אחוזים - רקע תיאורטי

ד״ר בת-שבע אילני, נורית שמואלי, מכללת בית-ברל

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - חזרות והרחבות מושג האחוז.

רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות – אחוז, תמורת האחוז, גודל יסודי.

קישור לנושאים: יחס ופרופורציה.

זמן משוער לפעילות – 2 ש״ל.

מטרות – הכרת מהות האחוז.

חומרים ועזרים דרושים - 2 דפי עבודה ו- 2 שקפים (דפי העבודה והשקפים נמצאים בנספח שבסוף היחידה).

בפרק זה מובא רקע מתמטי לנושא אחוזים. את הרקע המתמטי כדאי לשלב, במהלך ההוראה לאחר שהמשתלמים עסקו באחוזים.

הפרק כולל:

א. רקע תיאורטי

1. מהו אחוז?

1.1 הגדרת מושג האחוז כפי שהיא מופיעה בספרי הלימוד ובמקורות אחרים

1.2 דיון: מהו אחוז?

2. ההיסטוריה של מושג האחוז

3. דרכים לפתרון בעיות אחוזים

4. אסטרטגיות של ילדים בפתרון בעיות אחוזים

5. הקשר בין אחוזים ופרופורציה

ב. פעילות – משמעות מושג האחוז

ג. פעילות – אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות אחוזים

ד. גורמים עיקריים לקושי בתפיסת מושג האחוז

1. מהו אחוז?

1.1 הגדרת מושג האחוז כפי שהיא מופיעה בספרי הלימוד ובמקורות אחרים

ניתן לראות בספרים שני סוגי התייחסות למושג אחוז: התייחסות לאחוז כאל שבר, והתייחסות לאחוז כאל יחס. נביא מספר התייחסויות אל האחוז כפי שהן מופיעותם בספרים שונים.

א. אחוז של מספר כלשהו: הוא מאית של המספר. (מילר, 1989).

ב. 1% הוא $\frac{1}{100}$ ונקרא אחוז אחד. (רובינזון, 1989) .

ג. אחוז: שם אחר לשבר שמכנהו 100. לדוגמה: 50% הם $\frac{1}{2}$. 25% הם $\frac{1}{4}$ (האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, משרד החינוך והתרבות, 1988).

ד. אחוז הוא שם אחר למאית ולכן 50% הם $\frac{1}{2}=\frac{50}{100}$ ו- $\frac{1}{4}$ הוא $\frac{25}{100}$ או 25% (האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, משרד החינוך והתרבות, 2004).

ה. בשפה האנגלית מבדילים בין שני מונחים – percentage, percent.

Percentage הוגדר: היחס בין שני מספרים כאשר המחלק הוא 100.

percent – (שנקרא גם per centum) הוגדר: מאית $\frac{1}{100}$, החלק האחד מתוך המאה.

(Cambridge Dictionary of the English Language, 1989)

ו. Percentage - מספר המבוטא על-ידי שבר של מאית $\frac{1}{100}$. (Gibson, 1981).

לדוגמה: 5% הם $\frac{5}{100}$.

כל שבר פשוט ועשרוני אפשר לבטא על-ידי אחוז, באמצעות הכפלה ב- 100.

לדוגמה: $63\% = 0.63\times 100$

$$25\% = \frac{1}{4}\times 100$$

1.2 דיון: מהו אחוז?

נשאלת השאלה האם אחוז הוא מספר? והאם ההגדרות כפי שהופיעו בספרים, נכונות?

בתכנית הלימודים החדשה (2004), בדוגמאות והבהרות מופיע: "משתמשים באחוזים בעיקר לתיאור חלק של כמות ולכן אין נוהגים לומר "50% של מטר" אך אומרים 50% של התלמידים". נשאלת השאלה האם רק לא נוהגים או שאי-אפשר להחליף חצי מטר ב- 50% מטר?

