1.2 התחלקות בבסיס שש למדריך

מטרות

- שימוש בלוח הכפל לכפל ולחילוק.
- השוואה בין סימני התחלקות בבסיס שש לבין סימני התחלקות בשיטה העשרונית.
- מציאת תכונות של מספר על-פי מספר הפעמים שהוא מופיע בלוח הכפל.
- חקירת מבנה לוח הכפל מבחינת הזוגיות של מספרים.
- השוואה בין לוח ה- 100 בשיטה העשרונית ובבסיס שש.

חומרים

דפי פעילות לתלמיד (5 עמודים כולל משחק).

יש להכין קוביות עבור המשחק.

זמן משוער

שני שיעורים.

מבנה הפעילות

1. שימוש בלוח הכפל (שאלות 1–3)
2. סימני התחלקות (שאלות 4–9 כולל משחק)
3. תכונות של מספרים בלוח הכפל (שאלות 10–13)
4. לוחות ה- 100 (שאלה 14)

1. שימוש בלוח הכפל (שאלות 1–3)

בחלק זה של הפעילות משתמשים בלוח הכפל עבור כפל וחילוק של המספרים החד-ספרתיים ו- 10. לוח זה יכול לעזור גם לביצוע כפל בין מספרים דו-ספרתיים.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דנים על האנלוגיה בין בסיס עשר לבסיס שש.

מתייחסים לכך שהשימוש בלוח הכפל בבסיס שש דומה לשימוש בלוח הכפל בשיטה העשרונית. מתייחסים לדרך שבה פותרים תרגילי חילוק בעזרת לוח כפל.

בהתייחסות לתרגיל 2, מזכירים את הקשר בין מספר הכתוב בבסיס שש (או בכל בסיס אחר) לסדרה היסודית של הבסיס. בכל בסיס ספירה, כפל ב- 10 מגדיל את ערכה של כל ספרה פי 10, ולכן "מעביר" אותה למקום לשמאלה, ומשאיר את מקום האחדות ריק – כלומר, משאיר את ערך האחדות 0. שרטוט חשבונייה או משבצון מבהירים את התהליך. באותו אופן, כפל ב- 100 (בכל בסיס) "מעביר" כל ספרה של המספר המוכפל שני מקומות שמאלה.

אוספים את הרעיונות לפתרונות התרגילים בשאלה 3, ומבקשים דרכים נוספות.

בכיתות הניסוי, כל הדרכים שהציעו היו קשורות לחוק הפילוג. בביצוע המכפלות בין מספרים בבסיס שש, חלק מן המשתלמים תרגמו תחילה כל גורם לבסיס עשר, וחלקם ביצעו את המכפלות ישירות בבסיס שש.

מטרת התרגיל להראות כי בבסיס שש כמו בבסיס עשר, ניתן לפתור את הכפל על-ידי שימוש בתכונות פעולות החשבון (למשל, בעזרת חוק הפילוג), או בדרך אלגוריתמית טכנית. ידיעת כפל בין מספרים חד ספרתיים או שימוש בלוח הכפל מספיקים כדי לכפול מספרים דו-ספרתיים ובעלי יותר ספרות.

אפשר להרחיב את הדיון ולדון גם ביתרונות ובחסרונות של פתרון שיטתי, לעומת פתרון אינטואיטיבי אחר. בדיון מציינים שפתרון אינטואיטיבי מתאים לתחילת לימוד הנושא, ופתרון שיטתי לשלב מאוחר יותר.

2. סימני התחלקות (שאלות 4–9 כולל משחק)

עונים על השאלות 4–8, עורכים דיון ורק לאחריו משחקים במשחק. המשחק הוא סיכום לסימני התחלקות בבסיס שש.

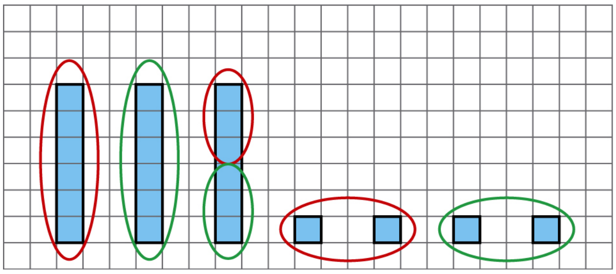
נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- הסברים שונים לסימני ההתחלקות.

