מעבר משבר פשוט למספר עשרוני וההפך

ד״ר איליה סיניצקי, מכללת גורדון

תחום תוכן מתמטי: מעבר משבר פשוט למספר עשרוני - עיגול מספרים עשרוניים אין סופיים עד מקום מבוקש, מעבר משבר פשוט לשבר עשרוני ומעשרוני לפשוט כולל השבר המחזורי.

זמן משוער ללימוד הנושא: 4 ש״ל.

רשימת מושגים מתמטיים: מספר עשרוני, קריטריון הסופיות של המספר העשרוני, מספר עשרוני אינסופי מחזורי, שיטות המרה של מספרים רציונלים.

קישור לנושאים נוספים: פירוק לגורמים, פעולות חשבון עם שברים פשוטים, פעולות חשבון עם שברים עשרוניים, סדרה הנדסית אינסופית.

הרציונל: היחידה פותחה כחלק ממודולה מתקדמת בנושא **״שברים פשוטים ועשרוניים״**. המרת שבר פשוט למספר עשרוני ולהפך מוצגת ביחידה לא רק באמצעות האלגוריתמים הרלוונטיים, אלא כחלק מנושא של הצגת המספרים הרציונלים בדרכים שונות כולל קריטריונים הקובעים את מראה המספר בהצגות שונות ומיון מספרים בהתאם להצגתם.
היחידה מהווה בסיס ללימוד הנושא ״מספרים רציונלים ואי-רציונליים״.

דפי הנחיות למרצה

הערה: במהלך כל היחידה אנחנו משתמשים במושג "מספר עשרוני" ו"שבר עשרוני" כמושגים נרדפים.

מהלך היחידה

1. שברים פשוטים כשברים עשרוניים – אלגוריתם ההרחבה

א. "שמות שונים לשבר"

כדאי להתחיל את הטיפול בנושא בהצגת השאלה: **"למה יש צורך בשימוש בשתי הצגות שונות של אותו מספר: פעם כשבר פשוט ופעם כמספר עשרוני?"** רצוי להזכיר בדיון, בין היתר, את ה"טבעיות" של השבר הפשוט (כתוצאה של פעולת חילוק) והדרכים הרבות להצגתו וכן את הקלות היחסית של השוואה ביצוע פעולות חשבון עם מספרים עשרוניים ואת קשרם עם נושא האחוזים. הדיון אמור להוביל להצדקת השימוש של שתי ההצגות, אך יש לציין שפרט לצרכים מעשיים ודידקטיים, להצגת השבר הפשוט כמספר עשרוני קיים גם תפקיד חשוב בתהליך הרחבת מערכת המספרים מעבר למספרים הרציונליים.

השאלה הבאה היא: **"מהו מספר (שבר) עשרוני?"** רוב התשובות שמקבלים, מקשרות את המושג, בדרך כלל, עם הצגת השבר העשרוני כסדרת ספרות עם הנקודה העשרונית בתוכה (כמו 0.45303).

בשלב זה יש מקום לתאר שוב את השבר העשרוני מהבחינה המתמטית: **מספר (שבר) עשרוני הוא שבר פשוט בעל מכנה 10, 100, 1000, ... 10^n כאשר n הוא מספר טבעי**. הגדרה זאת מדגישה כי שבר עשרוני **אינו** אובייקט מתמטי חדש, אלא שיטת כתיבה אחרת למספרים שכבר ידועים - שברים פשוטים. בגישה זאת, כתיבת השבר העשרוני בצורה "המוכרת" היא, בעצם, הרחבת שיטת הפוזיציה לתחום המספרים הרציונלים שאינם שלמים.

אחרי השמת דגש על משמעות המושג, המשתלמים מתבקשים להביא דוגמאות של שברים פשוטים "שהם כבר עשרוניים". בין הדוגמאות מסוג זה (ראו גם שקף מס' 1), יחד עם מספרים כמו $\frac{3}{10}$ כדאי שיופיעו גם:

- שברים לא מצומצמים, כמו, $\frac{26}{100}$ וגם שברים שמאפשרים צמצום ב- 10, כמו $\frac{380}{1000}$;
- שברים מדומים בשתי הצגות ($\frac{13}{10}$ ו- $3\frac{27}{100}$);
- זוגות מספרים שבכתיבתם בשיטה העשרונית מופיעות אותן הספרות ($2\frac{3}{10}$ ו- $2\frac{3}{100}$).

