

סדנה להכרת היבטים שונים של השבר דרך מודל "הרצועה"

ד"ר דניאלה לוזון

אוניברסיטת בן גוריון בנגב - המרכז לחינוך מתמטי מדעי וטכנולוגי, פרויקט לקידום החינוך
המתמטי - קידומטיקה

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס):

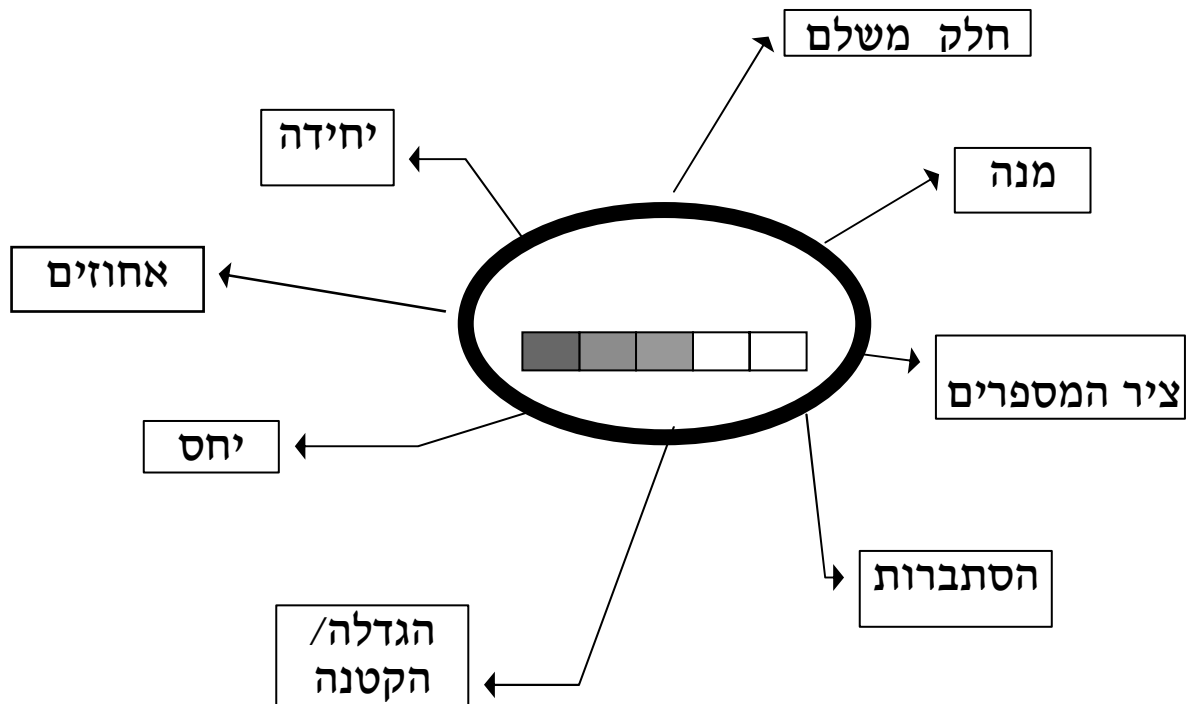
משמעות השבר הפשוט - חלק של שלם, חלק של כמות (קבוצה), מנת חילוק, נקודה על ישר
המספרים, אופרטור.

שקילות, סדר וצפיפות - שקילות שברים, השוואת שברים.

רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות – המושגים מופיעים בשקף מס' 1:

שקף מס' 1

מודל אחד: היבטים שונים של השבר



התמקצעות מורי המתמטיקה בבתי"ס היסודיים: שברים פשוטים ומס' עשרוניים - מודולה מתקדמת טיוטה

הרחבה לנושאים נוספים: גיאומטריה - משפט תלס (Thales), אחוזים, יחס והסתברות.

זמן משוער לפעילות: 4-5 ש"ל.

מטרות המפגש:

- **מטרה מתמטית:** הכרת ההיבטים השונים של השבר והקשר ביניהם.

