3.2 מן הרציונליים אל הממשיים למדריך

מטרות

- חקירת קבוצת המספרים הממשיים תוך הדגשת ההבדלים בין קבוצת המספרים הרציונליים וקבוצת המספרים האירציונליים.
- קריאת טקסט מתמטי.
- שימוש בפירוק מספר לגורמים ראשוניים.
- מיון מספרים לקבוצות.
- פעולות חשבון בין מספרים רציונליים ומספרים אירציונליים.
- חוקי פעולות בשורשים.
- הכרת הקשר בין משפט פיתגורס וקטעים בעלי אורך אירציונלי של יחידות מידה.

חומרים

דפי פעילות לתלמיד (6 עמודים).

משחק המכיל שלוש קוביות (יש להכין) ומשימות.

זמן משוער

שני שיעורים.

מבנה הפעילות

1. שורש של מספר טבעי כמספר אירציונלי (שאלות 1–5).
2. שיבוץ מספרים בקבוצה מתאימה (שאלות 6–13).

1. שורש של מספר טבעי כמספר אירציונלי (שאלות 1–5)

בחלק זה של הפעילות נגדיר מספר אירציונלי, נוכיח ש- $\sqrt{2}$ אינו רציונלי, ונראה דוגמאות של מספרים נוספים כאלה בהסתמך על ההוכחה. ההוכחה מסתמכת על הרעיון של פירוק מספר לגורמים ראשוניים, שבו טיפלנו בפעילות הקודמת, ועל ההבנה שמספר ריבועי מתפרק לגורמים ראשוניים כך שלכל גורם יש בן זוג השווה לו. שאלות 1 ו- 2 הן הכנה להוכחה. ההוכחה עצמה יכולה להיעשות על-ידי קריאה או בדרך פרונטלית על-ידי הסבר של המדריך. לאחר ההוכחה בודקים מספרים נוספים, ומתייחסים אל המשמעות של האירציונליות שלהם.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון.

- דנים על $\sqrt{2}$ כמספר עשרוני.

דנים על חישובו בעזרת מחשבון. מתייחסים לעובדה שהמספרים המוצגים על צג המחשבון נראים כולם רציונליים, כי הם כתובים כשבר עשרוני בעל מספר סופי של ספרות לאחר הנקודה. מספר כזה ניתן להצגה כשבר פשוט, שמכנהו 10^n. לכן הצגת ערכו של $\sqrt{2}$ על צג המחשבון כשבר עשרוני סופי, היא קירוב בלבד, ואינה משקפת את ערכו המדויק.

דנים במציאת ערכו של $\sqrt{2}$ ללא מחשבון בדרך של ניסוי וטעיה (שאלה 3ג).

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

לכן, $1 < \sqrt{2} < 2$

מחפשים את הספרה הראשונה אחרי הנקודה על-ידי ניחוש והעלאה בריבוע, ומוצאים כי $1.4^2 = 1.96$ ו- $1.5^2 = 2.25$. נמצאו, אם כן, שני מספרים שריבועיהם (מבחינת גודלם) נמצאים משני צידיו של 2, והספרות הנבדקות שלהן (כאן הספרה **הראשונה** אחרי הנקודה) עוקבות.

כלומר $1.4^2 < 2 < 1.5^2$ ו- 5 עוקב ל- 4.

לכן, $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$, והספרה 4 היא הספרה הראשונה אחרי הנקודה של $\sqrt{2}$.

לפי הקרבה של המספרים 1.96 ו- 2.25 ל- 2, אפשר לשער כי הספרה הבאה קטנה בהרבה מ- 5, וממשיכים באותה דרך.

העיסוק בדרך זו מבהיר כי אפשר (אמנם במאמצים רבים) למצוא את $\sqrt{2}$ כשבר עשרוני עד לדרגת דיוק כרצוננו.

- דנים ברעיון האומדן.

אנו נוכחים לדעת כי לצורך הפעלה מושכלת של תהליכי אומדן, יש צורך בידיעות בסיסיות ובתובנה מספרית. למשל, כדי לדעת לאמוד שורש של מספר, יש להכיר לפחות את הריבועים של המספרים מ- 1 ועד 10.

