

נושא 1: הבנת משמעות סימן השוויון



תלמידים בבית ספר יסודי מפרשים את סימן החיבור ואת סימן השוויון במונחי פעולות שיש לבצע (Ginsburg 1977). פישיבין (1995), טוען כי תלמידים אינם נוטים לפרש את סימן השוויון במונחי שקילות, אלא, באמצעות מודל של קלט-פלט, שהוא חסר תכונות של סימטריה ורפלקסיביות. לפי מודל זה (קלט-פלט), בצד שמאל של המשוואה מופיעים המרכיבים הראשוניים, ואילו בצד ימין מופיעה התוצאה. לכן לטענתו, תלמידים מתנגדים לתבנית פסוק כמו $3 + 4 = \square$ וחושבים שהתבנית נרשמה הפוך. Ginsburg, מצא כי תלמידים מתנגדים לפסוק כמו $3 = 3$, כי הם חושבים שהוא חסר משמעות בהיותו מנוגד לרעיון שסימן השוויון מבטא תהליך שבסופו מתקבלת תוצאה מסוימת בעקבות שילוב של מספר מרכיבים. Kieran (1981), טוענת כי פסוק כמו, $4 + 5 = 3 + 6$, עלול ליצור קשיים, כי תלמידים חושבים שלאחר סימן השוויון " $=$ " יש לרשום תשובה ולא "תרגיל" נוסף.



פישיבין, א. (1995). מודלים סמויים וחשיבה מתמטית. על"ה, 16, האוניברסיטה העברית בירושלים – המרכז להוראת המדעים. עמ' 32-37.

Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic*. New York: Van Nostrand,

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

מפגש זה מורכב משלושה חלקים:

- חלק I – מפגש בנושא תפיסת מושג השוויון אצל תלמידים
- חלק II – התנסות בכיתה
- חלק III – מפגש בעקבות ההתנסות בכיתה.

חלק I – תפיסת מושג השוויון אצל תלמידים



- להכיר את הבעיה שבתפיסת מושג השוויון אצל תלמידים בבית הספר היסודי
- להיחשף לרעיונות שונים לטיפול בבעיית תפיסת מושג השוויון.



90 דקות.



נספחים:

- [סיפור אירוע \(נספח 1\)](#)
- [שקף המתאר ממצאי מחקר בנושא השוויון \(נספח 2\)](#)
- [דף משימה להתנסות בכיתה \(נספח 3\)](#)
- [לקט תשובות של תלמידים \(נספח 4\).](#)
- מאמר "הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה":

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T.P. (1999). Children's Understanding of Equality:

A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*.

תרגום עברי של המאמר מופיע בכתובת:

[http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles\(pdf\)/article10.pdf](http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles(pdf)/article10.pdf)

עזרים:

- שקפים ריקים
- טושים.



1. הכרת עם סיפור האירוע
2. ניתוח האירוע
3. איסוף הרעיונות והצגתם במליאה
4. סיכום ממצאי מחקר בנושא השוויון והצגתם
5. מטלה: משימת התנסות.

1. הכרת סיפור האירוע

מטרת שלב זה היא להכיר למורים את הסיפור ואת תחום התוכן המוצג באירוע.

הפעלה: מחלקים את סיפור האירוע, ומבקשים מהמורים לקרוא את הסיפור (נספח 1) ולחשוב על:

- תחום התוכן המתמטי הקשור לאירוע
- הבעיה בסיפור, המקור לבעיה ודרכי טיפול.

סיפור האירוע (נספח 1)

שמי: המורה יונה ואני מלמדת בכיתה א'.

נתתי לתלמידי את הבעיה $6 + \square = 5 + 4$. **כל** התלמידים חשבו שיש לרשום במקום הריק את המספר 9. לכן, החלטתי להמחיש עם הילדים את הבעיה. הכנו ערימה של 4 קוביות. לאחר מכן הכנו ערימה של 5 קוביות, ושמונו במקום אחד. במקום אחר, הכנו ערימות של 9 קוביות ושל 6 קוביות.

