מפגש 1: לימוד הנושא "פאונים משוכללים"

תחום תוכן

יצירה של פאונים משוכללים, וחקר מספר הפאונים המשוכללים הקיימים

מטרות המפגש

היכרות ולימוד הנושא

זמן משוער

90 דקות

חומרים וכלים

לכל מורה:

- ❖ דפי העבודה של הסדנא ללימוד הנושא פאונים משוכללים (נספח 1)
- ❖ מספריים

לכל צוות בית ספר *(על כל שולחן):*

- ❖ חלקי "קליק קלק", או ערכה אחרת של מצולעים משוכללים הניתנים להרכבה, או בריסטולים לגזירת המצולעים מהדפים לצילום שבסוף דפי העבודה (נספח 1).
  (40 משולשים, 6 ריבועים, 12 מחומשים וכ- 20 משושים)
- ❖ שדכן משרדי וקופסת סיכות או דבק.

לכל זוג מורים:

- ❖ גישה לאינטרנט

למנחה:

- ❖ שקפים – (נספח 2)

מבנה המפגש

1. בניה של פאונים משוכללים – עבודה בקבוצות (30 דקות)
2. סיכום ודיון במליאה (20 דקות)
3. חקירת פריסות של פאונים משוכללים – עבודה בזוגות (10 דקות)
4. פריסות של קוביה וטטראדר – עבודה בזוגות ודיון בתשובות במליאה (30 דקות)

1. בנייה של פאונים משוכללים – עבודה בקבוצות (30 דקות)

לכל מורה דפי עבודה: סדנא ללימוד הנושא פאונים משוכללים (נספח 1).

המורים יושבים בקבוצות סביב שולחנות (4- 6 בכל קבוצה), על כל שולחן נמצאים חלקים של "קליק-קלק", או ערכה אחרת של מצולעים משוכללים הניתנים להרכבה, או מצולעים גזורים מבריסטול, מצולמים מהדפים שבסוף דפי העבודה. (אם נבחרה האפשרות השלישית מספר המצולעים הדרושים מפורט בעמוד הקודם.)

מבקשים מהמורים לבצע את תרגיל 1 בדפי העבודה.

2. סיכום ודיון במליאה (15 דקות)

הערה: פאונים הם גופים שכל פאותיהם מצולעים. כאן השתמשנו בשם "פאון", אך ניתן להשתמש בשם הכללי גוף.

תרגיל 1 הוא התרגיל המרכזי בפעילות זו ובו בונים את הפאונים המשוכללים מהמצולעים המשוכללים. לאחר הבנייה מקיימים דיון משותף בו חוקרים ומסבירים את הקשר בין מספר הפאונים המשוכללים הקיימים למספר המצולעים המשוכללים הנפגשים בכל קודקוד של פאון כזה.

תחילה דנים בשאלה מהו המספר **המינימלי** של מצולעים הנפגשים בכל קודקוד: כדי ליצור פאון יש צורך במפגש של לפחות שלושה מצולעים וסכום המעלות של הזוויות הנפגשות בקודקוד צריך להיות קטן מ- $360°$, כי אם הסכום $360°$, יתקבל **ריצוף** מישורי ואם הסכום גדול מ- $360°$ יכסה אחד המצולעים מצולע אחר ולא ניתן יהיה לבנות פאון. כעת ניתן לדון במספר הפאונים המשוכללים.

פאונים מריבועים: על השולחן מונחת קובייה שנבנתה בסעיף ב. בכל קודקוד של קובייה נפגשים שלושה קודקודים. כעת נשאלת השאלה אם ניתן ליצור פאון בו נפגשים 4 ריבועים בכל קודקוד. מהצמדה של 4 ריבועים סביב קודקוד אחד, תתקבל זווית של $360°$ כלומר, יתקבל "ריצוף".

פאונים ממשולשים שווי צלעות: בסעיף א' נבנה פאון מארבעה משולשים שווי צלעות (פירמידה משוכללת - טטראדר). בפאון כזה נפגשים בכל קודקוד 3 משולשים. ניתן לבנות פאון בו נפגשים בכל קודקוד 4 משולשים כי סכום המעלות של ארבע זוויות שגודל כל אחת מהן 60° קטן מ- $360°$. כמו כן ניתן לבנות פאון בו נפגשים בכל קודקוד 5 משולשים (סכום המעלות 300°). כעת ברור מדוע לא ניתן לבנות פאון בו יפגשו בכל קודקוד 6 משולשים או יותר. (הצמדה של 6 משולשים שווי צלעות סביב קודקוד אחד יוצרת זווית של $360°$, לכן מתקבל, במקרה זה, "ריצוף".) כלומר, קיימים 3 פאונים משוכללים הבנויים ממשולשים שווי צלעות. אם אחד מהפאונים האלה לא התקבל בכיתה, כדאי לבנותו במשותף בעת הדיון.