מאחר שאחוזים מתארים חלק של כמות הם אינם מספרים כמו שברים. לשברים יש תפקידים רבים ורק אחד מהם הוא תיאור חלק של כמות, לכן ניתן להחליף את השבר באחוז רק כאשר הוא מתאר חלק של כמות. לפי משלר (1969): "האחוזים אינם אלא שמות אחרים למספרים אולם בדבר אחד הם נבדלים מהמספרים: ברוב המקרים משתמשים בהם כאופרטורים" (operators). רובינזון ביחד עם עמיתיה בשנת 2000 (רובינזון, תעיזי, ענבר, וקורן, 2000) נותנות כבר התייחסות שונה אל האחוז (מאשר ההתייחסות שניתנה בשנת 1989), "לפעמים נוטים להציג את האחוז כשם נוסף לשבר (פשוט או עשרוני). אך בעוד שהשברים מייצגים מספרים, האחוז מייצג חלק של כמות. לדוגמה: במקום לכתוב 1/4 משטח הריבוע, אפשר לרשום 25% משטח הריבוע, אבל אי-אפשר להחליף את 1/4 ב- 25% במשפט: שטח הריבוע הוא 1/4 מ"ר. גם אי-אפשר לכתוב 25% במקום 1/4 בתרגיל 3+1/4 וכן לא ניתן להחליף 25% במקום 1/4 על ציר המספרים."

חשוב לערוך דיון עם המורים על משמעות האחוז. הצעה לעריכת דיון מופיעה בסעיף ב: פעילות – משמעות מושג האחוז.

2. ההיסטוריה של מושג האחוז

בספרות אפשר למצוא מעט על ההיסטוריה של התפתחות מושג האחוז והסיבות להיווצרותו, לעומת זאת אפשר למצוא התייחסות לסימן %.

ניתן לראות בהיסטוריה של האחוז, שהשימוש בו השתנה במשך השנים.

מספרו של Smith (1898) אפשר ללמוד, שהצורך בשבר עשרוני הורגש הרבה לפני המצאתו וזאת מתוך השימוש בחישובים עם שברים כמו: $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{20}$. צורך זה גרם להולדת המושג אחוז שתפס את מקום השבר העשרוני וכיום מסומן בסימן %.

אפשר ליחס את המצאת מושג האחוז לרומאים, שהיו מחשבים $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{25}$, בתשלומי מיסים עבור שחרור מעבדות או במכירת עבד וכו'. כלומר, מבלי להכיר את המושג אחוז, הם השתמשו בו בשברים שקל להפוך את המכנה שלהם ל- 100.

בימי הביניים, במערב ובמזרח כאחד, התעורר הצורך בסוגים רבים יותר של מטבעות, וזה הוביל לשימוש ב- 100 כבסיס לחישובים.

במאה ה- 15 באיטליה ניתן היה למצוא דוגמאות רבות של התבטאויות כמו: 100 p 20, X p cento, VI p c כלומר, 20%, 10%, 6%. בעבודה של Chiarino (1481) נעשה שימוש ב- XX per C עבור 20%. ו- X perceto in VIII עבור 8 מתוך 10%.

גם Borghi (1484) ו- Pellos (1492) השתמשו במושג והכירו בחשיבותו.

בתחילת המאה ה- 16 השתמשו במושג האחוז עבור חישובים מסחריים כמו ריבית, רווח והפסד.

בתחילת המאה ה- 17, החישוב נעשה בדרך כלל במאיות, וכן הופיע השימוש בו בחישובים של רווח והפסד. אפשר לראות זאת בכתבי Mellis (1594) בהם נעשה השימוש באחוז בדרך עקיפה בלבד, אך בספרים רבים אחרים הוצגו בעיות אחוזים ממש כפי שהן מוצגות כיום.

מקור הסימן %

הצורה הראשונית של הסימן %, נמצאה במאה ה- 15 בחישובים מסחריים שם הופיע כ- per c, או p c שפירושו per cento, כלומר, מאית.

באמצע המאה ה- 17 הסימן התפתח לצורה per $\frac{0}{0}$. מאוחר יותר ה "per" הושמט, וכך נשאר הסימן $\frac{0}{0}$, שבמשך הזמן שינה צורתו לסימן המודרני %.

באמריקה מציינים כיום אחוז בסימן %, בעוד שבאנגליה ובכמה ארצות אחרות משתמשים בביטוי per cent (שפירושו מאית).

לדוגמה: באמריקה 6% מתפרש כ- 0.06 (שש מאיות) כלומר הסימן % מייצג מאיות. בעוד שבאנגליה ייכתב 6 per cent ופירושו גם כן שש מאיות.

ואמנם ניתן לראות כי במאות ה- 15 וה- 16 השתמשו דווקא בביטוי per cent במקום הסימן % השימושי כיום ברוב הארצות.

בספרו של A history of mathematical notations - (1993) Florian Cajori, מובאים דבריו של (Smith ,1898) ביחס למקור הסימן %.