דנים בכך שניסיון רב יותר, מאפשר אומדן טוב יותר. אפשר להדגים זאת בעזרת השאלה הבאה:

ענו לשאלות הבאות מבלי לחשב.

א. מה אורך החדר שאתם יושבים בו?

ב. כמה קופסאות שימורים רגילות, נכנסות לחדר זה?

על השאלה הראשונה ההבדלים בין התשובות יהיו בסדרי גודל. בשאלה השנייה התשובות תהיינה קרובות. אחת הסיבות להבדל הוא הניסיון של המעריך בתחום שבו הוא מעריך.

דנים בחשיבות האומדן דווקא בתקופה שבה יש לנו כלים טכנולוגיים שעושים את עבודת החישוב המדויק.

- דנים בדרך הלימוד: הסבר של המורה לעומת קריאה עצמית.

דיון זה יכול להיעשות רק אם המשתלמים נחשפו לקריאה עצמית של טקסט מתמטי. למשל, אם קראו בעצמם את ההוכחה לכך ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר אירציונלי. קריאה היא בקצב של הקורא, אבל אין הסברים מעבר לכתוב. לעומת זאת הסבר יכול להיות מהיר או איטי מדי אבל יכול להרחיב במקומות שהטקסט מצומצם – למשל, על-ידי הבאת דוגמאות.

2. שיבוץ מספרים בקבוצתם המתאימה (שאלות 6–13)

הפעילות עוסקת בזיהוי סוג של מספר ובשיבוצו בקבוצה המתאימה לו.

עובדים על שאלות 6–11. הדיאגרמה נתונה ויש לשבץ בה מספרים, שחלקם מיוצגים על-ידי תרגילים. בשאלה 6 מבררים אם הגדרת מספר רציונלי ברורה, בשאלות 8, 9, 11 וב"*משחק המשימות*" (ראו סוף הפעילות ובנספח), יוצרים תרגילים שתוצאותיהם נכללים בקבוצה נתונה. בשאלה 12 מובא ייצוג גיאומטרי לקטעים שאורכם הוא מספר אירציונלי של יחידת מידה. הייצוג הזה יופיע פעם נוספת בפעילות אחרת. על מקומם של האירציונליים במערכת הצירים ידובר בפעילות אחרת. אפשר לשחק ב*משחק המשימות* לפני תרגיל 12 או אחריו.

- דיון בהרחבת עולם המספרים מהיבטים שונים.

דנים בקבוצות השונות הנראות בדיאגרמת ון, ומבררים אילו מספרים נמצאים בכל "טבעת" של הדיאגרמה. מתייחסים לכך שכל הרחבה מכילה את הקבוצה הקודמת.

דנים בשלבי ההרחבה השונים של קבוצות המספרים מהיבטים שונים:

ההיבט ההיסטורי

המספרים הטבעיים נוצרו לספירה - צורך בסיסי להתמודדות עם הסביבה ואף להישרדות. צורך זה הוא כה קמאי, שישנם בעלי חיים אשר "יודעים" לספור כמות קטנה של עצמים (כפי שזה הוכח במחקרים שונים). המספרים הטבעיים נהפכו לישויות מופשטות ונלמדו ככאלה על-ידי היוונים שחקרו לעומק את תכונותיהם.

כבר לפני למעלה מ- 2500 שנה, התחילו בני האדם ליצור "שברים" – התיעוד הראשון לכך נמצא בפפירוסים מצריים, בהן יש שימוש בשברי היחידה. היוונים לא השתמשו מפורשות בשברים, אך התעסקו רבות ביחסים בין מספרים טבעיים. הם גם "נתקלו" במספרים אירציונליים כאשר נדהמו לגלות שלצלע ולאכלסון של הריבוע כלשהו אין "מידה משותפת" (כלומר אי-אפשר לשים את מידותיהם של הצלע והאלכסון כיחס של שני מספרים טבעיים, או בתרגום למושגים של ימינו, $\sqrt{2}$ הוא מספר שאי-אפשר לבטא כמנה בין שני מספרים טבעיים).

