3.7 מבנה המספר הרציונלי למדריך

מטרות

- הבנת הייצוג העשרוני של מספרים רציונליים.
- הבנת האלגוריתם של חילוק ארוך.
- ביצוע מעברים בין ייצוגים שונים של מספרים רציונליים.
- הבנת הקשר בין האלגוריתם של חילוק ארוך וייצוגו העשרוני של מספר רציונלי.

חומרים

דפי פעילות לתלמיד (6 עמודים).

זמן משוער

שני שיעורים.

מבנה הפעילות

1. מספרים רציונליים סופיים (שאלות 1–5)
2. חילוק ארוך (שאלות 6–7)
3. מספרים רציונליים אינסופיים (שאלות 8–14)

1. מספרים רציונליים סופיים (שאלות 1–5)

הפעילות כולה עוסקת במבנה המספר הרציונלי בהצגתו העשרונית. בחלק זה של הפעילות עוסקים בהבחנה בין שברים שהצגתם העשרונית סופית, לבין אלה שהצגתם העשרונית אינסופית. עוסקים באופי המכנה של שברים מצומצמים הגורם להם להיות סופיים. מתחילים בדוגמאות של שברים עשרוניים, הופכים אותם לשברים פשוטים, ומתבוננים בגורם הצמצום ובמכנה הסופי, ומגלים כי כולם כפולות של 2 ו/או 5. לאחר מכן מתחילים בדוגמאות של שברים פשוטים, ומנסים להרחיבם לשברים בעלי מכנה 10^n, כלומר לשברים בעלי הצגה עשרונית סופית. לבסוף, מזהים מתוך קבוצה של שברים את אלה שהצגתם העשרונית סופית.

בחלק זה של הפעילות מגיעים, אפוא, למסקנה הבאה.

כל מספר רציונלי בייצוג העשרוני שלו הוא:

סופי, אם המכנה הוא כפולה של הגורמים 5 ו/או 2 בלבד (כי אז אפשר להרחיבו לשבר בעל מכנה 10^n),

או

אינסופי, אם אחד הגורמים של המכנה שונה מ- 5 ומ- 2 (כי אז אי-אפשר להרחיבו לשבר בעל מכנה 10^n).

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בדרכים השונות להפוך שבר פשוט לשבר עשרוני.
  - הרחבה לשבר בעל מכנה 10^n.
  - חילוק המונה במכנה.

  דנים ביתרונות ובחסרונות של כל דרך.

  ההרחבה יותר ברורה מהחילוק, כי משמעות השבר העשרוני כשבר בעל מכנה 10^n ברורה יותר ממשמעות קו השבר כחילוק. אולם הרחבה כזו אינה אפשרית בכל מקרה. לעומת זאת, שיטת החילוק של מונה במכנה אפשרית תמיד ונוחה במיוחד בעזרת מחשבון.

- דיון בדרך ללמידה המוצגת בפעילות.

בפעילות מובאות שאלות (שאלות 2–4) שתוך כדי פתרונן הפותר אמור להגיע למסקנה – שבר מצומצם אשר בפרוק לגורמים ראשוניים של מכנהו יש מספרים שונים מ- 2 ומ- 5, ייצוגו כשבר עשרוני הוא אינסופי. כדי לבדוק אם מסקנתו נכונה, הוא מתבקש למיין מספרים לפי מסקנתו (שאלה 5), ואחר לבדוק את השערתו בעזרת מחשבון. זהו לימוד בדרך של גילוי מודרך. המסקנה ניתנת בפעילות עצמה בשלב מאוחר יותר. דנים בדרך הלימוד הזו.

- דיון בשאלה 5.

אם המשתלמים מצליחים לזהות בקלות שברים שהצגתם העשרונית סופית, מהיכרותם עם המספרים, מציגים לפניהם את השברים הבאים: $\frac{38}{335}$, $\frac{31}{2560}$ ומבקשים לשער אם הצגתם העשרונית סופית, ולבדוק את ההשערה. כאשר מחלקים מונה במכנה בעזרת מחשבון, התוצאות על הצג נראות מאותו סוג, למרות שהראשון אינסופי והשני סופי. מהלך זה, מדגיש שלא תמיד אפשר לסמוך על המחשבון, ולפעמים יש למצוא כללי עבודה אחרים. במקרה שלנו - פירוק לגורמים של המכנה (השברים מצומצמים).

- דיון בפירוק לגורמים כטכניקה מסייעת.

במהלך החלק הזה בפעילות מגיעים למסקנה כי פירוק המכנה לגורמים עוזר להכריע בשאלה לגבי סופיות או אינסופיות ההצגה העשרונית של שבר. מנצלים את המסקנה להתייחסות אל הפירוק לגורמים ככלי שמסייע במקרים רבים. מבקשים מן המורים להצביע על מקומות בהוראה שבהם אפשר להשתמש בפירוק לגורמים ככלי. להלן דוגמאות אחדות.