שאלתי את הילדים, האם בכל סידור יש מספר שווה של קוביות?

הילדים ידעו שמספר הקוביות בכל סידור לא היה שווה ואפילו ידעו להגיד איפה יש יותר קוביות.

מספר ילדים ידעו לומר לי כיצד ניתן ליצור מצב שבשתי הקבוצות יהיה מספר שווה של קוביות.

למרות זאת, גם לאחר שעשו פעולה זו, הילדים עדיין חשבו שיש לרשום את המספר 9 במקום הריק במשוואה.

האירוע הזה ממש הפתיע אותי. ההנחה שלי הייתה שלתלמידי כיתה א' לא תהיה בעיה עם סימן השוויון כי אין להם עדיין הבנות שגויות, והניסיון שלהם עם סימן השוויון הוא מועט.

משימה:

- קראו את סיפור האירוע
- חשבו על: מהי הבעיה בסיפור?, מה המקור לבעיה?, דרכים לטיפול בבעיה.

2. ניתוח האירוע

מטרות שלב זה:

- לעודד שיח עמיתים בבעיה בהוראת מתמטיקה המוכרת לכל מורה בכל שכבת גיל
- לעודד דיון בתפיסות שגויות של תלמידים ובחשיבה של תלמידים
- למקד את הבעיה
- לדון בדרכים שונות לטיפול בקושי.

הפעלה: לאחר שכל חברת צוות קראה את האירוע וחשבה על שלוש השאלות, מתכנסים לקבוצות עבודה (רצוי שצוות מורים מאותו בית ספר יהיה קבוצת עבודה). דנים בכל אחת מהשאלות ומגבשים

תשובות ורעיונות להצגה במליאה.

את הרעיונות רושמים על שקף לצורך הצגה זו.

3. איסוף הרעיונות והצגתם במליאה

מטרות שלב זה:

- לחשוף את הצוותים לרעיונות נוספים שעלו בקבוצות אחרות
- ליצור אינטראקציות בין מורים מבתי ספר שונים.

הפעלה: כל אחת מקבוצות העבודה מציגה את הרעיונות שלה במליאה.

במקרה זה חשוב לקבוע "תרבות דיון". רצוי שכל קבוצה תציג את הרעיונות שלה ורק לאחר מכן, יינתן זמן לתגובות, לשאלות ולתשובות.

להלן מבחר של דעות ורעיונות שהוצגו במפגשים שונים:

מקור הבעיה

- לילדים יש הבנה מוגבלת של מושג השוויון ושל סימן השווה
- סימן השוויון מבטא, עבור התלמידים, תהליך המביא לתוצאה
- התלמידים רואים את השוויון כמבנה בעל שני אגפים: באגף השמאלי, תרגיל, בימני, תוצאה
- תלמידים מסתכלים על ה"שווה" כעל סימן "לעשות משהו" ולא כעל סימן המתאר יחס
- יש לתלמידים הבנה של יחסי שוויון בין קבוצות של עצמים. אך, יש קושי לקשר הבנה זו עם ייצוגים סימבוליים של סימן השוויון.

דרכים לטיפול

- להציג את מושג השוויון כיחס ולא כתוצאה של תרגיל כבר בשלב הראשון של הקנייתו.
- להרבות בתרגילים מן הסוגים הבאים:

א. סמנו בעיגול פסוקים שהם פסוקי אמת.

$$8 + 2 = 10 + 4$$

$$7 = 3 + 4$$

$$7 + 4 = 15 - 4$$

$$12 - 5 = 9$$

$$8 = 8$$

$$7 + 3 + 2 = 7 + 5$$

$$7 + 8 = 7 + 7 + 1$$

$$17 - 9 = 17 - 10 + 1$$

$$45 - 18 = 45 - 20 - 2$$

ב. השלימו כך שיתקבלו פסוקי אמת.

$$8 + 4 = \underline{\quad} + 5$$

$$7 + 8 = \underline{\quad} + 10$$

$$\underline{\quad} = 9 + 5$$

- לתת לתלמידים לכתוב בעצמם פסוקי אמת ושקר כדוגמת הפסוקים שבסעיף הקודם
- לעודד דיונים כיתתיים בפסוקים. אפשר לרשום פסוקים על הלוח ולשאל את התלמידים האם הפסוקים הם פסוקי אמת או שקר.