מסופר כי הסינים היו הראשונים להעלות על הדעת את הרעיון של המספרים השליליים, אולם מספרים אלו התחילו לחלחל רק לפני כ- 500-600 שנה הן כמצייני חוב (כלומר, כצורך יישומי) והן כפותרי משוואות להן לא היה פתרון אחר, כמו 2x+10=8 (כלומר צורך "מופשט").

בינתיים, גם האירציונליים התחילו להיות מושא ללימוד, אך התעניינות באירציונליים גברה עם המצאת השברים העשרוניים ב- 1585.

האפס נולד כצורך ליצירת שיטת כתיבת מספרים יעילה, ככל הנראה על-ידי ההודים לפני כ- 1200 שנה (הרבה אחרי המצרים והיוונים, אך הצורך בו כבר מרומז בשיטת כתיבת המספרים של הבבלים).

המספרים השליליים הם היחידים ש"זכו" להתנגדות מפורשת, אף נחרצת, של מתמטיקאים מסוימים, אפילו עד אמצע המאה ה-19!

בהיסטוריה, ההתפתחות של המתמטיקה הייתה מונעת על-ידי שני צרכים עיקריים והקשר ביניהם: הצורך ליישומים, למודלים שיעזרו להסביר בעיות מהמציאות והרצון להרחיב ידע טהור לשמו. ההסטוריה של קבוצות שונות של מספרים היא גם דוגמה לכך, כפי שהודגם בקצרה לעיל.

ההיבט המתמטי

ההיבט המתמטי מתבטא בדיאגרמה. לקראת סוף המאה ה-19, עסקו מתמטיקאים רבים בהעמדת כל המספרים – מהטבעיים ועד המרוכבים – על בסיס פורמאלי מוצק, כלומר נבנתה הגדרה מתמטית לכל קבוצת מספרים, כאשר הגדרת המספרים הטבעיים מתבססת על תורת הקבוצות וחוקי הלוגיקה, וכל קבוצה אחרת מוגדרת על בסיס תת-קבוצה שלה.

ההרחבה נעשית כפי שזה מתבטא בדיאגרמה. מתחילים עם המספרים הטבעיים ואפס. מוסיפים את השלמים השליליים ומתקבלת קבוצת השלמים. מוסיפים את השברים החיוביים והשליליים ומתקבלת קבוצת הרציונליים. בשלב הבא, מוסיפים את האירציונליים ומתקבלת קבוצת הממשיים. ההרחבה הבאה (שלא טיפלנו בה) היא הרחבה לקבוצת המספרים המרוכבים, שכוללת את קבוצת המספרים הממשיים.

היבט ההוראה בבית הספר

במהלך ההיסטוריה היה "סדר" (או יותר נכון, אי-סדר) הופעת המספרים, שונה מאד מהסדר לפיו נלמדים המספרים השונים בבית הספר. בבית הספר מתחילים עם המספרים הטבעיים ואפס. מוסיפים את השברים ומתקבלת קבוצת הרציונליים החיוביים. מוסיפים את הרציונליים השליליים, ומתקבלת קבוצת הרציונליים. אחר מוסיפים את האירציונליים ומתקבלת קבוצת הממשיים, ולבסוף רק עבור חלק מהתלמידים מרחיבים לקבוצת המרוכבים. מהלך זה מתבסס על ההנחה כי משמעות השבר ברורה יותר ממשמעות המספר השלילי, ואפשר ללמוד זאת מן המהלך ההיסטורי. מבחינה זו רצוי, אמנם, להקדים שברים לשליליים. לעומת זאת, הפעולות במספרים שליליים קלות יותר מן הפעולות בשברים, ומבחינה זו היה אולי רצוי להקדים את השליליים לשברים.

- דיון באופי השאלות 7–9.

שאלות 7 היא שאלה ישירה של חישוב וזיהוי, ולכל סעיף בה יש תשובה אחת.

שאלות 8 ו- 9 הן שאלות הפוכות, כלומר יש לכתוב תרגיל כדי להגיע לתוצאה מסוימת. בנוסף יש אפשרויות שונות בכל סעיף.

דנים בחשיבות של שאלות מהסוג השני (אין צורך לדון בשאלות מן הסוג הראשון, כי הן נפוצות). יש לשים לב כי לא לכל שאלה הפוכה יש תשובות רבות, ושתי האסטרטגיות אינן תלויות זו בזו.