אחרי כתיבה של כל השברים הנ"ל כמספר עשרוני (סדרת הספרות) המשתלמים מוזמנים לחזור בקצרה על הפן הדידקטי של השימוש במספרים העשרוניים בכיתה. כדאי לשלב ביחד את שתי שרשרות השוויונים בין השברים הפשוטים והמספרים העשרוניים ($\frac{15}{50}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=0.3=0.30=0.300$). כדאי שוב להדגיש את הקשר בין שני סוגי הצגות של אותו מספר רציונלי. כמסקנה מפרק זה, כל שבר פשוט אמיתי בעל מכנה 10^n ומונה בעל n ספרות, אפשר לרשום בצורה $0.a_1a_2...a_n$ כאשר a_i הן ספרות

ב. המרה באמצעות ההרחבה

פרק זה נפתח בשאלה: "האם ניתן גם שברים פשוטים אחרים להציג כמספרים עשרוניים?" התשובה החיובית נתמכת בדוגמאות בסוג $\frac{1}{2}$ או $\frac{2}{5}$ וגם מסוג $\frac{1}{3}$ או $\frac{2}{9}$. בשלב זה אנחנו מדגישים עוד פעם, כי שבר עשרוני הוא בעל מכנה 10 או חזקתו של 10 וכך השיטה להמרת השבר הפשוט למספר עשרוני אמורה להיות מבוססת על הצגת השבר הנתון כשבר עם מכנה 10^n.

לצורך חזרה ותרגול, מתבקשים המשתלמים לבצע מספר המרות במקרים פשוטים (למשל, להציג את השברים $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{4}$ כשברים עשרוניים). בשלב זה, ניתן להגיש את החלק הראשון של **הדף למשתלם מס' 2 (נספח 2)**. בין השגיאות האופייניות של התלמידים יש לדון על ההעברה הפורמלית של מכנה לספרות המספר העשרוני, כמו $\frac{1}{5} \to 0.5$.

שימו לב, במילוי הטבלה בסעיף ב של דף למשתלם, רצוי לנצל את הידע של המשתלמים בביצוע פעולות חשבון עם שברים עשרוניים – לצורך בדיקה לפחות. למשל, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.5 + 0.25 = 0.75$ או $\frac{1}{8} = \frac{1}{4} : 2 = 0.25 : 2 = 0.125$ וכדומה. יש גם להדגיש שוב את הקריאה הנכונה של שברים עשרוניים (לא "אפס - נקודה - אפס - ארבע", אלא "ארבע מאיות") המאפשרת גם הבחנה נכונה (ההבדל בין 0.4 ו-0.04) וגם מניעת הבלבול עם שברים פשוטים ($\frac{1}{5} \neq 0.5$).

ג. ההערכה של שיטת ההרחבה - מקשיים לחשיבות התיאורטית

אחרי התמודדות עם מספר דוגמאות, המשתלמים באופן טבעי מגיעים לשתי השאלות הקשורות בשיטת ההרחבה:

- למה להשתמש בהרחבה, אם יש אפשרות לחלק מונה במכנה לקבל את ההצגה העשרונית? ("וגם באמצעות המחשבון")
- אם רוצים להשתמש בהרחבה, כיצד למצוא את גורם ההרחבה "במקרים קשים", כמו $\frac{3}{80}$ או $\frac{13}{75}$.