- **מטרות דידקטיות:**

1. הבנת המושג **דמות מנטלית** דרך יצירת דמות מנטלית מסוימת.
2. הכרת המושג "מודל – המחשה" ליצירת דמות מנטלית: המקל או מודל הרצועה מבוססים על אורך בלבד. מודל זה מתאים להוראת השברים ועוזר להבנת הקשר בין כל ההיבטים השונים של השבר.
3. ייצוג היבטים שונים של השבר.
4. קישור בין ההיבטים השונים של השבר דרך אמצעי המחשה יחיד.

הגדרות ביחידה זו:

הפעלת **דמות מנטלית** היא "הפעלת פנימית" שבאה לייצג מצבים שונים בפועל או בדמיון. **אמצעי המחשה:** כלי ייצוג מוחשי של מושג או פעולה. (התיאוריה של אמצעי המחשה היא נושא לסדנה בפני עצמה, אבל זו הזדמנות לדון בנושא).

מודל: מבנה תיאורטי המבוסס על "הקבלה בין הפעלת דמויות מנטליות ופעילות מתמטית. המודל מתאר בצורה פחות או יותר מושלמת מושגים וקשרים מתמטיים. הנחת היסוד היא שעבודה עם המודל מאפשרת להבין את המושגים והקשרים המתמטיים המופשטים.

חומרים ועזרים דרושים: סרגלים, רצועות נייר השוות באורך ושונות ברוחבן, שקפים.

מבנה הפעילות:

1. מדוע צריך שברים בכלל?
2. הצגת הרציונל של שימוש ברצועה
3. השוואת שברים
4. אחוזים ושברים
5. חילוק שלם בשבר
6. יחס
7. הגדלה והקטנה (היבט נוסף של היחס)
8. הסתברות

מהלך המפגש

1. מדוע צריך שברים בכלל?

כל אחד מהמשתלמים מצייר על דף קטע בגודל כלשהו בלי סרגל. כל אחד מקבל רצועה (הרצועות באותו אורך וברוחב שונה - רוחב הרצועה שונה למניעת שימוש ברוחב כאשר מתארים את הקטע).

המשימה למשתלמים:

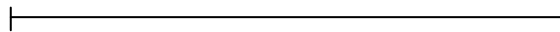
1. לכתוב פתק שבו מתואר הקטע של כל אחד, כך שמי שיקבל את הפתק יוכל לצייר את אותו קטע. תיאור הקטע יעשה בעזרת הרצועה.
2. מחליפים בין זוגות שאינם קרובים את הפתקים.
3. כל אחד מצייר קטע לפי ההוראות שבפתק שקיבל.

דוגמאות:

1. הרצועה:

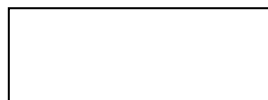


הקטע שלי:

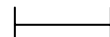


תיאור הקטע: הקטע שלי הוא באורך שתיים וקצת רצועות.

2. הרצועה:



הקטע שלי:



תיאור הקטע: הקטע שלי הוא פחות מחצי הרצועה.

3. המשתלמים משווים בין התוצאות.

4. המשתלמים מתקנים את הפתק כך שניתן יהיה לדייק יותר בציור הקטע.

בשלב שני חוזרים על הפעולה עם אילוץ נוסף: התיאור צריך להיות הקצר ביותר.

2. הצגת הרציונל של השימוש ברצועה

עיקרון הרצועה: כל הפעילויות מבוססות על הצגת השברים דרך אורך של קטע: לרוחב הרצועה אין תפקיד מיוחד (לא משתמשים בו). הרצועה מאפשרת:

1. קיפול הרצועות,
2. שימוש בו-זמנית בשתי הצלעות הארוכות (האורך) של הרצועה להצגת שני היבטים שונים,
3. בחירת יחידה נוחה המותאמת למצב ולבעיות.

הדגמה בעזרת **שקף מס' 2**: "מה זה $2/3$?"