4. סיכום ממצאי מחקר בנושא השוויון והצגתם

לסיכום הפעילות והדיון באירוע מציגים ממצאי מחקר¹ של פוקנר וחברים שנעשה בארה"ב. מטרתו של המחקר הייתה לבדוק את הבנת סימן השוויון בקרב ילדים בני 6 - 12: מה ילדים מבינים בנושא שוויון והסימן "שווה".

במסגרת המחקר, מורים נתבקשו להציב בפני תלמידיהם את התרגיל:

$$8 + 4 = _ + 5$$

תוצאות המחקר מוצגות בטבלה שלהלן:

טבלה: אחוז הילדים המציעים פתרונות מגוונים לתרגיל: $8 + 4 = _ + 5$ (נספח 2)

סה"כ ילדים	אחר	12 ו- 17	17	12	7	תשובות
						כיתה
42	14	0	7	79	0	א
84	20	0	20	54	6	א+ב
174	15	14	10	55	6	ב
208	5	5	20	60	10	ג
57	11	30	44	9	7	ד
42	0	0	45	48	7	ה
145	0	2	14	84	0	ו

כפי שניתן לראות, ממצאי המחקר מפתיעים במיוחד:

- אחוז נמוך מאד של תלמידים ענו נכון בכל שכבות הגיל: בכיתות הנמוכות, הבינוניות והגבוהות
- כל 145 תלמידי כיתה ו' שקיבלו את הבעיה, חשבו שיש לשים בתוך המשבצת הריקה את המספר 12 או את המספר 17 או את שניהם.
- כשליש מתלמידי כיתה ד' חשבו שבתוך המשבצת אפשר לכתוב שני מספרים שונים.

¹מתוך המאמר: הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה.

במאמר, החוקרות מציגות הסברים שונים לבעיה:

- ילדים בכיתות היסוד חושבים בדרך כלל שהסימן "שווה" משמעו, שעליהם לבצע את החישוב שמופיע לפניו וכי המספר הבא אחרי סימן השוויון הינו התשובה של אותו החישוב.
 - הילדים אינם תופסים את השוויון כיחס המבטא את הרעיון - ששני ביטויים מתמטיים מתארים ערך זהה.
 - ילדים בכיתות היסוד אינם תופסים על פי רוב כי סימן השוויון הוא סמל המבטא את היחס "הינו שווה ל-".
 - קיים מגוון מועט ביותר של שימושים בסימן השוויון במהלך השיעורים. בדרך כלל, סימן השוויון מופיע בסופה של המשוואה ואחריו מופיע רק מספר אחד.
- הצגת הממצאים בפני המורים גורמת בדרך כלל פליאה וספקנות רבה. אפשר לשמוע התבטאויות כמו: "זה לא יכול להיות", "אצלי בכיתה זה לא יקרה", "מעניין איפה עשו את המחקר הזה?", "מעניין מי האוכלוסיה?" ועוד. לכן, חשוב לתת למורים להתנסות בכיתתם.

5. מטלה: משימת התנסות

מטרת השלב הזה, לעודד את המורים להתנסות בכיתתם. להתנסות זו מספר יתרונות:

- למידה מהי הבנת התלמידים שלהם, את המושג שוויון והסימן השוויון
- עידוד המורים להיות במצבים של "מורה החוקר את עבודתו"
- יצירת קשר בין הנעשה בהשתלמות לבין תהליך ההוראה למעשה בכיתות.

הפעלה: מבקשים מכל מורה לערוך ניסוי בכיתה.