פאון ממחומשים: בניסיון לחבר יותר משלושה מחומשים משוכללים יתקבל בקודקוד סכום גדול מ- $360°$, זאת מאחר וגודל כל זווית במחומש משוכלל 108° מעלות.

פאון ממשושים משוכללים: הניסיון וחוסר ההצלחה לבנות פאון משוכלל ממשושים משוכללים משעשע ועשוי להוביל לחקירה ולהסברים המובאים כאן למעלה. מאחר ויש צורך בהצמדה של לפחות 3 משושים בכל קודקוד וגודל כל זווית של משושה משוכלל היא 120° הרי שהסכום הנוצר בקודקוד הוא של $360°$ ושוב מתקבל ריצוף.

בסיכום, ניתן ליצור פאונים משוכללים רק ממשולשים, ממרובעים וממחומשים (שלושה פאונים ממשולשים, פאון אחד ממרובעים ופאון אחד ממחומשים). מכאן ניתן להסיק, כי קיימים רק חמישה פאונים משוכללים, ואלה הפאונים שנבנו ובהם נעסוק גם בהמשך פעילות זו.

בשלב זה כדאי להזכיר שוב את ההגדרה הרשומה במסגרת בדף הפעילות ולציין, כי כל הפאות של פאון משוכלל הן מצולעים משוכללים מאותו סוג ובכל קודקוד נפגשים אותו מספר של מצולעים.

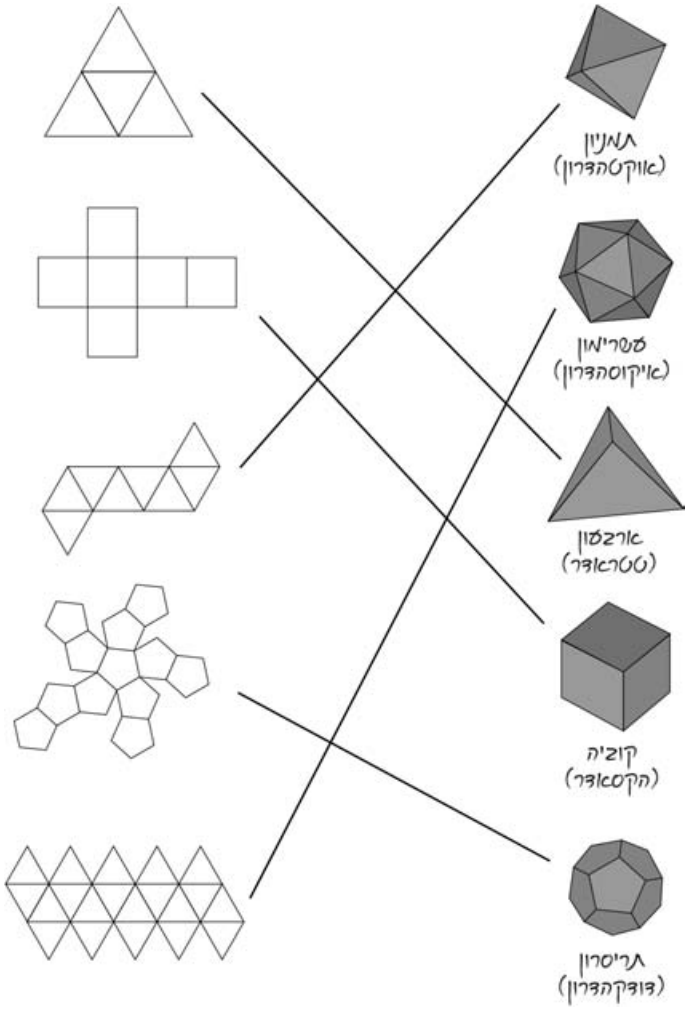
אפשר להזכיר את הכדורגל הבנוי אף הוא ממצולעים משוכללים, אך לא כולם מאותו סוג. הכדורגל מורכב ממחומשים וממשושים. אפשר גם לחפש פאונים הבנויים מאותם מצולעים, אך לא מאותו מספר מצולעים סביב כל קודקוד.