Smith כותב שבאיטליה בשנת 1425 השתמש סופר לא ידוע בסימון, שהתפתח באופן טבעי לאחר מכן לסימן %. במקום לרשום "Per 100" או "p 100" או "p cento" כפי שכתבו עד אז, הוא כתב "p 0" בשביל "p c" כמו שהאיטלקים כתבו עד אז ....1,2 עבור primo, secando etc.

וכך הפך הסימן ב- 1650 ל- $\frac{0}{0}$, כאשר לפירוש המקורי לא נשאר זכר.

יותר מאוחר ה-"per" הושמט, וכך נשאר הסימן $\frac{0}{0}$ או %.

3. דרכים לפתרון בעיות אחוזים

אחוזים הם מקרה פרטי של פרופורציה. אפשר לראות, שכל הבעיות באחוזים נגזרות מן הפרופורציה היסודית $a / b = p / 100$.

קיימים שלושה סוגי מטלות:

1. מציאת הכמות a המהווה p% מהכמות b (נקרא למטלה זו מכאן ואילך "תמורת האחוז");
2. מציאת האחוז p שמהווה הכמות a מהכמות b (להלן "האחוז");
3. מציאת הכמות b אם ידוע כי p% ממנה היא הכמות a (להלן יקרא "הגודל היסודי");

את כולן ניתן לפתור במספר דרכים שונות (ראו **שקף מס' 1**), אך כולן מתבססות בעצם על פרופורציה.

א. **שיטת הפרופורציה** (Allinger, 1985)

מגדירים פרופורציה כשוויון בין שתי מנות של מספרים טבעיים.

מסמנים: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (a,b,c,d טבעיים)

לדוגמה:

בבית החרושת מייצרים 1000 גולות ביום, 5% מהגולות פגומות.

כמה גולות פגומות מיוצרות ביום?

פתרון:

$$\frac{\text{חלק}}{\text{שלם}}=\frac{n}{1000}=\frac{5}{100}$$

$$n=\frac{5\times1000}{100}$$

$$n = 50 \text{ גולות}$$

שיטה זו טובה יותר מהאחרות, מכיוון שפרופורציה היא נושא רחב המכיל תת נושאים רבים וביניהם גם "אחוז", כך שאם התלמיד ישלוט היטב בשיטת הפרופורציה, סביר להניח, שישלוט גם באחוז, שהוא מקרה פרטי של פרופורציה.

ב. **שיטת פקטור פקטור – "מציאת החלק מהשלם"** (Allinger, 1985)

לדוגמה: הבעיה הנ"ל תיפתר באופן הבא:

פתרון: 5% של $1000 = n$

(חלק) (שלם)

$$n = \frac{1000 \times 5}{100}$$

$n = 50$ גולות

שיטה זו שימושית ביותר, אך לדעתנו, אינה טובה, מכיוון שהיא מעודדת שימוש בנוסחאות וחוקים ללא הבנה, ויכולה לגרום לקשיים בהבנת מושג האחוז.

ג. **טבלת התאמה – "ערך משולש"** (אחת שתיים שלוש, תשמ"ו)

לדוגמה: הבעיה הנ"ל תיפתר באופן הבא:

הגולות שמייצרים ביום	1000	100%	השלם
הגולות הפגומות	?	5%	החלק

גולות $50 = \frac{1000 \times 5}{100} = ?$

לפי עיקרון זה אפשר לפתור בעיות משלושת סוגי המטלות כאשר בכל סוג של מטלה סימן השאלה יימצא במקום אחר.

שיטה זו שימושית למדי, ולדעתי, טובה יותר מקודמתה, אך עדיין לא מספיק טובה, מכיוון שגם בה יש אפשרות לשימוש בחוקים בצורה עיוורת ללא הבנה.

ד. **מציאת יחידה – אחוז אחד**

לדוגמה: הבעיה הנ"ל תיפתר באופן הבא:

כמה גולות ב- 1% של הגולות $\frac{1000}{100} = 10$

כמה גולות ב- 5% של הגולות $10 \times 5 = 50$

שיטה זו כמעט ואינה שימושית, אך לדעתי טובה, משום שהיא מעודדת מחשבה והבנה, והתלמיד צריך להבין את משמעות האחוז, כדי שיוכל לדעת כמה הם 1% מהכמות הכללית ומכאן להסיק כמה הם יותר מ- 1% של הכמות הכללית.