הצעה למהלך הניסוי (נספח 3):

- בוחרים משימה אחת מתוך שלוש המשימות שבנספח 3
- מטילים על התלמידים את המשימה ובודקים את ביצועה;
- בוחרים שלוש תשובות או טעויות מפתיעות במיוחד ורושמים אותן
- מראיינים את אחד התלמידים שתשובתו הפתיעה, כדי לנסות ולהבין "איך תלמידים חושבים" או מהו מקור הטעות, ומתוך כך מחליטים על דרכי טיפול.

חלק II – התנסות בכיתה



- לפתח אצל המורים תהליכים רפלקטיביים על ההוראה
- לעודד את המורים לחקור את עבודתם;
- לעודד את המורים לחשוב על "איך תלמידים חושבים".

בין המפגשים (המפגש המתואר בחלק I ובחלק II), המורים מתבקשים:

- להעביר בכיתתם תרגיל אחד מתוך התרגילים שבנספח 3
- לאסוף את התשובות, ולרשום שלוש טעויות מפתיעות במיוחד
- לראיין תלמיד אחד שענה תשובה מפתיעה במיוחד
- להכין את הממצאים להצגה במפגש הבא שיתקיים בנושא.

חלק III – בעקבות ההתנסות בכיתה



- להכיר את הבעיה בתפיסת מושג השוויון אצל תלמידים בבית הספר היסודי בכלל ובכיתה האישית בפרט
- לנסות להבין איך תלמידים חושבים
- לעודד את המורים לחקור את דרך עבודתם
- לעודד את המורים לחשיבה רפלקטיבית על עבודתם
- לפתח צוות מורים מקצועי להתייעצות ולתמיכה.



כ-90 דקות.



ספרי לימוד בחשבון לפי תוכניות שונות ולשכבות הגיל השונות. ספרי הלימוד ישמשו לעיון וקבלת רעיונות בשלב הכנת הפעילויות.

עזרים:

- שקפים ריקים
- טושים



1. הצגת ממצאים
2. הכנת פעילויות
3. הצגת הפעילויות
4. סיכום.

1. הצגת הממצאים

מטרות השלב הזה:

- להכיר קשיים בתפיסות של תלמידים בבית הספר היסודי את המושג "שוויון"
- לגרום למורים להבין שהקושי הזה נפוץ.

הפעלה: מבקשים מהמורים להציג את הממצאים שלהם במליאה. כדי לא להעמיס, כדאי לבקש מכל מורה לדווח רק על ממצאים שעדיין לא דווחו. אפשר להסתפק בשלוש הצגות. בנספח 4 יש ללקט תשובות של תלמידים.

2. הכנת פעילויות

מטרות השלב הזה

- לעודד עבודת צוות
- להתנסות בהכנת פעילויות לצורך טיפול בבעיה.

הפעלה: - מתארגנים בקבוצות עבודה. בשלב זה אפשר להתארגן לקבוצות עבודה על פי שכבות גיל, או לפי בתי ספר.

- מכינים פעילויות לטיפול בקשיים שנידונו. אפשר להיעזר בספרי הלימוד השונים הנמצאים בכיתה.

- כותבים את הרעיונות לפעילויות על שקף לצורך הצגתם במליאה.

3. הצגת הפעילויות

מטרות השלב הזה:

- להיחשף לרעיונות חדשים
- להרחיב את קהילת המורים המקצועית מצוות של בית הספר לקהילת מורים מבתי ספר שונים.

הפעלה: צוותי העבודה מציגים את שקף הפעילות שהכינו:

- הנושא והבעיה
- מטרות הפעילות
- הפעילות
- פירוט של הבעיות שהפעילות מטפלת בהן וכיצד.

4. סיכום

מטרת השלב הזה:

- לסכם את תהליך הטיפול בנושא משמעות סימן השוויון בפרט וניתוח אירועים בכלל
- לסכם מהו הידע החדש שקיבלו המורים בתחום התוכן המתמטי והפדגוגי
- לסכם מהם הרעיונות החדשים שקיבלו המורים בתהליך.