- צמצום שברים, וכמקרה פרטי חילוק במספר כאשר התוצאה שלמה.
- מציאת הכפולה משותפת המינימלית של שני מספרים (למציאת מכנה משותף).
- הרחבת שברים, כדי להפוך שבר פשוט לעשרוני אם הצגתו סופית.
- זיהוי מספרים ראשוניים.
- זיהוי מספרים ריבועיים.
- מציאת המחלקים של המספר.

מתייחסים לכל דוגמה ומבררים אם הדרך להסתייע בפירוק לגורמים ברורה. למשל, בהקשר לפעילות הנוכחית, מבררים איך להרחיב את השבר $\frac{31}{2560}$ לשבר בעל מכנה 10^n כדי להפוך אותו לשבר עשרוני.

2. חילוק ארוך (שאלות 6–7)

בחלק זה של הפעילות נזכרים באלגוריתם של חילוק ארוך, המסביר את הסיבה למחזוריות ההצגה האינסופית של מספרים רציונליים. משמעות האלגוריתם מובהרת בשלוש דרכים שונות. לפני שמתחילים לקרוא את ההסברים, מבקשים מן המורים שלמדו חילוק ארוך לספר כיצד הסבירו אותו לתלמידים.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בשיטות השונות להבהרת האלגוריתם לחילוק ארוך.

קוראים את ההסבר שבשאלה 6ב. מתייחסים לשאלה 6ג ושואלים: במה הואילו האפסים שנוספו בצד ימין בטבלה? ומבקשים הסבר לחילוק בעזרת השרטוט בשאלה 6ד,

מבקשים להשוות בין השיטות השונות, ומסתבר שכולן (כולל הגישה הויזואלית) עובדות על אותו עקרון – חוק הפילוג ופריטה. ההבדל בין השיטות החשבוניות הוא בעצם רק בצורת הכתיבה.

- דיון על דרך הצגת הפעילות

הפעילות מתחילה עם בקשה למציאת דרכים שונות לחילוק של שני מספרים עם מחולק גדול יחסית. מבררים לשם מה הובא תרגיל זה?

בכיתות הניסוי המורים הציעו דרכים שונות פרט לאלגוריתם הידוע, כל הדרכים הסתמכו על חלוקת המספר לשני מחוברים או יותר, ושימוש בחוק הפילוג [(a + b):c = a:c + b:c].

מתייחסים לכך שהפתיחה כוללת רמז לבאות.

מתייחסים להצגת המהלך החשבוני בליווי הסבר מילולי כתוב ומפורט, לעומת הסבר של מורה, לעומת הסבר ויזואלי ולעומת פתרון תרגילים המוליכים אל רעיון מסוים (כמו בחלק הקודם של הפעילות).

מתייחסים להבאת אותו רעיון בדרכים שונות.

- דיון במתח שבין תרגול המלווה בהפעלת שיקולים אינטואיטיביים לבין תרגול מכני המבוסס על הפעלת אלגוריתמים בלבד.

למרות שמטרת החלק הזה של הפעילות היא להסביר את הסיבה למחזוריות ההצגה האינסופית של מספרים רציונליים, כדאי לנצל את הסיטואציה לדיון הזה, כי הוא מאד חשוב למורים. במקרה שלנו פירוק מספר למחוברים לפי בחירה, ושימוש בחוק הפילוג מייצג תרגול לפי אינטואיציה, ואילו שיטת החילוק הארוך מייצגת דרך אלגוריתמית. מתייחסים ליתרונות ולחסרונות של כל דרך.

לפני לימוד שיטתי של נושא, יש יתרון גדול להפעלת האינטואיציה של התלמידים – במיוחד במקרה כמו שלנו, שבו האינטואיציה תומכת בהסבר לאלגוריתם. גם במהלך הלימוד והתרגול, רצוי לחזור מפעם לפעם אל נקודת העוגן שבהסבר, המבהירה משמעויות ואולי עוזרת לזכור את האלגוריתם. במשך הזמן, הפעלת האלגוריתם, הופכת למכנית, כדי לחסוך בזמן, וכדי שחוסר ידיעתו לא יעכב בלימוד של נושאים מורכבים יותר. אם הלימוד נעשה על בסיס איתן, אפשר תמיד לחזור אליו ולשחזר את האלגוריתם.

3. מספרים רציונליים אינסופיים (שאלות 8–14)

בחלק זה של הפעילות משלימים את המסקנה שאליה חתרה כל הפעילות, ומוסיפים את הטענה הבאה: כאשר הייצוג העשרוני של המספר הרציונלי הוא אינסופי, הוא חייב להיות מחזורי.