כתגובה, ניתן לחזור להמלצת השימוש בפעולות חשבון בשברים עשרוניים להמרת השבר $\frac{3}{80}$:

($\frac{3}{80} = \frac{3}{10} \times \frac{1}{8} = 0.3 \times 0.125 = 0.0375$), אך עקרונית אין זה פותר את בעיית חיפוש הגורם המתאים. יש להדגיש, כי שיטת ההרחבה אינה פוסלת את שיטת החילוק, וכמובן, ניתן להשתמש בשתיהן למטרות המרה מעשיות. אך החשוב ביותר הוא הערך התיאורטי של שיטת ההרחבה שהנגזר מהשימוש הסיסטמאתי בחיפוש גורם ההרחבה. שיטת החיפוש מוצגת בסעיף ג של **שקף מס' 1**. (השקפים נמצאים בנספחים שבסוף המודולה.)

משיטת ההרחבה נובע הקריטריון לאפשרות המרת השבר הפשוט למספר עשרוני (סופי): **אך ורק שבר פשוט מצומצם, שבפירוק המכנה שלו מופיעות רק חזקות של 2 ו/או של 5, ניתן להציג כמספר עשרוני סופי.**

צריך לציין שתי נקודות חשובות של המשפט:

- המשפט לא רק קובע את העובדה, אלא גם בונה את שיטת ההמרה (אך לא פוסל אף שיטה אחרת – דרך חילוק מונה במכנה, או באמצעות פעולות חשבון עם שברים עשרוניים).
- מהשיטה ניתן לדעת גם את **אורך** המספר העשרוני המתקבל: **מספר הספרות אחרי הנקודה העשרונית שווה למעלה המקסימלית של 2 ו- 5 בפירוק המכנה של השבר המצומצם לגורמים אלה.**

כך, לכל השברים שהם בעלי מכנה 80 אחרי הצמצום, הפירוק $80 = 2^4 \times 5^1$ קובע את גורם ההרחבה (ששווה ל- 5^3), את המכנה של השברים המתקבלים (ששווה ל- $10000 = 10^4 = 2^4 \times 5^4$) ואת מספר הספרות אחרי הנקודה - ארבע - בהצגה העשרונית.

2. המרת השבר הפשוט למספר עשרוני אינסופי

א. חילוק ארוך כמקור לשבר עשרוני

ללא ספק, המשתלמים מכירים היטב את תהליך החילוק שמוביל לשבר עשרוני. בהקשר זה כדאי לציין לפניהם מספר דברים:

- לתלמידים, יש לפרט בכל שלב מהו החילוק שמתבצע. למשל, בהמרת השבר $\frac{1}{6}$ אנחנו מחלקים 1 ל- 6, אחר כך 10 עשיריות ל- 6, ובכך מקבלים את ספרת העשיריות, 40 מאיות ל- 6, ומגיעים לספרת המאיות וכו'.
- כאשר מכנה השבר אחרי צמצום אינו מחלק של חזקה של 10 (או, במילים אחרות, פירוקו לגורמים מכיל גורמים שונים מ- 2 ו- 5), תהליך החילוק **חייב להיות אינסופי**. כדי לחזק את הבנת הקריטריון, כדאי, בין היתר, לטפל בשברים בעלי מכנה "לא מתאים" שהם שברים עשרוניים סופיים – ורואים זאת אחרי הצמצום ($\frac{39}{75}, \frac{3}{60}$ וכדומה).
- מאחר שהשארית בכל חילוק חייבת להיות שונה מ- 0, בחילוק במספר N קיימות N-1 אפשרויות שונות, ובשלב מסוים יתבצע אותו תרגיל חילוק שכבר בוצע קודם. משלב זה סדרת הפעולות **חוזרת על עצמה**, ומסיבה זאת גם הספרות של המנה חוזרות על עצמם. המספר העשרוני המתקבל נקרא **מספר עשרוני אינסופי מחזורי**. לצורך התרגול, כדאי לבקש מהמשתלמים להמיר שברים פשוטים בעלי מחזור ארוך בהצגה העשרונית (ראו, למשל, סעיף ג של דף למשתלם). כאן יש גם להתייחס לסיכום הדוגמה הראשונה: ספרת המכנה 3 היא בדיוק הספרה המופיעה בהצגה העשרונית (השוו בין המעברים $\frac{1}{5} \leftarrow 0.5$ ו - $\frac{1}{3} \leftarrow 0.(3)$).
- המכנה 7 מספק דוגמה לשבר בעל "מחזור אפשרי מקסימלי" של שש ספרות – בדיוק ב- 1 קטן מגודל המכנה, והשאריות במהלך החילוק מקבלות את כל הערכים האפשריים מ- 1 עד 6.