מטרת השקף להראות למורים "לאן הולכים?", כלומר, להעלות למודעות את המבנה הכללי של מערך היחידה ולמקם את הפעילויות במבנה הכללי.

שקף מס' 2

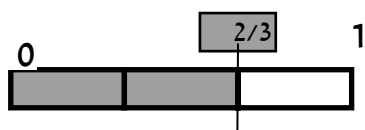
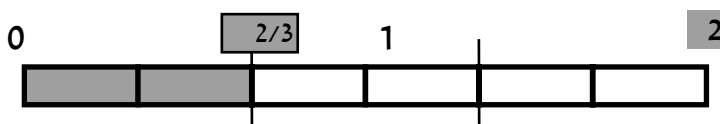
מודל הרצועה

מנה לכה $2/3$?

✓ חלק משלם: $2/3$ ממתק שוקולד.



✓ מנה: 2 לחלק ל-3 חלקים שווים.



✓ מספר על ציר המספרים:



✓ יחס: 2:3



✓ הסתברות: $2/3$

✓ הגדלה הקטנה.

הערה: שקף זה מקביל בחלקו לשקף מס' 1, הפעם הדגמה ראשונית באמצעות הרצועה.

3. השוואת שברים

א. הכנת הטבלה

חומרים: רצועות שקופות שאורכן כרוחב שקף, סרגל ומספרים ממספר 1 עד 12.
 כל אחד מקבל רצועה שקופה, סרגל ומספר. המשימה: צריך לחלק את הרצועה למספר חלקים שווים בהתאם למספר שכל אחד קיבל.
 נוצרת בעיה איך לחלק רצועה ל- 7, 11, 5 חלקים שווים?
 הצעות: אפשר לחלק בעזרת משפט תלס. או אפשר ליצור רצועות גם בעזרת טבלאות במחשב.
 את 12 הרצועות שמים אחת מתחת לשנייה בצורה הבאה: (כך נוצר שקף מס' 3)

שקף מס' 3

1											
$\frac{1}{2}$											
$\frac{1}{3}$											
$\frac{1}{4}$											
$\frac{1}{5}$											
$\frac{1}{6}$											
$\frac{1}{7}$											
$\frac{1}{8}$											
$\frac{1}{9}$											
$\frac{1}{10}$											
$\frac{1}{11}$											
$\frac{1}{12}$											

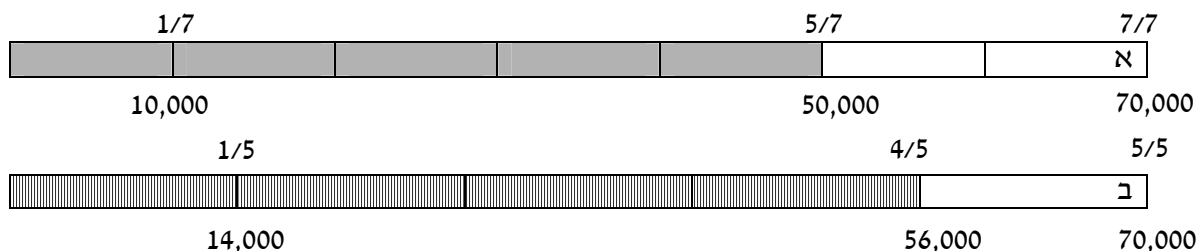
4. אחוזים ושברים

מטרת הצגת הבעיות היא לחקור את ההבדלים בין בעיות מילוליות הנראות זהות. המשתתפים פותרים את הבעיה בעזרת הרצעות. פעילות זו היא יישום לבעיות מילוליות של השוואת שברים.

א. מציגים את הבעיה (שקף מס' 4 בהמשך):
 בערים א ו- ב אותו מספר תושבים:
 5/7 מתושבי עיר א הצביעו בבחירות,
 4/5 מתושבי עיר ב הצביעו בבחירות.