3. חקירת פריסות של פאונים משוכללים – עבודה בזוגות (10 דקות)

מבקשים מהמורים לפתור את תרגילים 2 ו- 3.

בתרגיל 2 משתמשים ביישומון - Applet: Cut-out Nets. המורים "מקפלים" את הפריסות באמצעות התוכנה, פעולה הנותנת תחושה דינאמית של יצירת פאון מפריסתו ומשמשת הכנה לתרגילים הבאים.

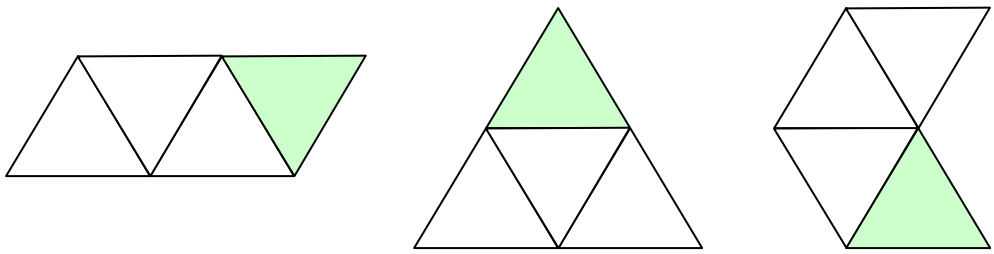
תשובה לתרגיל 3 (שקף 1): זהו תרגיל המסכם את הקשר בין הפאונים המשוכללים לבין פריסותיהם. (הסרטוטים ושמות הפאונים להלן).



4. פריסות של קוביה וטטראדר - עבודה בזוגות ודיון במליאה (30 דקות)

מבקשים מהמורים לפתור את תרגילים 4-6 בדפי העבודה ולאחר סיום העבודה דנים בתשובות.

תרגילים 4 ו- 5 עוסקים במעבר מקובייה וארבעון (טטראדר), לפריסתם באמצעות פרוק והרכבה. תחילה פורסים קובייה, או ארבעון, על-ידי פירוק הפאון וקבלת צורה מישורית אחת, המורכבת מהמצולעים המרכיבים אותו. בתרגיל 4 עוסקים בפריסות של קובייה ובתרגיל 5 עוסקים, באותו אופן, בפריסות של ארבעון (טטראדר). בשני המקרים הפעילות משלבת פירוק, הרכבה, סרטוט של פריסות ודיון בפריסות השונות של אותו גוף. בכיתות בהן נוסתה היחידה, היו תלמידים שהחשיבו פריסה, שהיא שיקוף או סיבוב של פריסה אחרת, כפריסה שונה במקרה כזה ניתן להמחיש שהפריסות זהות באמצעות גזירה והנחת פריסה אחת על הפריסה הזהה לה. לקובייה קיימות פריסות רבות ובכך יעסוק תרגיל 6. בתרגיל 4 הכוונה רק להיווכח, באמצעות סרטוט ובדיקה, כי קיימות פריסות שונות. בתרגיל 5 עוסקים בצורה דומה בפריסות של ארבעון, כאשר הרשת עליה מסרטטים היא רשת של משולשים. מאחר וקיימות רק שתי פריסות של ארבעון, משלבים כאן את הדיון במספר הפריסות האפשריות. נקודת המוצא היא מספר האפשרויות השונות לחבר 4 משולשים שווי צלעות. וקיימות סך הכל שלוש אפשרויות כאלה, כמודגם בסרטוט:



3 2 1

כעת, ניתן לבדוק באלו מהמקרים האלה אפשר ליצור ארבעון על-ידי קיפול. סרטוטים 2 ו- 3 הם סרטוטים של פריסות ארבעון, ואילו סרטוט 1 אינו פריסה.

ניתן להסיק שאין לארבעון פריסות נוספות מכך שאין אפשרויות נוספות להצמיד את ארבעת המשולשים, כך שלכל משולש תהיה לפחות צלע משותפת אחת עם משולש אחר.

בתרגיל 5 (נספח 2, שקף 2) משערים תחילה מאילו פריסות ניתן ליצור קובייה ולאחר מכן בודקים את ההשערות על-ידי גזירה וקיפול. (דף מתאים לגזירה נמצא בסוף הפעילות בנספח 1.)

