוך קטע של 2 ס"מ נכנסים בדיוק 4 קטעים של $\frac{5}{10}$ ס"מ. על מצב זה אומרים, כי לשני הקטעים a, b יש מידה משותפת: הקטע $\frac{a}{n}$ נכנס בתוך הקטע a בדיוק n פעמים, ובתוך קטע b בדיוק m פעמים.

על ציר המספרים, לכל קטע שתחילתו היא בנקודת האפס, יש מידה משותפת עם קטע היחידה כאשר סוף הקטע הוא בנקודה מסוג $\frac{m}{n}$. במילים אחרות, הוא מייצג את המספר הרציונלי $\frac{m}{n}$. ברור כי לצרכים מעשיים של מדידה, אורכים רציונליים הם מספיקים. יותר מכך, צפיפות המספרים הרציונליים גורמת להרגשה שמספרים אחרים כלל לא קיימים.

כבר המתמטיקאים מהאסכולה הפיתגורית ביוון העתיקה גילו את המספרים האי-רציונליים. הם בעצם ניסו למצוא מידה משותפת לקטעים מסוימים: למדוד ביחידות אורך של צלע המחומש המשוכלל את אלכסונו או לעשות אותו דבר לריבוע. להפתעתם הגדולה, הם הצליחו להוכיח את הדבר הבלתי-צפוי: אין מידה משותפת בשני מקרים אלה. גילוי עובדה זאת נוסח בצורה גיאומטרית ("יש קטעים שלא מדידים הדדית") וגם בצורה אריתמטית: "יש מספרים אי-רציונליים".

ב. **השם "המוזר"** - לפעמים טוענים שמקור השם המספרים הרציונלים בא ממשמעות המילה הלועזית rational – בעל שכל, הגיוני. ומכך יוצא שמספרים אי-רציונליים או שהם - "לא הגיוניים", או שהם "לא נתונים להבנה על-ידי השכל הישר". אך השם שקיבלו מספרים אלה הוא בדיוק השם המתמטי המתאר ratio = יחס, פרופורציה. כלומר, מספר רציונלי הוא מספר שניתן להציג כיחס של שני מספרים שלמים, ומספר אי-רציונלי הוא מספר **שלא ניתן להציג כיחס של שני מספרים שלמים** (או, בגישה גיאומטרית למצוא מידה פרופורציונלית בין קטע היחידה וקטע שאורכו הוא אי-רציונלי).

ג. קיום המספרים האי-רציונליים

- הדוגמה הקלאסית של מספר אי-רציונלי הוא המספר $\sqrt{2}$. הוכחת האי-רציונליות שלו מוצגת **בשקף מס' 3**, אך הצגת ההוכחה למתמקצעים לא הכרחית. חשוב אבל להדגיש את חשיבותה: ניתן להוכיח שלא כל מספר אפשר להציג כמנה של שני מספרים שלמים, וכל אחד מהמספרים האלה הוא מספר אי-רציונלי.

- בכל מקרה, להבנת שיטת ההוכחה (הוכחה דרך סתירה) ולצורך תרגול עבודה עם ביטוים אלגבריים, מומלץ לבקש מכל המתמקצעים להוכיח את האי-רציונליות של מספר מסוים **על-סמך** האי-רציונליות הידועה של מספר $\sqrt{2}$. למשל, הסכום $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי. **הוכחה**: נניח, שמספר זה הוא רציונלי, ונסמן אותו $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$. (מספר זה חייב להיות חיובי, לכן מתקיים $r \neq 0$.) מכך נובע, כי $\sqrt{3}=r-\sqrt{2}>0$. נעלה בריבוע: $3=r^2-2r\sqrt{2}+2$, נבודד את $\sqrt{2}$ ונקבל $\sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}$. **בגלל סגירות קבוצת המספרים הרציונליים** (מכנה השבר שונה מ- 0) באגף הימני עומד מספר רציונלי, ואז הגענו לסתירה, כי ידוע ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

- בגלל חוסר ניסיון בעבודה עם מספרים אי-רציונליים, המתמקצעים מתקשים, בדרך כלל, להחליט על רציונליות או אי-רציונליות של מספר מסוים. למשל, כל ביטוי שמכיל שורש הם מכנים מספר אי-רציונלי. רצוי להראות שזה לא תמיד נכון בעזרת דוגמאות פשוטות, כמו: $\sqrt{169}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$.
- כדאי להזכיר גם את האי-רציונליות של המספר π, כאן גם המקום לציין שהוכחת אי-רציונליות של מספר, בדרך כלל אינה פשוטה.