ב. מציגים את המשך הבעיה (שקף מס' 4):
 בכל אחת מהערים א ו- ב 70,000 תושבים. כמה תושבים הצביעו בכל עיר?
 מטרת הבעיה היא לקשר בין שבר פשוט לחלק של כמות, בין שבר ותמורת הכמות. בניית התמורה מעודד שימוש ביחס.

ההדגמה נעשית בעזרת שתי רצעות אחת לכל עיר. בשלב ראשון בכל רצועה החלק העליון מדגים את השבר הפשוט והחלק התחתון מדגים את התמורה כחלק מכמות.



ג. מציגים את המשך הבעיה (שקף 4):
 5/7 מהתושבים של העיר ג ו- 4/5 מתושבי העיר ד הצביעו בבחירות.
 באיזו עיר השתתפות בבחירות גדולה יותר?
 (1 באחוזים 2) במספרים.

הפעם הדיון יתמקד בניתוח המשפט: "מה זו השתתפות גדולה יותר?"
 נערך דיון שבו אפשר לענות רק באחוזים. יש גם בעיות שאי-אפשר לענות עליהן:
 אין מספיק נתונים לענות על שאלה ג' בשקף 4, ואילו נתונים חסרים?

התמקצעות מורי המתמטיקה בבתי"ס היסודיים: שברים פשוטים ומס' עשרוניים - מודולה מתקדמת טיוטה

ד. מציגים את המשך הבעיה (שקף מס' 4) :
 בעיר ג 70,000 תושבים ובעיר ד 60,000 תושבים.
 באיזו עיר ההשתתפות בבחירות גדולה יותר?
 (1 באחוזים 2) במספרים.

1/7 (14% ≈)	5/7 (71% ≈)				7/7 100%
					ג
10,000				50,000	70,000

1/5			4/5	5/5
				ד
20% 12,000			80% 48,000	100% 60,000

הבעיה מאפשרת דיון על חשיבות הנתונים בבעיה. לשבר הקטן יש תמורה גדולה יותר. חוזרים על השימוש בשתי הרצעות: השבר הפשוט, מספרים ואחוזים וכמובן אומדן. (לדוגמה: $\frac{5}{7} < \frac{4}{5}$ אבל התמורה: $48,000 > 50,000$). לצורך ההצגה צירפנו שברים פשוטים ואחוזים באותו צד של הרצועה.

ה. בעיית חקר נוספת
 מה צריך להיות מספר התושבים בכל עיר, כדי שאותו מספר תושבים ישתתפו בבחירות בכל אחת מהערים?
 התשובה נעשית בעזרת ניסוי וטעייה. הקושי הראשון הוא לתרגם את הבעיה, למשל, בדוגמה של ערים ג ו-ד, "5/7 של איזה מספר שווה ל-4/5 של איזה מספר?"

$$\frac{5}{7}x = \frac{4}{5}y \longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{28}{25} = 1.12$$

כלומר, בעיר ד מספר התושבים צריך להיות: $60,000 \times 1.12$.

שקף מס' 4

מודל המקל: מקלות ובחירות

א. בערים א ו- ב אותו מספר תושבים :

5/7 מתושבי העיר א הצביעו בבחירות

4/5 מתושבי העיר ב הצביעו בבחירות.

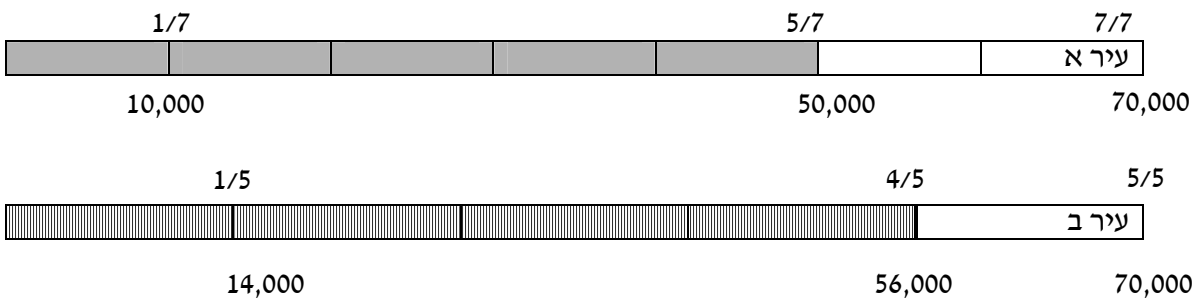
באיזה עיר ההשתתפות בבחירות היא הגדולה יותר?