הפעלה: במליאה, מבקשים מכל המורים לבחור דבר אחד שהם מתכוונים להכניס ל'ארגז הכלים' שלהם בעקבות ההתנסות. כלומר, לספר על דבר אחד שבכוונתם לנסות בכיתה.



משמעות סימן השוויון

סיפור האירוע

שמי: המורה יונה ואני מלמדת בכיתה א'.

נתתי לתלמידי את הבעיה $6 + \square = 5 + 4$. **כל** התלמידים חשבו שיש לרשום במקום הריק את המספר 9. לכן, החלטתי להמחיש עם הילדים את הבעיה. הכנו ערימה של 4 קוביות. לאחר מכן הכנו ערימה של 5 קוביות, ושמונו במקום אחד. במקום אחר, הכנו ערימות של 9 קוביות ושל 6 קוביות. שאלתי את הילדים, האם בכל סידור יש מספר שווה של קוביות? הילדים ידעו שמספר הקוביות בכל סידור לא היה שווה ואפילו ידעו להגיד איפה יש יותר קוביות. מספר ילדים ידעו לומר לי כיצד ניתן ליצור מצב שבשתי הקבוצות יהיה מספר שווה של קוביות. למרות זאת, גם לאחר שעשו פעולה זו, הילדים עדיין חשבו שיש לרשום את המספר 9 במקום הריק במשוואה. האירוע הזה ממש הפתיע אותי. ההנחה שלי הייתה שלתלמידי כיתה א' לא תהייה בעיה עם סימן השוויון כי אין להם עדיין הבנות שגויות, והניסיון שלהם עם סימן השוויון הוא מועט.

המשימה:

- קראו את סיפור האירוע
- חשבו
 - מהי הבעיה בסיפור?
 - מאין לדעתכם נובעת הבעיה?
 - מה אפשר לעשות?

מתוך המאמר: הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה²

טבלה: פתרונות תלמידים לתרגיל $8 + 4 = _ + 5$

המספרים בטבלה מציינים אחוזי הצלחה

סה"כ ילדים	אחר	12 ו- 17	17	12	7	תשובות
						כיתה
42	14	0	7	79	0	א
84	20	0	20	54	6	א+ב
174	15	14	10	55	6	ב
208	5	5	20	60	10	ג
57	11	30	44	9	7	ד
42	0	0	45	48	7	ה
145	0	2	14	84	0	ו

² Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T.P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*.

תרגום עברי של המאמר (הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה) אפשר למצוא בכתובת:
[http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles\(pdf\)/article10.pdf](http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles(pdf)/article10.pdf)



משימת התנסות בהבנת נושא השוויון אצל תלמידים

1. בחרו אחת משלוש המשימות שלהלן
2. העבירו את המשימה בכיתתכם
3. אספו ורשמו שלוש תשובות שהפתיעו אתכם במיוחד
4. ראינו את אחד התלמידים שתשובתו הפתיעה אתכם ותעדו את הראיון.

המשימות:

1. השלימו ונמקו את תשובתכם

$$8 + 4 = \square + 5$$

הסבירו

$$9 - 4 = \square - 3$$

הסבירו

$$12 - 3 = 7 + \square$$

הסבירו

2. רשמו - מי גדול יותר, A או B ונמקו.

$$A = B + 2$$

3. סמנו נכון/לא נכון על יד כל אחד מהפסוקים הבאים. פרטו את השיקולים שלכם:

א. $4 + 5 = 9$ נכון/לא נכון

הסבירו _____

ב. $12 - 5 = 9$ נכון/לא נכון

הסבירו _____

ג. $7 = 3 + 4$ נכון/לא נכון

הסבירו _____

ד. $8 + 2 = 10 + 4$ נכון/לא נכון

הסבירו _____

ה. $7 + 4 = 15 - 4$ נכון/לא נכון

הסבירו _____

ו. $8 = 8$ נכון/לא נכון

הסבירו _____



לקט תשובות של תלמידים (האות בסוגריים מציינת את הכיתה)