3. תכונות והצגה של המספרים האי-רציונליים

א. מספר תכונות כלליות של קבוצת המספרים האי-רציונליים - ללא ספק, במסגרת ההתמקצעות אין מקום להצגת תיאוריה של מספרים ממשיים במליאה. זה דורש דיון עמוק בנושא הגבול, **תכונות הסדרות העולות ועוד**. אך רצוי להפגיש את המתמקצעים עם מספר תכונות פשוטות יחסית של מספרים אי-רציונליים. מספר הערות בהקשר זה:

- כדאי להשוות בין תכונות של קבוצת המספרים הרציונליים **(שקף מס' 1)** וקבוצת המספרים האי-רציונליים.
- אפשר לדון על הסגירות של קבוצת המספרים האי-רציונליים לגבי כל אחת מפעולות החשבון. מתמקצעים מסוגלים למצוא את הדוגמאות המתאימות המצביעות על האי-סגירות של הקבוצה. הפרש של שני מספרים אי-רציונליים זהים שווה ל- 0, מנתם שווה ל- 1, כפל של שני מספרים אי-רציונליים $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ נותן מספר רציונלי וכדומה.
- קבוצת המספרים האי-רציונליים היא קבוצה אינסופית הצפופה על ציר המספרים: בין כל שני מספרים אי-רציונליים קיים מספר אי-רציונלי נוסף – וגם מספר רציונלי. הוכחה לעובדה זאת אינה קשה, אך דורשת שימוש בטכניקה אלגברית וכמה משפטי עזר, ולא כדאי להציג אותה. אך חשוב להדגיש, כי מספרים אי-רציונליים אינם מקרה נדיר במיוחד, וכמותם היא אינסופית.
- אם לוח הזמנים ורמת הכיתה מאפשרים המשך הדיון על התכונות של קבוצת המספרים האי-רציונליים, כדאי להזכיר כי למרות הדוגמאות הידועות כבר מיוון העתיקה, מתמטיקאים הגיעו להבנה עמוקה של המושג "מספר אי-רציונלי" רק במאה ה- 19, עם פיתוח התיאוריה על עוצמות של קבוצות אינסופיות. לקבוצת המספרים האי-רציונליים יש תפקיד מיוחד בבנייה זאת, כי עוצמתה (continuum) היא עוצמה הבאה אחרי עוצמת קבוצות בנות מנייה (כולל המספרים רציונליים) בסולם העוצמות של קבוצות אינסופיות. המשך הסיפור נוגע בפירוק הקבוצה של המספרים האי-רציונליים למספרים אלגבריים (שהם פתרונות המשוואות עם מקדמים רציונליים) ויתר המספרים - המספרים הטרנסצנדנטיים.
- ככלל, לא קל להוכיח את האי-רציונליות של מספר מסוים, כי צריך להוכיח ש**לא ניתן** להציגו בצורת מנה של שני שלמים. לגבי המספר $\sqrt{2}$, ההוכחה במקרה זה היא די פשוטה וניתנת להכללה לגבי כל שורש ריבועי של מספר ראשוני. לגבי המספרים האי-רציונלים האחרים ההוכחה בדרך כלל אינה פשוטה, לדוגמה, רק במאה ה- 19 הוכח כי המספר π הוא מספר אי-רציונלי.

ב. השלמת ציר המספרים - איחוד של קבוצת המספרים הרציונליים Q עם קבוצת המספרים האי-רציונליים נותן קבוצת מספרים חדשה – קבוצת המספרים הממשיים R. כדאי לחזור לדיאגרמת

ההכלה של קבוצות המספרים ($N \subset Z \subset Q \subset R$) ולהדגיש שכל המספרים שדובר עליהם במסגרת הקורס הם מספרים ממשיים. המשמעות הגיאומטרית של עובדה זאת היא הרציפות של המספרים הממשיים על ציר המספרים. מדויק יותר: לכל נקודה על ציר המספרים מתאים מספר ממשי יחיד (רציונלי או אי-רציונלי) ולהפך, לכל מספר ממשי יש מקום חד-משמעי על הציר.

ג. הצגה עשרונית של מספר אי-רציונלי

הסברים די מופשטים ומספר מועט של דוגמאות המוכרות למשתלמים רק במידה מועטה מקרבים אותם להבנת המושג "מספר אי-רציונלי". כדי לא להשאיר אותם עם שתיים שלוש דוגמאות ($\sqrt{2}, \pi, \sqrt{3}$) מדוקלמות במקרה הצורך ללא הבנה אמיתית, הצגה של מספרים אי-רציונליים כמספרים עשרוניים יכולה לעזור להם בהמחשת המספרים האי-רציונליים.