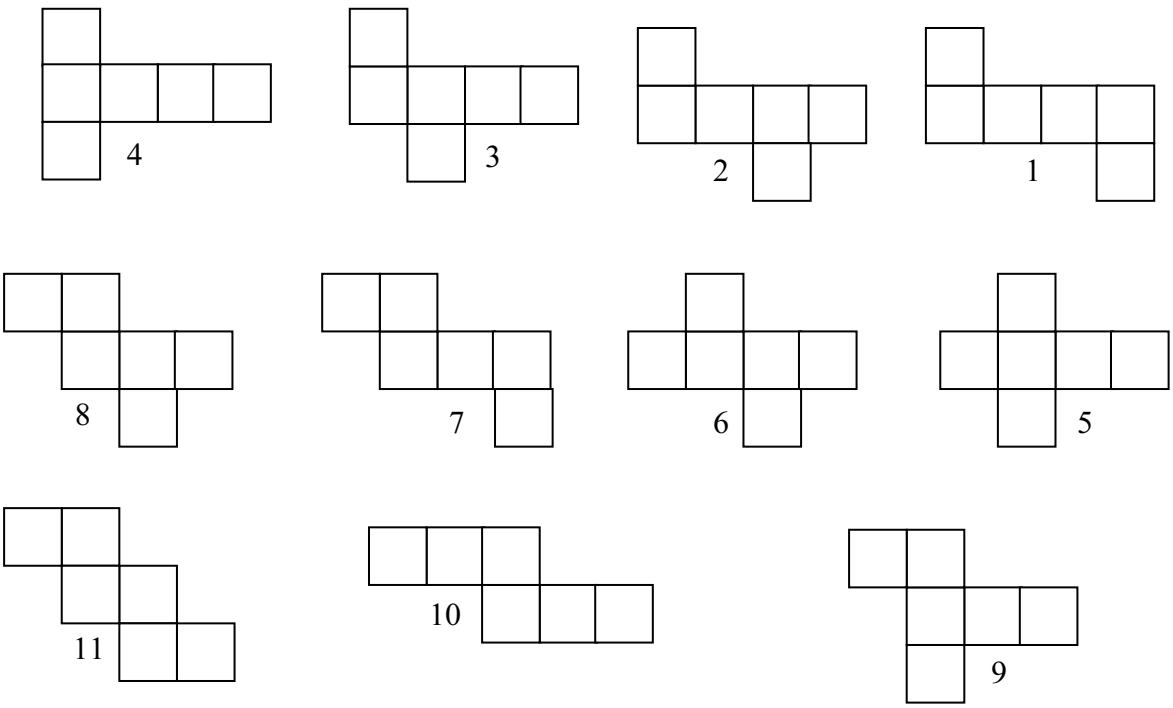
הטעויות הנפוצות הן בשני המקרים המסורטטים כאן:

רבים משערים, כי אלו אינן פריסות של קובייה ואחר כך מצליחים ליצור מהן קובייה.

לאחר פתרון השאלה, ניתן לדון עם המורים במספר הפריסות האפשריות של קובייה.

בדומה לדיון בתרגיל 5, גם כאן, יש לבדוק תחילה באילו אופנים ניתן לסדר 6 ריבועים, כך שלכל ריבוע תהיה לפחות צלע אחת משותפת עם ריבוע אחר. קיימות סך הכל 35 אפשרויות כאלה (9 מהן מופיעות בתרגיל 6). מתוך 35 האפשרויות רק 11 הן פריסות של קובייה (6 מהן מופיעות בתרגיל 6: א' ג' ד' ז' ח' ו- ט').

11 הפריסות של קובייה הן:



בשש הפריסות 1-6 קל לראות כיצד הן ניתנות לקיפול לקובייה: בכל פעם יש מעטפת של 4 ריבועים, ריבוע אחד לתחתית וריבוע אחד למכסה. הסדר בו מופיעות הפריסות האלה כאן, ממחיש מדוע אין יותר פריסות מסוג זה. קשה יותר לדמות כיצד ניתן לקבל את הקובייה מ- 5 הפריסות האחרות. השכנוע כי אכן הדבר אפשרי, כמו גם השכנוע שחלק מההצמדות האחרות של 6 הריבועים אינם פריסות של קובייה, מתקבל בעיקר באמצעות ניסוי.

הניסיון לדמות את קיפול הפריסה לפני ההתנסות, עשוי לתרום לפיתוח הראייה המרחבית.