מבקשים הסברים לסימני ההתחלקות, ומעודדים הסברים מכיוונים שונים.

סימן ההתחלקות ב- 2 הוא זהה בשני הבסיסים.

הסבר על כנפי דוגמה המתבסס על משבצון שש. למשל, המספר $34_{\text{שש}}$ מתחלק ב- 2



בשרטוט רואים שאפשר לחלק ב- 2 את ה"קבוצות של שש" כי שש הוא מספר זוגי, ולכן רק ספרה אחרונה אי-זוגית יכולה למנוע את האפשרות לחלק מספר בבסיס שש ב- 2.

הסבר המתבסס על החשבונייה.

הסבר זה דומה להסבר הקודם. אם יש במספר ספרה שאינה זוגית, כלומר, מספר החרוזים על אחת היתדות אינו זוגי, יש לפרוט חרוז אחד לששה חרוזים שערכם נקבע לפי ערך המקום שלימין הספרה.

הסבר המתבסס על חלוקה של כמות (למשל, של עיגולים) לקבוצות.

גם הסבר זה דומה להסברים הויזואליים האחרים. מחלקים לקבוצות של עשר בשיטה העשרונית ולקבוצות של שש בבסיס שש (כפי שנעשה בפעילות 1.1). הכמות הנותרת אחרי חלוקה כזו מייצגת את ספרת האחדות של המספר. כדאי לבקש הסבר לכך מן המשתלמים.

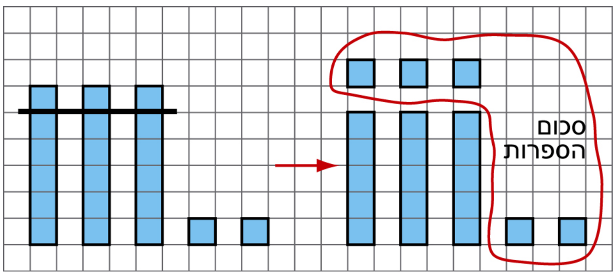
הסבר המתבסס על חוק הפילוג.

אפשר לפרק כל מספר שמספר ספרותיו גדול מ- 1 לסכום שבין האחדות שלו ו"שאר המספר" (כפי שהוא נשמע כאשר אומרים את המספר במילים). למשל, את 34 ניתן לפרק ל- 4 + 30, ואת 253 ניתן לפרק ל- 3 + 250. "שאר המספר" הוא תמיד מספר שלם כלשהו של קבוצות של 10 או של 6. מכיוון שכל כמות כזאת ניתנת לחלוקה ב- 2 ללא שארית, ההתחלקות ב- 2 של המספר כולו, תלוי רק בספרת האחדות שלו.

באופן דומה אפשר להסביר את סימני החלוקה ב- 5 בשיטה העשרונית וב- 3 בבסיס שש.

ההסבר לגבי סימני החלוקה ב- 9 בשיטה העשרונית וב- 5 בבסיס שש הוא קשה יותר, ולכן אין בקשה להסבר כזה בדף הפעילות. ניתן להסביר במליאה את סימן החלוקה הזה בעת הדיון.

להלן הסבר, ללא מילים, בעזרת משבצון שש מדוע $32_{\text{שש}}$ שסכום ספרותיו הוא 5 מתחלק ב- 5.



- דיון בתכונת ההתחלקות של מספרים.

המטרה העיקרית במשימות אלה היא להראות כי תכונת ההתחלקות של מספר היא תכונה המאפיינת את הכמות שמאחרי המספר ולא את ייצוגו. ההבנה כי מספר ניתן לייצוג בדרכים שונות, וכל אחת מהן מייצגת את אותה הכמות, חשובה ביותר להבנת מושג המספר. את קיום תכונת ההתחלקות של מספר ניתן לקבוע על-ידי חלוקת הכמות באופן מעשי (חלוקה לחלקים או חלוקה להכלה), על-ידי חילוק במספרים, או על-ידי בחינת המספר בעזרת סימני התחלקות. תכונת ההתחלקות במספר מסויים ללא שארית תלויה בכמות, ולכן אינה משתנה מייצוג לייצוג. לעומת זאת, סימני ההתחלקות תלויים בייצוג המספר (הכמות) ועשויים להיות שונים לגבי ייצוגים שונים.