ב. מספרים עשרוניים אינסופיים מחזוריים – כתיבה והשוואה

ההגדרות הרלוונטיות והתכונות הבסיסיות של שברים עשרוניים אינסופיים מחזוריים מסוכמות **בשקף מס׳ 2**.

לגבי סימון ספרות המחזור, אנחנו מעדיפים את השימוש בסוגריים או בקו עליון **אחד**. גם שימוש בנקודות מעל ספרות המחזור מקובל, אך הוא פחות נוח, כאשר המחזור מכיל יותר מספרה אחת. בכל מקרה, צריך להדגיש שכתיבת השבר האינסופי באמצעות ״שלוש הנקודות״ היא לא מדויקת: למשל, השבר שכתוב בצורה ...0.13 מייצג שברים $0.1(3)$ ו-$0.(13)$.

נקודת התורפה בנושא היא בהשוואה בין מספרים עשרוניים אינסופיים לבין מספרים עשרוניים סופיים. כדאי לדון בדוגמאות בנושא, כגון:

$0.35 < 0.3(5)$ $\quad$ $0.(2) = 0.(22)$ $\quad$ $0.122 > 0.(12)$ $\quad$ $0.122 < 0.1(2)$

ג. על משמעות המספר העשרוני האינסופי

1. חשוב לציין את החשיבות של הצגת השבר כמספר עשרוני: כל מספר רציונלי ניתן להציג כמספר עשרוני סופי או אינסופי מחזורי. יתרה מכך, את ההצגה הסופית ניתן להחליף בהצגה אינסופית מחזורית באמצעות הוספת אינסוף אפסים להצגה הסופית: $0.45 = 0.45(0)$.

2. למרות הקלות של תהליך הקבלה של מספר עשרוני אינסופי, משמעות המושג אינה פשוטה. בכתיבה של מספר עשרוני סופי בצורה הבאה מודגשת הרחבת שיטת הפוזיציה ממספרים טבעיים לתחום המספרים הרציונלים: $0.23 = 0.2 + 0.03 = \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$. באנלוגיה, פענוח של הכתיבה של המספר העשרוני האינסופי יהיה:

$$0.(31) = 0.31 + 0.0031 + ... = \frac{31}{100} + \frac{31}{10000} + ...$$

והוא מצביע על כך שמספר עשרוני מחזורי זה הוא סכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת בעלת מנה $\frac{1}{100}$. הדבר נכון גם במקרה הכללי: כאשר מחזור המספר מכיל k ספרות, מנת הסדרה שווה ל- $\frac{1}{10^k}$.

3. ההגעה למושג האינסוף גורמת למספר תופעות בלתי צפויות ולא קלות להבנה. למשל, משתלמים רושמים בקלות רבה, כי $\frac{1}{3} = 0.(3)$ או $\frac{1}{9} = 0.(1)$. אך בתגובה לשאלה, מהו מספר גדול יותר, 1 או $0.(9)$ הם בוחרים את הראשון בלי היסוס. הסבר הנושא דורש השקעה מיוחדת. ניתן, כמובן, להשתמש בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית:

$$0.(9) = 0.9 + 0.09 + 0.009 + ... = \frac{0.9}{1 - 0.1} = 1$$

יותר משכנע, בדרך כלל, הוא הכפל של שוויון ״ברור״, כמו $\frac{1}{9} = 0.(1)$, ב-9:

$$0.(9) = 0.(1) \times 9 = \frac{1}{9} \times 9 = 1$$

ללא ספק, כפל זה משאיר את חלק מהמשתלמים בהרגשה של שימוש בטריק, אך טיפול מקיף בנושא גולש מעבר לתוכנית ההתמקצעות.