פתרון בעזרת הרצועות :

1/7 (14 % ≈)		5/7 (71 % ≈)			7/7 100%	
						עיר ג'
10,000				50,000		70,000

ב. בערים א ו- ב 70,000 תושבים. כמה תושבים הצביעו בכל עיר?

פתרון בעזרת הרצועות :



שקף מס' 4 - המשך

ג. $5/7$ מתושבים של העיר ג ו- $4/5$ מתושבי העיר ד הצביעו.

באיזה עיר ההשתתפות בבחירות היא גדולה יותר?

1. באחוזים? 2. במספרים?

ד. בעיר ג 70,000 תושבים ובעיר ד 60,000 תושבים.

באיזה עיר ההשתתפות בבחירות היא גדולה יותר?

1. באחוזים? 2. במספרים?

הוספת הנתון מאפשרת פתרון. שוב הדגמה באמצעות הרצועות: השבר הפשוט, מספרים, אחוזים, וכמובן אומדן.

1/7 (14% ≈)		5/7 (71% ≈)			7/7 100%
					עיר ג
10,000			50,000		70,000

1/5		4/5	5/5
			עיר ד
20% 12,000		80% 48,000	100% 60,000

ה. מה צריך להיות מספר התושבים בכל עיר כדי שאותו מספר

תושבים ישתתפו בבחירות בכל אחת מהערים?

5. חילוק שלם בשבר

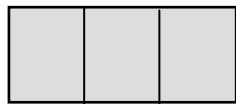
נושא זה יודגם באמצעות שקף מס' 5

שקף מס' 5

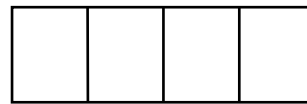
$$5 : \frac{3}{4} = ?$$

חילוק שלם בשבר

תיאור המצב:

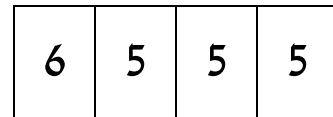
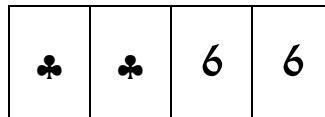
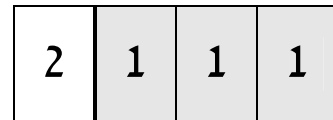
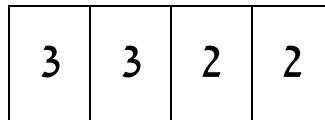


$\frac{3}{4}$ מהיחידה

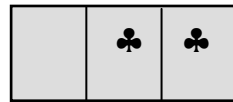


היחידה

1. כמה פעמים $\frac{3}{4}$ "נכנס" ב-5?



$\frac{2}{3}$ הם ♣ ♣



איזה חלק מ- $\frac{3}{4}$ מהווה ♣ ♣ ?
של $\frac{3}{4}$ או $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

$$5 \div \frac{3}{4} = 6 + \frac{2}{3} \quad \text{לכן}$$

$$5 = 6 \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \quad \text{נכתוב את תבנית הכפל המתאימה:}$$

2. איזה חלק מ- $\frac{3}{4}$ מהווה היחידה?