אמנם סימן ההתחלקות ב- 2 שווה בשני הבסיסים, אבל לא כך לגבי מספרים אחרים. מספר בבסיס שש המסתיים ב- 5 או ב- 0 הוא לאו דווקא מתחלק ב- 5, אבל באנלוגיה לתכונת התחלקות ב- 5 בשיטה העשרונית קיימת תכונת התחלקות ב- 3 בבסיס שש.

בדיון הקודם הדוגמה הראשונה שבה מראים, בעזרת משבצון שש, כי המספר $34_{\text{שש}}$ מתחלק ב- 2 מדגימה את חלוקת המספר לשתי קבוצות (האדומה והירוקה), כלומר חלוקה לחלקים.

הדוגמה השנייה שבה מראים, בעזרת משבצון שש, כי המספר $32_{\text{שש}}$ מתחלק ב- 5 מדגימה את חלוקת המספר לקבוצות של 5, כלומר חלוקה להכלה.

הרעיון שתכונת ההתחלקות אינה תלויה בייצוג מתברר על-ידי דוגמאות נגדיות.

טבלת השוואה של סימני התחלקות בשני הבסיסים.

	בסיס שש	בסיס עשר
סימן התחלקות ב- 2	ספרת האחדות מתחלקת ב- 2	ספרת האחדות מתחלקת ב- 2
סימן התחלקות ב- 3	המספר מסתיים ב- 0 או ב- 3	סכום הספרות מתחלק ב- 3
סימן התחלקות ב- 5	סכום הספרות מתחלק ב- 5	המספר מסתיים ב- 0 או ב- 5

שואלים: מדוע דווקא ל- 3 בבסיס שש יש אותו סימן התחלקות כמו ל- 5 בשיטה העשרונית?

אם הובא הסבר לסימן ההתחלקות ב- 9 בשיטה העשרונית, אפשר גם לשאול: מדוע דווקא ל- 5 בבסיס שש יש אותו סימן התחלקות כמו ל- 9 בשיטה העשרונית?

- דיון על אופי המשימה.

מתייחסים לדרך שבה המשימה בנויה. לגבי כל סימן התחלקות בבסיס שש, תחילה מזהים מספרים המתחלקים במספר המבוקש מרשימת מספרים בבסיס שש. אחר כך מנסים לאפיין אותם, מסבירים את סיבת הסימן האנלוגי בבסיס עשר, ובודקים אם הסימן לגבי בסיס שש דומה לסימן ההתחלקות בשיטה העשרונית.

מנסים לאפיין את מהלך המשימה : בדיקת דוגמאות פרטיות, מציאת כלל לדוגמאות שהובאו, בדיקת הכלל באופן כללי, והסבר לקיום הכלל.

מתייחסים להסברים שניתנו בכיתה לקיום הסימן. מתייחסים לסוגי ההסברים (מילולי, ויזואלי) מתייחסים למידת הכלליות של ההסברים השונים (על-פי דוגמה אחת, שימוש בדוגמה כאבטיפוס, כלליים לגמרי). מתייחסים לסוגי ההסברים של סימני התחלקות בבסיס עשר, המתאימים לתלמידי בית-ספר יסודי.

דיון בשאלות 7 ו- 8.

כמו סימני התחלקות, כך היותו של מספר ראשוני היא תכונה המאפיינת את הכמות ולא את ייצוג המספר.
בדיון מתייחסים לדרכים למציאת המספרים הראשוניים ברשימה.
אחת האפשרויות לקביעת ראשוניות של מספר היא תרגומו לבסיס עשר, כי בבסיס זה המספרים הראשוניים מוכרים. דרך דרך אחרת משתמשת בסימני התחלקות. עובדים בשיטת האלימינציה.
מוחקים את כל המספרים המתחלקים ב- 2 או ב- 3 או ב- 5, ובודקים רק את המספרים שנשארו.
מתייחסים לשיטת האלימינציה כשיטה, ומבקשים מן המשתלמים לתת דוגמאות למצבים שבהם משתמשים בשיטה זו.