4. אסטרטגיות של ילדים בפתרון בעיות אחוזים

במחקרן של רנה הרשקוביץ ותרצה הלוי (1988) (או Hershkowitz & Halevi, 1998), הן התייחסו לארבעה סוגי אסטרטגיות. שלושה הראשונים שאינם מביאים לתשובה נכונה, ואילו סוג האסטרטגיה הרביעי מביא לתשובה נכונה.

4.1 אסטרטגיות שאינן מעידות על הבנת המושג

א. אסטרטגיות חיבוריות (רמה 1):

התלמיד מחבר או מחסר את הכמויות המוצגות בבעיה.

לדוגמה: איזה אחוז מהווה 72 מ- 140?

תשובת התלמיד: = 72 – 140 הם בערך 60 – 70 אחוז.

ב. אסטרטגיות של חילוק (רמה 1):

התלמיד מחלק את הכמויות הנתונות.

לדוגמה: כמה הם 48% של 150?

תשובת התלמיד: בערך 3% של 150

כי - בערך $3 = \frac{150}{48}$

4.2 אסטרטגיות המשקפות הבנה כלשהי של מושג האחוז

א. אסטרטגיות חיבוריות (רמה 2):

התלמיד מבצע איזושהי מניפולציה אדיטיבית עם הכמויות הנתונות ומייחס אותן אדיטיבית למערכת שונה האמורה להעביר באופן כלשהו את התוצאה לאחוזים.

לדוגמה: איזה אחוז מהווה 120 מתוך 140?

תשובת התלמיד 80%

כי $140 - 120 = 20$

$100 - 20 = 80$ לכן 80%

ב. אסטרטגיות של חילוק (רמה 2):

נמצאו בדרך כלל במטלות מהסוג השני (מציאת האחוז).

- התלמיד בודק כמה פעמים הכמות הקטנה יותר מוכלת בכמות הגדולה יותר $(b : a)$.

דוגמה: איזה אחוז מהווה 72 מתוך 142?

תשובת התלמיד: 2% וקצת, כי 140 מחולק ב- 72 הם בערך 2 פעמים.

- התלמיד מבצע את החילוק ההפוך $(a : b)$.

דוגמה: כמה אחוזים בערך הם 72 מתוך 140?

תשובת התלמיד $\frac{1}{2}\%$, כי 72 הם בערך חצי של 140.

4.3 אסטרטגיות המובילות לתשובה הגיונית

- שיפוט כמותי גלובלי:

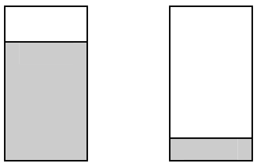
התלמיד נעזר בשיפוט גלובלי כדי להעריך את הגדלים היחסיים של הכמויות הניתנות בתרגיל.

דוגמה:

השלם: הכמות בכלי ב היא בערך __________ מהכמות שבכלי א.

תשובת התלמיד: בכלי ב הכמות היא בערך 25% מהכמות,

מפני שבכלי ב כמעט אין כלום ובכלי א יש כמעט הכל.



ב   א

- שימוש בחצי (כפל בשניים) וברבע (כפל בארבע)

דוגמה: איזה אחוז מהווים 260 מתוך 367?

תשובת התלמיד בערך 65%,

מפני שההפרש בין 367 ל- 260 בערך 100, כך ש- 260 זה יותר מחצי לכן זה בערך 65%.

4.4 אסטרטגיות המובילות לתשובה נכונה

אסטרטגיות המתבססות על פרופורציה:

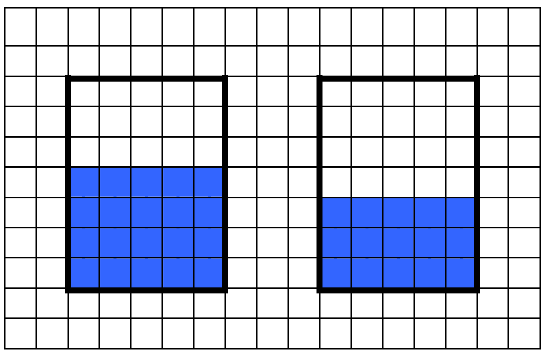
דוגמה: שים 75% מהכמות שבכלי א בכלי ב

תשובת התלמיד:

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$75\% = \frac{75}{100}$$

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$



ב.   א.

5. הקשר בין אחוזים ופרופורציה

האחוזים הם מקרה פרטי של פרופורציה.