3. המרת מספר עשרוני לשבר פשוט

א. מספר עשרוני סופי בכתיבה אחרת

לשלמות התמונה, יש רק להזכיר, כי המרת מספר עשרוני סופי לשבר פשוט, זאת כתיבה אחרת של המספר הנתון. הגורם הדידקטי היחיד כאן – הבחנה בין שברים כמו למשל: 0.12 ו- 0.012. גם במקרה זה קריאה נכונה של השבר העשרוני נותנת פתרון לבעיה זאת: אנחנו מתחילים לכתוב את השבר הפשוט במכנה שלו, ואת הספרות בכתיבה העשרונית מעתיקים למונה (בלי האפסים בהתחלה).

ב. המרת מספר עשרוני אינסופי מחזורי לשבר פשוט

בלי להיכנס לפרטי הוכחה קפדנית, אפשר לומר למשתלמים, כי הפעולות עם שברים מחזוריים דומות לפעולות עם מספרים עשרוניים סופיים. בין היתר, להכפלת המספר בחזקה של עשר 10^k מספיק להזיז את הנקודה העשרונית ל- k מקומות ימינה. שיטת ההמרה מבוססת על הכפלת המספר הנתון בחזקה של 10, כאשר מעלתה שווה למספר הספרות במחזור ההצגה העשרונית. דוגמאות שימוש בשיטה מוצגות **בשקף מס' 3**. הסבו את תשומת הלב של המשתלמים לשוויון 4.6(9)=4.7 בדומה ל- 0.(9)=1 שדובר עליו קודם.) נזכיר, כי להמרת מספר עשרוני מחזורי שאינו טהור נוח יותר להגיע קודם למספר עשרוני מחזורי טהור: $1000x = 254.(54) \Leftarrow 10x = 2.(54) \Leftarrow x = 0.2(54)$. הדבר מפשט את החישובים, אך הוא אינו עקרוני ואינו נחוץ כל כך להמחשת השיטה.

נספחים

נספח 1: דף למשתלמים מס' 1

תוכן היחידה

א. כתיבת שברים פשוטים בעלי מכנה 10^k בשיטה עשרונית

ב. אלגוריתם ההרחבה ותקפותו

ג. "מה לעשות עם השליש?"- המרה באמצעות החילוק

ד. מספרים עשרוניים אינסופיים מחזוריים – כתיבה והשוואה

ה. הצגת מספר עשרוני כשבר פשוט

רשימת מושגים מתמטיים:

מספר עשרוני
קריטריון הסופיות של המספר העשרוני
מספר עשרוני אינסופי מחזורי
שיטות המרה של מספרים רציונליים

קישור לנושאים נוספים:

פירוק לגורמים
פעולות חשבון עם שברים פשוטים
פעולות חשבון עם שברים עשרוניים
סדרה הנדסית אינסופית

שקף מס׳ 1

המרת שבר פשוט למספר עשרוני

א.

$$\frac{29}{1000}=0.\underline{0}29 \qquad \frac{13}{100}=0.13 \qquad \frac{3}{10}=0.3$$

$$\frac{\overline{a_1a_2...a_k}}{10^n}=0.\underbrace{0...0}_{n-k}a_1a_2...a_k$$

ב.

$$\frac{3}{50}=\frac{3\times 2}{50\times 2}=\frac{6}{100}=0.06 \qquad \frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}=0.5$$

$$\frac{3}{40}=\frac{3\times 25}{40\times 25}=\frac{75}{1000}=0.075$$

ג. השוו את המעלות של 2 ו- 5 במכנה:

$$\frac{17}{80}=\frac{17}{2^4\times 5^1}=\frac{17}{\underbrace{(2^1\times 5^1)}_{=10}\times 2^3\times ?}=$$

$$=\frac{17\times 5^3}{(2^1\times 5^1)\times 2^3\times 5^3}=\frac{2125}{10^4}=0.2125$$

שקף מס' 2

מספרים עשרוניים אינסופיים מחזוריים

א. מספרים עשרוניים (סופיים):

0.23 0.152 3.0144 $0.a_1\ a_2 \ldots a_k$

ב. מספרים עשרוניים אינסופיים:

$\frac{1}{3} = 0.333...$ $\frac{1}{15} = 0.0666...$ $\frac{3}{7} = 0.428571428...$

$0.22222\ldots$ $0.15151515\ldots$

סימון:

$$\frac{1}{3} = 0.\dot{3} = 0.\bar{3} = 0.(3) \qquad \frac{5}{33} = 0.\overline{15} = 0.(15)$$

$$\frac{1}{6} = 0.1666... = 0.1\dot{6} = 0.1\bar{6} = 0.1(6)$$

שיום: **מחזור השבר** - ספרות שחוזרות בכתיבת המספר העשרוני המחזורי.

אורך המחזור - מספר הספרות החוזרות.

מספרים עשרוניים אינסופיים מחזוריים טהורים

$0.\bar{3}$ $0.\overline{51}$ $2.\overline{03}$ $0.\overline{a_1...a_k}$

מספרים עשרוניים אינסופיים מחזוריים <u>לא</u> טהורים

$0.32\overline{15}$ $0.1\bar{6}$ $2.04\bar{3}$ $0.a_0a_1...a_k\overline{a_{k+1}...a_{k+l}}$

שקף מס 3

המרת שבר אינסופי מחזורי לשבר פשוט

א. המרת השבר $0.\overline{3}$ לשבר פשוט:

$$x = 0.\overline{3} = 0.333...$$

$$10x = 3.333...$$

$$10x - x = 3 \quad \Rightarrow 9x = 3,\ \ x = \frac{1}{3}$$

ב. המרת השבר $0.\overline{36}$ לשבר פשוט:

$$y = 0.\overline{36} = 0.3636...$$

$$100y = 36.3636...$$

$$99y = 36,\ \ y = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

ג. המרת המספר $4.6\overline{9}$ לשבר פשוט:

$$z = 4.6\overline{9} = 4.699...$$

$$10z = 46.999...$$

$$9z = 42.3,\ \ z = \frac{42.3}{9} = \frac{423}{90} = \frac{47}{10} = 4\frac{7}{10}$$

ד. המרת המספר $t = 0.3\overline{20}$ לשבר פשוט:

$$1000t = 320.2020... \qquad 10t = 3.\overline{20} = 3.2020...$$

$$990t = 317,\ \ t = \frac{317}{990}$$

נספח 2: דף למשתלמים מס׳ 2

המרת שבר פשוט למספר עשרוני

א. רשמו את כל אחד מהשברים הפשוטים הנתונים כמספרים עשרוניים. במקרה הצורך, הרחיבו קודם את השבר.

$\frac{3}{100} =$ $\frac{1}{5} =$ $\frac{1}{20} =$

מהם הם קשיי התלמיד האפשריים בביצוע ההמרות הנ״ל ובכתיבת התוצאה?

ב. מלאו את טבלת ההמרה של שברים פשוטים למספרים עשרוניים. רשמו גם את שיטת ההמרה (הרחבה, חילוק, פעולות חשבון עם תוצאות קודמות וכו׳).

הצגה עשרונית	שבר פשוט	הצגה עשרונית	שבר פשוט	הצגה עשרונית	שבר פשוט
	$\frac{1}{8} =$		$\frac{1}{5} =$		$\frac{1}{10} =$
	$\frac{3}{8} =$		$\frac{2}{5} =$		$\frac{3}{10} =$
	$\frac{7}{8} =$		$\frac{4}{5} =$		$\frac{7}{10} =$
	$\frac{1}{20} =$		$\frac{1}{2} =$		$\frac{9}{10} =$
	$\frac{1}{40} =$		$\frac{1}{4} =$		$\frac{1}{100} =$
	$\frac{17}{20} =$		$\frac{3}{4} =$		$\frac{3}{100} =$

ג. באמצעות חילוק, המירו את השברים הפשוטים הבאים למספרים עשרוניים (אינסופיים):

$\frac{2}{11} =$ $\frac{1}{3} =$

$\frac{1}{7} =$ $\frac{5}{6} =$