בדרך כלל פתרון שאלות מסוג זה דורש תובנה מספרית, ואינו מבוסס על הפעלת אלגוריתם ברור.

אפשר לבקש מן המשתלמים לתת דוגמאות אחרות מנושאים שהם מלמדים לשאלות המעוצבות לפי אסטרטגיות אלו.

- דיון בשאלות 10–11.

בשאלה 10 בודקים, בעזרת דוגמה אחת, אם קיים חוק הפילוג של השורש מעל החיבור ומעל החיסור, ואם קיים חוק הפילוג של השורש מעל הכפל ומעל החילוק. זוהי הזדמנות לדון בדוגמה נגדית לעומת הוכחה כללית. שואלים: האם אפשר להסתפק בדוגמה אחת כדי להכליל?

בכיתות הניסוי בהזדמנויות שונות, חלק מן המורים חשבו שכדי להוכיח טענה לגבי מספרים, מספיק לבדוק מספר דוגמאות מייצגות (כלומר, מסוגים שונים). כך למשל, לפי סברה מוטעית זאת, את קיומה של חוקיות לגבי מספרים שלמים, ניתן להוכיח בעזרת הבאת דוגמה במספרים חיוביים, דוגמה ב- 0 ודוגמה במספרים שליליים. לעומת זאת, רוב המורים ידעו כי להפרכת טענה מספיקה דוגמה נגדית אחת.

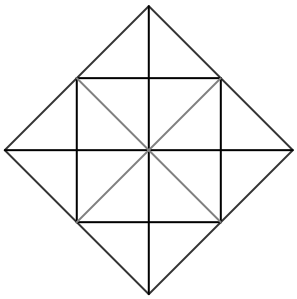
במקרה שלנו, חוק הפילוג של השורש הריבועי מעל הכפל $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ומעל החילוק $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ מתקיים לכל המספרים החיוביים. מוכיחים באופן כללי את שתי הטענות על-ידי העלאה בריבוע.

אחרי שראו בדוגמה אחת (שאלה 10) כי הטענות $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ ו- $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$ אינן נכונות, שואלים: מדוע העלאה בריבוע, הנעשית בהוכחת הטענות לגבי כפל וחילוק, אינה מתאימה להוכחת הטענות לגבי חיבור וחיסור? מתייחסים לנוסחאות הכפל המקוצר.

בשאלה 11 ו*במשחק המשימות* יש יישום של החוקים שהוכחו.

- דיון בשאלה 12.

מבקשים תשובות לשאלות. בשרטוט ניתן למצוא 8 ריבועים שאורך צלעותיהם הוא מספר טבעי (מיחידת אורך אחת ועד 8 יחידות אורך), ו- 4 ריבועים שאורך צלעותיהם הוא מספר אירציונלי ($\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$).



דנים בדרכים השונות לחשב את אורך צלעם של הריבועים מן הסוג השני.

נציג כאן שלוש דרכים לחישוב אורך צלע הריבוע החיצוני המופיע בשרטוט.

- אפשר למצוא משולש ישר זווית שאורך הצלע של הריבוע הוא היתר שלו.

  במקרה שלנו: $2^2 + 2^2 = 8$ לכן אורך הצלע הוא $\sqrt{8}$ יחידות.

- אפשר להסתמך על אורך אלכסון של ריבוע היחידה, שהוא $\sqrt{2}$ יח', ולומר שאורך הריבוע הגדול כפול מאורכו של קטע זה. כלומר האורך הוא $2\sqrt{2}$ יח'.

- אפשר לחשב את שטח הריבוע על-ידי ספירת המשולשים הקטנים שהם מחצית ריבוע היחידה – כלומר שטחם $\frac{1}{2}$ יחידת שטח. הריבוע הגדול מורכב מ- 16 משולשים כאלה, לכן שטחו 8 יחידות שטח. לכן אורך הצלע של הריבוע הגדול הוא $\sqrt{8}$ יחידות.

מראים את שוויון התשובות על-ידי העלאה בריבוע של $2\sqrt{2}$, או על-ידי פירוק לגורמים של 8.