הטענה הזו מוכחת במהלך הפעילות. ההוכחה מסתמכת על החילוק הארוך ועל המספר המקסימלי של השאריות השונות האפשריות בחילוק במספר. המסקנה הסופית לגבי הצגה עשרונית של מספרים רציונליים מובאת רק בסוף הפעילות. במהלך הפעילות, מתרגלים סימון של שבר מחזורי, ומשווים בין שברים שונים.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בשאלות 8 ו- 9.

בדיון מתייחסים לכך שאפשר להשוות שברים עשרוניים סופיים לשברים עשרוניים אינסופיים. מתייחסים לכך שחלק מן השברים האינסופיים כמו ...0.333 ו- ...0.666 מוכרים כשליש ושני שליש. אם הסימון $0.\dot{3}$ חדש למשתלמים, יש צורך בתרגום לייצוג המוכר כדי להשוות בין המספרים שבשאלות. מתייחסים לכך שיותר קל להפוך שבר פשוט לשבר עשרוני אינסופי (על-ידי חילוק ארוך), מאשר בכיוון ההפוך.

מתייחסים לרעיון הכללי של תרגום מייצוג לייצוג לצורך הבנה טובה יותר, ומבקשים דוגמאות מנושאים אחרים.

מתייחסים לכך שחשוב שתלמידים יראו בבית הספר היסודי מספרים כמו שליש בהצגתם העשרונית במחשבון.

- דיון בשאלות 10–12.

בשאלות 10 ו- 11 מוליכים את המשתלמים באופן הדרגתי אל המסקנה כי כל שבר עשרוני אינסופי הוא מחזורי בגלל המספר הסופי של השאריות השונות בחלוקת המונה למכנה.

מסכמים, פעם נוספת, את האפשרויות השונות בהצגת מספר רציונלי כמספר עשרוני ומשלימים את המסקנות הקודמות בעזרת המסקנה החדשה: אם הייצוג העשרוני של מספר רציונלי הוא **אינסופי**, הוא חייב להיות **מחזורי**.

דנים על דרך ההוראה ההדרגתית – השאלה על המחזוריות נשאלת לאחר התנסות פתוחה, וניתנת עצמאות גדולה לתלמיד, ובהדרגה נשאלות שאלות מכוונות יותר.

מתייחסים למגבלות של המחשבון המציג תמיד מספר רציונלי סופי, ואינו יכול תמיד להציג את המחזוריות של מספר רציונלי אינסופי. מתייחסים להצגת המספר $\frac{2}{17}$ כפי שהוא מוצג על הדף לעומת הצגתו במחשבון.

בשאלה 12 מתייחסים לשברים שמכניהם 9, ונחשפים לחוקיות הצגתם. מציגים את ההסבר המתבסס על השוויונות הבאים עבור ספרה a: $\frac{1}{9} = 0.111...$ ו- $\frac{a}{9} = a \cdot \frac{1}{9}$

הטענה: $0.\dot{9} = 1$ קשה מאוד ל"עיכול" ומתקבלת בספקות רבים. בדרך כלל, נשמעת טענה נגדית האומרת כי אמנם $0.\dot{9}$ קרוב מאוד ל- 1, אבל בכל זאת יש הפרש ביניהם. הקושי הוא בהבנת האינסוף. מחקרים הראו כי הרבה יותר קל להבין ש- $\frac{1}{3}$ שווה ל- ...0.333 מאשר להבין ש- ..0.333 שווה ל- $\frac{1}{3}$ כי בשוויון הראשון ...0.333 נבנה על-ידי תהליך, ובשני הוא אוביקט.

כדי לשכנע לגבי נכונות הטענה $0.\dot{9}=1$, אפשר להשתמש בשלוש דרכים שונות.

א. ידוע ש- $\frac{1}{9}=0.\dot{1}$ נכפול ב- 9: $9\cdot\frac{1}{9}=9\cdot 0.\dot{1}$ ונקבל: $1=0.\dot{9}$	ב. ידוע ש- $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$ נכפול ב- 3: $9\cdot\frac{1}{9}=9\cdot 0.\dot{1}$ ונקבל: $1=0.\dot{9}$
ג. נסמן: $x=0.\dot{9}$ נכפול ב- 10: $10x=9.\dot{9}$ נחסר: $x=0.\dot{9}$ ונקבל: $9x=9$ כלומר: $x=1$ מסקנה: $0.\dot{9}=1$	

דרך ג היא אחת הדרכים המקובלות להפיכת שבר עשרוני מחזורי לשבר פשוט. מציגים את הדרך הזו גם עבור מספרים נוספים. מבררים איזו מבין שלוש הדרכים היא המשכנעת ביותר.