1. השלימו את החסר ונמקו את תשובתך

$$8 + 4 = \square + 5$$

$$9 - 4 = \square - 3$$

$$12 - 3 = \square + 7$$

- עשיתי 8 ועוד 4 זה 12 ו 12 ועוד 5 שווה ל 17 וככה הסתיים התרגיל. (ד)
- איזה קשקושים אלה. מה היא עושה שטויות? (א)
- אין כזה תרגיל. סתם כתבת מספרים (א)
- זה כמו בתרגיל שרשרת, יותר משני מספרים שעושים ביניהם תרגיל. (ד)
- צריך להוסיף סימן "=" בסוף התרגיל. ה "=" באמצע הוא טעות. (ה)
- אני בכלל לא יודע למה יש את הצד השני (א)
- התשובה היא 17 כי הוספתי את כל המחוברים (א)
- כתב 13 בטענה: הוספתי עוד 1 כדי להוסיף תרגיל נוסף (א).
- לגבי התרגיל הראשון, התרגיל לא נכון כי צריך להיות תרגיל ותשובה ופה יש תרגיל שווה תרגיל (ג)
- לגבי התרגיל השני לא נכון כי בצד אחד תרגיל חיבור ובצד השני תרגיל חיסור (ג)

2. סמנו אמת או שקר על יד כל אחד מהפסוקים הבאים. פרטו את השיקולים שלכם:

1)	$4 + 5 = 9$	2)	$12 - 5 = 9$	3)	$7 = 3 + 4$
4)	$8 + 2 = 10 + 4$	5)	$7 + 4 = 15 - 4$	6)	$8 = 8$

- התרגיל $7 = 3 + 4$ הפסוק לא נכון. התשובה נכונה אבל, התרגיל הפוך (ו)
- התרגיל $7 = 3 + 4$ אי אפשר לעשות תרגיל הפוך שבצד שמאל תהייה התוצאה (ה)
- התרגיל $2 + 8 = 4 + 10$ הפסוק נכון כי $2 + 8 = 10$ ואם נוסיף עוד 4 זה יהיה שווה 14 (ו)
- התרגיל $4 + 7 = 15 - 4$ אי אפשר לעשות אחרי הסכום 15 תרגיל חיסור (ה)
- התרגיל $4 + 7 = 15 - 4$ הפסוק הוא שקר כי לא יכול להיות ש $7 + 4 = 15$ (ג)
- $8 = 8$ הוא פסוק שקר כי אין לו עוד מחובר (ג)
- $8 = 8$ לא נכון כי אין בו חיבור וחיסור (א).

3. רשמו מי גדול יותר ונמקו.

$$A = B + 2$$

$$\square = \triangle + 2$$

- B גדול יותר בגלל ש- B גדול פי 2 מ A ו A קטן מ B ב 2 (ו)
- A גדול יותר, כי A הוא התוצאה ותמיד התוצאה יותר גדולה (ו)
- B + 2 יותר גדול מכיוון ש A זה שלם ו B זה שני שלמים (ו)
- A יותר גדול כי זה כאילו 5. B זה כאילו 3 ואם נעשה ועוד 2 זה יהיה 5 (ו)
- המשולש יותר גדול כי מוסיפים לו 2 (א)
- הריבוע יותר גדול כי ריבוע יותר גדול ממשולש (א)
- הריבוע יותר גדול כי יש לו 4 צלעות ולמשולש רק 3 (א)
- המשולש והריבוע שווים כי יש את הסימן שווה "=" (א)
- B גדול יותר כי B הוא ועוד 2 ו A הוא לבד בלי ועוד (ו)
- B יותר גדול בגלל ש B אות יותר גדולה מ A (ו)
- יש טעות בתרגיל כי צריך לכתוב $\square + 2 = \triangle$ (ב)