נסתפק בשלוש הדוגמאות לפעילויות עם המתמקצעים שמוצגות **בדף למשתלמים מס' 2**. בדיון על הדף:

- חשוב להדגיש כי אפילו קיום ההצגה העשרונית של קבוצות ספרות החוזרות בשלב מסוים אינו מצביע על מחזוריות ההצגה. הדוגמה הטובה לכך היא ההצגה של המספר $e \approx 2.718281828459$.
- כדאי לרשום בצורה מפורטת את שרשרות הקירובים למספרים אי-רציונליים, כמו $1.4 < 1.41 < 1.414 < 1.4142 < 1.41421 < 1.414213 < 1.4142135 < 1.41421356 < \sqrt{2}$.
- רצוי גם להראות את המקרים של שוויון בין קירובים צמודים, כמו $2 < 2.2 < 2.23 < 2.236 \le 2.2360 < 2.23606 < \sqrt{5}$.
- מצד שני, כדאי להזכיר כי הוספת יחידה אחת לספרה האחרונה של קירוב חסר הופכת את הקירוב לקירוב מעודף (כמו $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$).

ד. הצגות אחרות של מספרים ממשיים: קיימת הצגה מעניינת נוספת של מספרים ממשיים וזאת הצגת המספר על-ידי שברים משולבים (שברי שרשרת). הצורה הכללית של שבר זה היא:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

מבלי להיכנס לתיאוריה של הנושא, אפשר להציג כמה מספרים רציונליים בתור דוגמה ולבקש מהמתמקצעים דוגמאות נוספות.

למשל, $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = \cfrac{1}{3/2} = \cfrac{2}{3}$, $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4/3}} = \cfrac{1}{3+3/4} = \cfrac{1}{15/4} = \cfrac{4}{15}$ וכדומה.

תרגול זה שוב מזכיר את נושא המספר ההופכי למספר רציונלי. אך בהקשר לנושא של המספרים האי-רציונליים, חשוב, כי כל מספר רציונלי ניתן להציג כשבר שרשרת **סופי**.

ננסה לקבל הצגה בצורת שבר השרשרת למספר האי-רציונלי $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{?}=1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

אם נציג בשבר האחרון את הפיתוח של $\sqrt{2}$ שכבר קיבלנו, נגיע ל-

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}=\ldots$$

ונקבל הצגה של מספר אי-רציונלי כשבר שרשרת **אינסופי**. (במקרה זה הוא גם מחזורי, אך זה לא תמיד נכון כלפי מספר אי-רציונלי).

באופן כללי, **כל שבר שרשרת אינסופי מייצג מספר אי-רציונלי מסוים**. כך, למשל, למספר המאפיין את סדרת פיבונצ׳י $\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ מתקיים השוויון $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$, ובכך ניתן לפתח את ההצגה באמצעות העתקה ב- WORD :

$$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}=\ldots$$

(מסמנים את הסימן φ האחרון בפיתוח ומציבים במקומו את כל השרשרת שכבר פותחה).

נספחים

דף למשתלמים

תוכן המפגש

א. חזרה: תכונות המספרים הרציונליים

ב. המספרים הרציונליים כקטעים בעלי מידה משותפת

ג. קיום המספרים האי-רציונליים: האי-רציונליות של $\sqrt{2}$

ד. תכונות של המספרים האי-רציונליים, מערכת המספרים הממשיים

ה. מספר אי-רציונלי כמספר עשרוני אינסופי לא מחזורי

ו. קירובים של מספרים אי-רציונליים

ז. העשרה: שברי שרשרת ומיון מספרים ממשיים

רשימת מושגים מתמטיים:

מספר אי-רציונלי,

מספרים ממשיים,

ציר המספרים ורציפות,

מספר עשרוני אינסופי לא מחזורי,

שברים משולבים (שברי שרשרת).

קישור לנושאים נוספים:

סגירות קבוצת המספרים לגבי פעולה,

צפיפות,

הצגות של מספר רציונלי,

הוכחה דרך סתירה,

הכלה בין קבוצות מספרים (טבעיים, שלמים, רציונלים, אי-רציונלים, ממשיים) סדרת פיבונצ׳י.