כל מלבן קטן הוא $\frac{1}{3}$ של $\frac{3}{4}$. ביחידה יש 4 מלבנים קטנים, לכן 1 הוא 4

פעמים שליש של $\frac{3}{4}$ או $\frac{4}{3}$ של $\frac{3}{4}$ או $1 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$

איזה חלק מ- $\frac{3}{4}$ מהווים 5 יחידות? $5 = 5 \times 1 \rightarrow 5 = 5 \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$

$$a = b \times c \rightarrow a : c = b$$

$$5 : \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3} \quad \text{לכן}$$

מסקנה: לחלק בשבר זה לכפול בשבר ההפכי

6. יחס

א. מציגים את הבעיה (שקף מס' 6)

ב. דנים בפתרון:

הפעם שתי הצלעות מייצגות כמויות של גדלים שונים שיש ביניהם יחס ישיר (כדי להקל על הכתיבה ועל החלוקה של כל רצועה, אפשר להשתמש בשתי רצועות צמודות).

ההמחשה מאפשרת לראות את הפתרון לשאלות לפני כל חישוב מדויק.

בשלב ראשון הצגת הנתונים על הרצועות בחירת החלוקה של כל אחת מהרצועות ורשום מספרים נוספים מאפשרים להפנים את הבעיה.

המחשה דרך הרצועות מאפשרת גם לייצג את השאלות בקלות (סימני השאלה במקום התשובה).

בחרים את הערכים של המשתנים הדידקטיים (הנתונים, והשאלות) לפי המיומנות שרוצים לפתח. לדוגמה ה-60 שבשאלה הראשונה מוביל ל**דרכי חישוב** כגון: "ל-40 חבילות 50 ספרים, ל-

20 חבילות 25 ספרים, ל-60 חבילות 25+50 ספרים", ולהפעלת תכונות היחס (לינאריות).

ה-60 שבשאלה השנייה מוביל ל**אומדן**: התשובה היא בין 40 חבילות לבין 50 חבילות קרוב יותר ל-50 חבילות".

הדיון המתמטי שמתקיים מדגיש את החשיבות של הכינויים (ספרים, חבילות) במצבי יחס ופרופורציה.

שקף מס' 6

יחס - ייצוג דרך הרצועה

הבעיה:

להדפסת 50 ספרים דרושות 40 חבילות נייר.

1. כמה ספרים ניתן להדפיס עם 60 חבילות?

2. כמה חבילות צריך כדי להדפיס 60 ספרים?

10	20	30	40	50	60	70	75	80	90	100
							?			ספרים
10	20	30	40	50	60	70	80			
					?					חבילות

שקף מס' 6 - המשך

כאשר מדובר על סוגים שונים של יחידות משתמשים ברצעות נפרדות באותו אורך, המתייחסות לאותה כמות מקורית. ההמחשה נותנת סדר גודל של התשובה אם לא התשובה עצמה.

לבצק שקדים של 750 גרם דרושים 3 כוסות שקדים ו- 2 כוסות סוכר.

אני צריכה 500 גרם בצק: כמה כוסות שקדים? כמה כוסות סוכר?

רמז: איזה חלק של 750 מהווים 500 גרם?

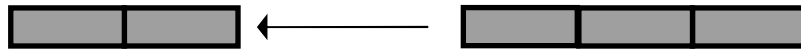
	375	500	750	נתונים
				בצק (גרם)
	כוס שקדים	כוס שקדים	כוס שקדים	שקדים(כסות)
			?	שקדים
	כוס סוכר		כוס סוכר	סוכר(כסות)
			?	סוכר

7. הגדלה והקטנה

נושא זה יודגם באמצעות שקף מס' 7. ההסבר נמצא על שקף מס' 7 - המשך.

שקף מס' 7

הגדלה \ הקטנה

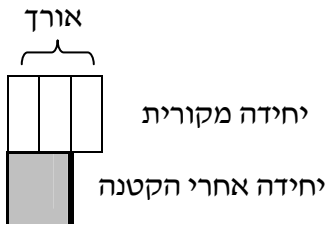


1. מקטינים תמונה ל- $\frac{2}{3}$ מגודלה.
מידות התמונה המקורית הן: 15×18 ס"מ.
מהן מידות התמונה לאחר ההקטנה?
2. אורך תמונה לאחר הקטנה הוא 52 ס"מ. מה היה האורך המקורי?