בשאלה 8 ניתן להשתמש בלוח הכפל. שואלים: היכן בלוח הכפל מופיעים המספרים הריבועיים?

3. תכונות של מספרים בלוח הכפל (שאלות 10–13)

המטרה בחלק זה של הפעילות היא לגלות את מבנה לוח הכפל מבחינת זוגיות המספרים שבו. עונים על השאלות, ואחר-כך מקיימים את הדיון.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון על הסיבה לכל התופעות המוזכרות.

כל התופעות הנזכרות בפעילות זו מתבססות על אותה תכונה של המספרים הזוגיים והאי-זוגיים שניתן לראות אותה בלוח הפעולה הבא. מבקשים למלא את הלוח במילים זוגי או אי-זוגי, ומבקשים הסבר לתוצאות.

x	מספר זוגי	מספר אי-זוגי
מספר		
מספר אי-זוגי		

ההסבר יכול להנתן באופנים שונים.

פירוק לגורמים

ניתן להגדיר מספר זוגי כמספר שפרוקו לגורמים ראשוניים מכיל את 2 כאחד מגורמיו.

משתמשים בהגדרה זו כדי להסביר את התוצאות בלוח. במכפלה של מספר זוגי במספר אחר (זוגי או אי-זוגי) יש גורם שהוא 2 (מן הפרוק לגורמים של המספר הזוגי), לכן המכפלה זוגית. אם שני המספרים אי-זוגיים אז 2 אינו גורם אף של אחד מהם, לכן 2 אינו מופיע במכפלה, ותוצאת המכפלה היא אי-זוגית.

חוק הפילוג

משתמשים באלגברה להסבר:

x	2b	2b + 1
2a	2a · 2b	2a · (2b + 1)
2a + 1	(2a + 1) · 2b	(2a + 1) · (2b + 1)= 2a · 2b + 2a + 2b + 1= 2(2ab + a + b) + 1

המבנה של לוחות הכפל דומה ללוח הפעולה שהוצג. ריבועים של 2x2 בלוחות הכפל "מתנהגים" כמו החלק הפנימי של לוח הפעולה. מכיוון שבכל רביעייה יש רק מספר אחד אי-זוגי, ומכיוון שמספר השורות והטורים בלוח הוא זוגי, לכן רק 25% מהמספרים בלוח הם אי-זוגיים.

- דיון בשאלה 13

בדיון מבקשים אפיון של כל חלק בדיאגרמה. מקשרים בין השאלה הזו לשאלות הקודמות. בחירת המספרים לחלקים שונים של הדיאגרמה יכולה להיעשות בעזרת סימני ההתחלקות.

4. לוחות ה- 100 (שאלה 14)

במשימה זו מסמנים בלוחות ה- 100 מספרים מסוימים, ונחשפים פעם נוספת לאנלוגיה של סימני ההתחלקות בבסיס שש ובשיטה העשרונית.

בקבוצות מתקדמות ניתן לקשר את הלוח למערכת צירים. כדי לעשות זאת יש לבנות את הלוח בדרך קצת שונה, כך שספרת האחדות תציין את המספרים על ציר x, וספרת העשרות את המספרים על ציר y. אם נסמן במערכת צירים כזאת את הנקודות המתאימות למספרים העשרוניים המתחלקים ב- 5 , נראה כי הן נמצאות על הישרים x = 5 או x = 10, ואם נסמן את הנקודות המתאימות למספרים העשרוניים המתחלקים ב- 9, נראה כי הן נמצאות על הישר x + y = 9. באופן אנלוגי בבסיס שש, הנקודות המתאימות למספרים המתחלקים ב- 3 נמצאות על הישרים x = 3 או x = 10 והנקודות המתאימות למספרים המתחלקים ב-5 נמצאות על הישר x + y = 5.