דף למשתלמים מס׳ 1

חזרה: המבנה של קבוצת המספרים הרציונליים

א. כיצד ניתן לסמן את יחס ההכלה בין קבוצות המספרים הטבעיים, המספרים השלמים והמספרים הרציונליים?

ב. האם כל מספר טבעי הוא גם מספר רציונלי?
מדוע? כיצד אפשר להמחיש זאת?

ג. האם המספר 0 הוא מספר רציונלי? הסבירו מדוע.
האם כל מספר שלם הוא מספר רציונלי? הסבירו מדוע.

ד. האם קיימים מספרים רציונליים שאינם שלמים? הסבירו מדוע.

ה. מהן ההצגות המשותפות לכל מספר רציונלי?

תשובה:

- *כל מספר רציונלי ניתן להציג כמנה* ____________________
- *כל מספר רציונלי ניתן להציג כמספר עשרוני* ____________________ ____________________.

דף למשתלמים מס׳ 2

מספרים אי-רציונליים בכתיבה עשרונית

תזכורת: כל מספר רציונלי ניתן להציג בצורה עשרונית כמספר עשרוני סופי או אינסופי מחזורי.

1. בחרו במספר אי-רציונלי שידוע לכם, ובדקו מהי הצגתו על צג המחשבון.

א. האם יכול להיות כי ההצגה העשרונית של המספר הנבחר תהיה סופית? מדוע?

ב. האם המספר האי-רציונלי הנבחר שווה **בדיוק** למספר שרואים על הצג? למה?

ג. כיצד אפשר לרשום את היחס (<, >,=) בין המספר הנתון והמספר העשרוני הסופי שהוצג?

2. בנו מספר עשרוני באמצעות הטלת קוביית משחק לפי ההנחיות הבאות:

- ספרת היחידות של המספר שווה ל- 0;
- הטילו את הקובייה, ואת התוצאה רשמו במקום של ספרת העשיריות;
- כל אחת מהספרות הבאות תמולא בהתאם לתוצאת ההטלה הבאה.

א. מה ניתן לומר על היחס (<, >,=) בין גודלי המספרים המתקבלים אחרי כל הטלה?

פוטנציאלית, ניתן להמשיך את התהליך עד אינסוף, ולהרכיב מספר עם אינסוף ספרות עשרוניות. נסמן את המספר הזה A.

ב. מהו הקשר בין המספר A וסדרת המספרים שהרכבתם אחרי כל הטלה?

ג. האם יש חוקיות מסוימת בספרות של המספר A?

האם ניתן להבטיח שאותה סדרת ספרות בהצגתו העשרונית של A תחזור על עצמה כל הזמן?

מסקנה: המספר A הוצג כמספר עשרוני אינסופי ______________(מחזורי/ לא מחזורי).

3. התבוננו במספר ... 0.123456789101112 שבו אחרי הנקודה העשרונית רשומות ברצף ספרות של מספרים טבעיים עוקבים, האם שבר זה יכול להיות מחזורי? למה?

מסקנה: כל מספר אי-רציונלי ____________________________________

______________________________.

דף למשתלמים מס' 2 – הערות ופתרונות

מספרים אי-רציונליים בכתיבה עשרונית

.1

א. לא. כאשר ההצגה העשרונית של המספר היא סופית עם N ספרות אחרי הנקודה העשרונית, אפשר לרשום את המספר כמנה של שני מספרים שלמים כאשר המחלק שווה ל- 10^N והוא מספר רציונלי.

ב. ו- ג. למשל, $\sqrt{3} \approx 1.732050808$. חשוב כי שני מספרים אלה **אינם שווים.** ההצגה הסופית מהווה קירוב (חסר) למספר האי-רציונלי הנתון. בהצגה עשרונית קיימות ספרות נוספות, ובהצגה הסופית במקומות המתאימים עומדות ספרות 0. זאת אומרת, ניתן גם לרשום: $\sqrt{3} > 1.732050808$.

.2

א. כל מספר הבא בסדרה גדול מהקודם לו ("לא קטן", לו על הקובייה היה מופיע גם 0). במילים אחרות, סדרת המספרים העשרוניים האלה היא סדרה עולה.

ב. - המספר A גדול מכל אחד מאיברי הסדרה;

- כל איבר הבא בסדרה נותן קירוב ל- A טוב יותר מהאיברים הקודמים;
- באמצעות קירובים אלה ניתן להגיע קרוב עד כמה שרוצים למספר A.

הערה: את האמור בסעיפים א, ב ניתן לבצע אחרת: זאת סדרה עולה שמוגבלת מלמעלה במספר A, ומספר זה הוא **הגבול** של הסדרה.