אפשר למצוא חיזוקים לטענה זו בכל הפרקים הקודמים:

- הגדרת מושג האחוז: יחס בין מספר לבין המספר 100.
  כאשר היחס הוגדר: מנת החילוק של שני גדלים (מספרים טבעיים)
  הסימון: $\frac{a}{b}$ (a , b טבעיים).
- שימוש באחוזים בפתרון בעיות: כל הבעיות שעוסקות באחוזים נגזרות מן הפרופורציה היסודית
  $\frac{a}{b}=\frac{p}{100}$
- פרופורציה הוגדרה:
  שוויון בין שתי מנות של מספרים טבעיים. (כלומר השוואה בין שני יחסים)
  מסומן: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (a,b,c,d טבעיים)
- אסטרטגיות לפתרון בעיות אחוזים: כל ארבע האסטרטגיות לפתרון בעיות אחוזים (שהובאו בסעיף 3) מתבססות על פרופורציה.
  מכאן אפשר לראות שבעצם אחוזים הם מקרה פרטי של **פרופורציה.**

ב. פעילות – משמעות מושג האחוז

א. המורים ידונו בקבוצות מהו אחוז והאם אחוז הוא מספר.

ב. המורים יפתרו את דף הפעילות **בנספח 1** (הפעילות לקוחה מ: רובינזון, נ', תעיזי, נ', ענבר, י', קורן, מ', 2000). **לומדים מתמטיקה, על המספרים, מדריך למורה**. מכון ויצמן למדע, רחובות, (עמ' 316).

ג. ייערך דיון במליאה, האם אחוז הוא מספר? ומהו אחוז?

לעריכת הדיון ניעזר בסעיף 1.1 ו- 1.2.

כשאלה נוספת לדיון נביא את השאלה הבאה:

מה דעתכם על הציר הבא?

האם אפשר להחליף על הציר את ($-\frac{1}{4}$) ב- (25%-)? הסבירו תשובתכם.

שאלה זו באה להמחיש למורים שאחוז אינו סתם מספר ואין משמעות ל- 50% ול- (25%-) על ציר המספרים.

ג. פעילות – אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות אחוזים

א. המורים יפתרו את דף הפעילות **בנספח 2** שמופיעים בו שלושת סוגי בעיות האחוזים. טעות נפוצה בתרגיל 2 היא חישוב תמורת האחוז במקום מציאת השלם על-פי חלקו. כלומר, חישוב: $20\times80/100 = 40$

ב. מתוך תשובות המשתלמים ניתן לצאת לאסטרטגיות השונות לפתרון בעיות באחוזים (ראו סעיף א3)

ג. ייערך דיון בטעויות הנפוצות של תלמידים (ראו סעיף א4).

ד. גורמים עיקריים לקושי בתפיסת מושג האחוז

סיכום היחידה יעשה על-ידי הבאת הגורמים העיקריים לקושי בתפיסת מושג האחוז המופיעים ב**שקף מס' 2**.

מקורות

האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים משרד החינוך והתרבות, **תכנית לימודים במתמטיקה**, תשמ״ח, 1988.

האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים משרד החינוך והתרבות, **תכנית לימודים במתמטיקה**, תשס״ד, 2004.

הרשקוביץ, ר׳, והלוי, ת׳ (1988). קדימה אל האחוזים. **מספרים: עלון למורי המתמטיקה**, ב׳(2), 3-15.

מילר, א׳ (1989). **מתמטיקה חלק א׳** (עמ׳ 43). אינטגרל.

משלר, מ׳ (1974). **אלגברה לשנת הלימודים השביעית**, (עמ׳ 358). עם עובד, תל-אביב.

רובינזון, נ׳ (1989). **פרקי מתמטיקה: על המספרים ספר א׳** (עמ׳ 145). מכון ויצמן למדע, גסטליט חיפה.

רובינזון, נ׳, תעיזי, נ׳, ענבר, י׳, וקורן, מ׳ (2000). **לומדים מתמטיקה, על המספרים, מדריך למורה**, (עמ׳ 289-339). מכון ויצמן למדע, רחובות.

שמואלי, נ׳ (1993). **תפיסת מושג האחוז**. עבודת גמר לתואר מוסמך, אוניברסיטת תל-אביב: תל-אביב.

Allinger, G. D. (1985). Percent calculators and general mathematics. *School Science and Mathematics*, 85, 567-573.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publications.

Gibson, C. (1981). *The Dictionary of Mathematics*. London: Sydney and Auckland.