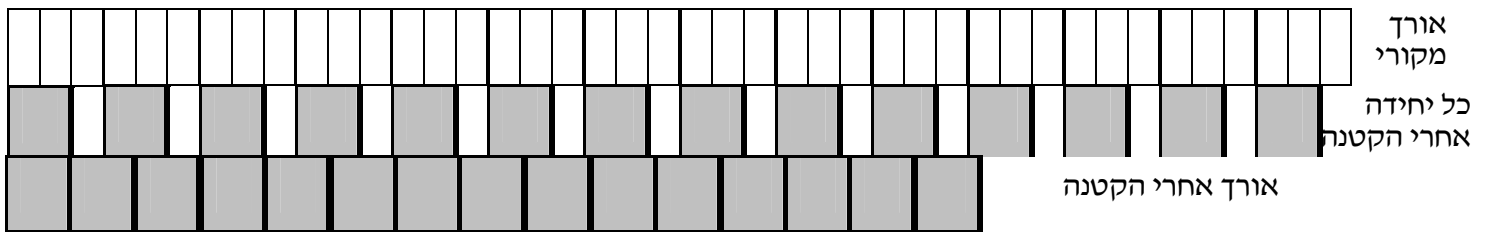
שקף מס' 7 - המשך

הסבר:

להקטין זה לשנות את אורך היחידה ולשמור על היחס בין המידות ובין והיחידות (אורך בלבד).



הקטנה ל- $2/3$: מהגודל המקורי (הקטנה ב- $1/3$)



דרך החישוב: כל 3 ס"מ במקור הוחלפו ב- 2 ס"מ בתמונה.
כל 2 ס"מ בתמונה היו 3 ס"מ במקור.

אחרי הקטנה	מקור
$2/3$	1
2	3
$(5 \times 2) 10$	$(15:3 = 5) 15$
?	18
?	78

8. הסתברות

נושא זה יודגם באמצעות שקף מס' 8.

המטרה היא להבליט את הקשר יחס - אחוז - סיכוי. משתמשים בכמה רצועות היוצרות טבלה (ראו שקף מס' 8) ומפרטים את התהליך בצורה לינאריות על-ידי שאלות מנחות - המובילות ממספרים אל סיכויים באחוזים.

תשובות אפשריות לשאלה 7: 20%, אחד על חמש, חמש על עשרים וחמש.

שקף מס' 8

הסתברות

הבעיה: בחבילה של 25 סוכריות, 20 סוכריות בטעם תות והשאר בטעם שוקולד.

מה הסיכוי להוצאת סוכריית שוקולד באקראי?

שאלות מנחות:

1. מערבבים 2 חבילות זהות. מה מספר הסוכריות בטעם תות שמקבלים?
2. מערבבים 4 חבילות זהות. מה הוא מספר הסוכריות טעם תות שמקבלים?
3. למה בחרנו במספרים אלה?
4. איזה אחוז של סוכריות בטעם תות מקבלים?
(נוסח אחר אפשרי של השאלה: כמה מאיות הן בטעם תות?)
5. שומרים על אותו יחס: יש 5 סוכריות סך הכל כמה סוכריות תות וכמה סוכריות שוקולד?
6. מה הסיכוי להוצאת סוכריית שוקולד באקראי?
7. השתמשו בנוסחים שונים לענות לשאלה 6.
8. שומרים על אותו יחס: יש 4 סוכריות שוקולד, כמה סוכריות תות?

התמקצעות מורי המתמטיקה בבתי"ס היסודיים: שברים פשוטים ומס' עשרוניים - מודולה מתקדמת טיוטה

שקף מס' 8 - המשך

הדגמה באמצעות הרצועות:

שוקולד	תות				סך הכל
5	20				25
10	40				50
20	80				100
20%	80%				100%
20%	20%	20%	20%	20%	
1	4				5