ג. המספר A הוצג כמספר עשרוני אינסופי **לא מחזורי**.

.3

המספר ... 0.123456789101112 לא יכול להיות מחזורי. הסבר: נניח שהמספר הוא מחזורי ובמחזורו יש k ספרות. אך בין ספרות המספר יש סדרה של k ספרות אפס (כי המספר מופיע ברשימת הספרות מאחר וכל המספרים הטבעיים ממשיכים בסידרה אחרי הנקודה העשרונית לכן מופיע גם המספר 10^k שהוא בעצם הספרה 1 ו- k ספרות אפס אחריה). נובע מכך שהמחזור מורכב רק מספרות 0, חוזר על עצמו כל הזמן, והמספר העשרוני יוצא סופי.

מסקנה: כל מספר אי-רציונלי הוא מספר עשרוני אינסופי לא מחזורי!

שקף מס' 1

חזרה: תכונות של קבוצת המספרים הרציונליים

א. כל מספר רציונלי ניתן להציג בצורה חד-משמעית **כשבר פשוט מצומצם** וגם כמספר **עשרוני סופי או אינסופי מחזורי**.

ב. קבוצת המספרים הרציונליים צפופה על ציר המספרים.

משמעות הדבר: **בין כל שני מספרים** רציונליים שונים תמיד קיימים **אינסוף מספרים רציונליים**.

ג. קבוצת המספרים הרציונליים סגורה לגבי כל אחת מארבע פעולות החשבון.

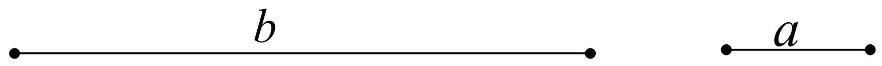
משמעות הדבר: **סכום, הפרש, מכפלה ומנה** (כאשר המחלק שונה מ- 0) של שני מספרים רציונליים הוא **מספר רציונלי**.

מסקנה: אי-אפשר להרחיב את קבוצת המספרים הרציונליים באמצעות פעולות חשבון.

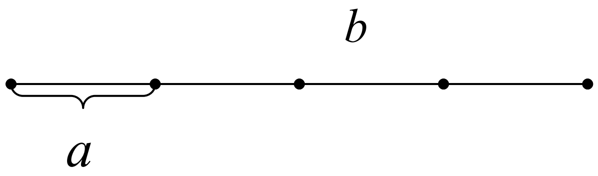
שקף מס׳ 2

מידה משותפת של קטעים

נתונים שני קטעים



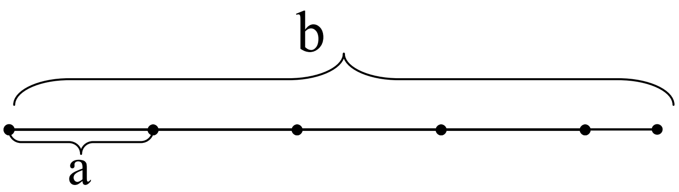
מקרה א:



קטע a נכנס בתוך קטע b בדיוק r פעמים.

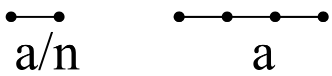
$$b = ra$$

מקרה ב:



קטע b לא מכיל מספר שלם של קטעי a.

נחלק את קטע a ל- n חלקים קטנים יותר:



קטע b מכיל מספר שלם של חלקים קטנים a/n

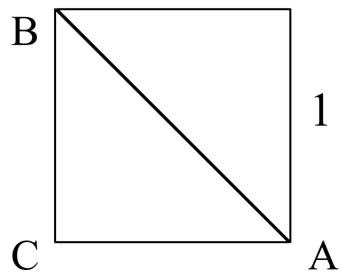
$$b = \frac{a}{n}m = \frac{m}{n}a$$

מקרה ג: לשני קטעים אין מידה משותפת. הייתכן?

שקף מס' 3

צלע ריבוע היחידה ואלכסונו

אי-רציונליות של המספר $\sqrt{2}$



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$AB = \sqrt{2}$$

ניח, כי $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי. הצגתו <u>כשבר מצומצם</u> היא:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2},\ p^2 = 2q^2$$

אם כך, <u>p הוא זוגי</u>, $p = 2k$, אז $p^2 = 4k^2$

$$4k^2 = 2q^2,\ 2k^2 = q^2$$

גם <u>q הוא מספר זוגי</u>.

את השבר p/q ניתן לצמצם – ***סתירה להנחה***.