Hershkowitz, R., & Halevi, T. (1988). Initial research into the understanding of percentages. *Proceedings of the 12th PME conference, Hungary, Vol II,* (pp. 393-401).

Smith, D. E. (1898). *History of mathematics*, *Vol II, (pp. 247-250)*. New York: Dover Publications.

נספחים נספח 1

הצעה למשימות נוספות לשיעור - האם אחוז הוא מספר? לתלמיד

7

בסעיפים הבאים רשומים שברים פשוטים ועשרוניים.
נסו לכתוב אחוזים במקום השברים. האם תמיד אפשר? אם לא, נמקו.

א) $\frac{1}{4}$ מתלמידי הכיתה משתתפים בחוג לדרמה.

ב) $\frac{1}{2}$ משטח הריבוע צבוע.

ג) $\frac{1}{2}$ הוא המספר הנגדי ל- $-\frac{1}{2}$.

ד) $\frac{1}{4}$ של 60 גדול מ- $\frac{1}{5}$ של 50.

ה) אורך הכביש בין שני מקומות הוא $1\frac{1}{2}$ ק"מ.

ו) בריבוע שאורך כל צלע שלו 0.5 ס"מ, השטח הוא 0.25 סמ"ר.

ז) המחיר החדש הוא פי 1.25 מהמחיר הקודם.

ח) שטח החדר הגדול הוא פי $2\frac{1}{2}$ משטח החדר הקטן.

ט) מחירו של כל עט $2\frac{1}{2}$ ש"ח.

י) אורך השולחן 2.5 מ'.

דונו בקבוצה ונסו להסביר: מתי ניתן לרשום אחוזים במקום מספרים (שהם שברים פשוטים או עשרוניים)?
הביאו דוגמאות נוספות.

מתוך הספר: **לומדים מתמטיקה, על מספרים, מדריך למורה** (2000). המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

נספח 2

שאלות בנושא אחוזים

1. בכיתה 20 תלמידים, מהם 16 בנים. איזה אחוז מהוות הבנות בכיתה?

2. 32% ממספר מסוים הם 80. מהו המספר?

3. לאדם 900 שקלים, הוא הוציא 49% מהם עבור מזון וביגוד.
העריכו (ללא חישוב) כמה שקלים הוציא? הסבירו.

שקף מס' 1

אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות אחוזים

מחיר שמלה 200 ש"ח.
בסוף העונה ניתנה בחנות הנחה של 20% על כל הפריטים.
מה גובה ההנחה בשקלים שניתנה על השמלה ?

1. **האלגוריתם הסטנדרטי:**

תמורת האחוז = האחוז X השלם

40 ש"ח = $\frac{20}{100}$ X 200

2. **פרופורציה:**

$$\frac{\text{האחוז}}{100} = \frac{\text{תמורת האחוז}}{\text{השלם}}$$

$$\frac{20}{100} = \frac{40}{200}$$

שקף מס׳ 1 - המשך

3. "ערך משולש"

שקלים	אחוזים	
200	100	השלם
20	?	החלק

$$? = \frac{200X20}{100} = 40$$

4. מציאת היחידה:

כמה שקלים באחוז אחד? $\frac{200}{100} = 2$ ש"ח

כמה שקלים ב 20%? $2X20 = 40$ ש"ח

שקף מס' 2

גורמים עיקריים לקושי בתפיסת מושג ה"אחוז"

א. קשיים קוגניטיביים התפתחותיים:

* אחוזים הם מקרה פרטי של פרופורציה, ופרופורציה היא סכמה שנרכשת בשלב הפורמלי.

ב. חוסר הבנה וחוסר ידע בבעיות שברים:

* אחוז מוגדר כשבר שמכנהו 100.

חוסר הבנה וחוסר ידע במושג השבר גורם לקושי גם בבעיות אחוזים.

שקף מס' 2 - המשך

ג. קושי הנובע מעצם הגדרת המושג אחוז ואופן ייצוגו.

* אחוז מוגדר כיחס, מוצג כמספר רציונלי ומשתמשים בו גם כיחס וגם כמספר רציונלי.

ד. קשיים הנובעים מההוראה:

* אי התאמה בין הוראת אסטרטגיות לפתרון בעיות לבין הרמה הקוגניטיבית של התלמיד.
* הוראת פתרון בעיות אחוזים באסטרטגיות המתבססות על נוסחאות בלבד, ללא הבנה.