

## נושא 2: מדוע הדרך שלי אינה טובה?

כפל מספרים מעורבים, חוק הפילוג המרחב



חוק הפילוג מופיע בתכנית הלימודים של בית הספר היסודי מכיתה ב' ועד כיתה ו'. בשנות הלימודים הראשונות, גם אם אין משתמשים בניסוחים פורמליים של החוק, משתמשים בחוק להקלה בחישובים כמו: הכפלת מספר דו ספרתי במספר חד ספרתי, הכפלת מספר דו ספרתי במספר דו ספרתי במאזן או במאונך (חוק הפילוג המורחב). ככל שמתקדמים בנושאי הלימוד השונים, השימוש בחוק הופך חלק אינטגרלי מלמידת פעולת הכפל של מספרים מתחומים שונים כגון: כפל שברים פשוטים, כפל מספרים מעורבים וכפל מספרים עשרוניים.

האירוע במפגש זה, עוסק בכפל מספרים מעורבים ומכאן, גם בחוק הפילוג המורחב. לעתים, מורים מלמדים לכפול לפי גישה מסוימת. התלמידים יודעים "מה לעשות" אבל אין אנו בטוחים כי הם אכן מבינים את התהליך: מדוע הוא פועל? מדוע הוא הגיוני? ומדוע הוא שימושי? יש לגרום לתלמידים לדעת מה לעשות ומדוע. חשוב שהתלמידים יבינו את התהליך ולא רק יצליחו לבצעו ברמה פרוצדורלית. ידיעת הכללים והיכולת ליישם הם מרכיבים חשובים מאד בבניית הידע של התלמיד. חשוב להבין כי הוראת תהליכים והמשמעות שלהם, הם שני דברים שונים ושניהם חיוניים ללמידה המשמעותית של המתמטיקה. היבט נוסף, שעלול להיות בעייתי - בתרגילי כפל מספרים מעורבים והשימוש בחוק הפילוג, התלמידים משתמשים בידע קודם בחיבור מספרים מעורבים. תרגול קודם וממושך בטכניקה של חיבור מספרים מעורבים (חיבור השלמים וחיבור השברים) מעודד תלמידים להשתמש באותה שיטה גם בתרגילי כפל הדומים להם מאד מבחינה חיצונית. לכן, תלמידים רבים כופלים מספרים מעורבים בהכפלת השלמים והכפלת השברים. בעיה נוספת שיכולה להתעורר בפתרון תרגילי כפל של מספרים מעורבים נובעת מהמודל האינטואיטיבי של כפל אצל תלמידים רבים - המודל של כפל כחיבור חוזר. מודל אינטואיטיבי זה מקשה מאד על תלמידים בפתרון תרגילי כפל של מספרים בהם הכופל הוא מספר רציונלי.



תירוש, ד. (1996). מתמטיקה מחקר והוראה. מכון מופ"ת.

Fuson, K. C. (2003). Toward computation fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics* 9, 6 pp 300-305

תרגום עברי של המאמר אפשר למצוא בכתובת:

[http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles\(pdf\)/article49.pdf](http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles(pdf)/article49.pdf)

Schultz, J.E. (1991). Area models- spanning the mathematics of grades 3-9. *Arithmetic Teacher* 39, 2 pp. 42-46

תרגום עברי של המאמר מופיע בכתובת:

[http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles\(pdf\)/article43.pdf](http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles(pdf)/article43.pdf)



- הכרת תפיסות בכפל מספרים מעורבים אצל התלמידים
- הכרת גישות שונות להוראת הנושא.



90 דקות.



**נספחים:**

- [אירוע: מדוע הדרך שלי אינה טובה? \(נספח 1\)](#)
- [שקפים וכרטיסים לדרכי פתרון \(נספח 2\)](#)
- פריסת הנושא "חוק הפילוג המורחב" בתכנית הלימודים

<http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/>

[http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot\\_Limudim/Math\\_Yesodi/PDF/](http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot_Limudim/Math_Yesodi/PDF/)

**עזרים:**

דפים ריקים, טושים, "תיק תק".



1. הכרת הקושי בכפל מספרים מעורבים
2. הכרת סיפור האירוע
3. ניתוח הבעיה
4. איסוף הרעיונות והצגתם במליאה
5. סיכום - חוק הפילוג בתכנית הלימודים.

1. הכרת הקושי בכפל מספרים מעורבים

מטרות השלב הזה:

- לחשוף את המורים לבעייתיות בכפל מספרים מעורבים
- להכיר דרכים שונות לפתרון כפל מספרים מעורבים ולהתנסות בהן.

**הפעלה:** מציגים על הלוח את התרגיל:  $6\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3}$  ומבקשים:

- למצוא שלוש דרכים שונות לפתרון התרגיל
- לרשום לפחות טעות אחת אפשרית של תלמידים בפתרון התרגיל.

אוספים את הפתרונות ומציגים על הלוח.

דנים בדרכי הפתרון השונות שעלו. במידת הצורך מציגים דרכים נוספות.

להלן דרכי פתרון שהוצגו על ידי מורים בכיתות הניסוי:

שימוש בחוק הפילוג המורחב או הפעלת חוק הפילוג בשלבים:

$$(6 + \frac{3}{4}) \times (5 + \frac{1}{3}) = 6 \times 5 + 6 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times 5 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

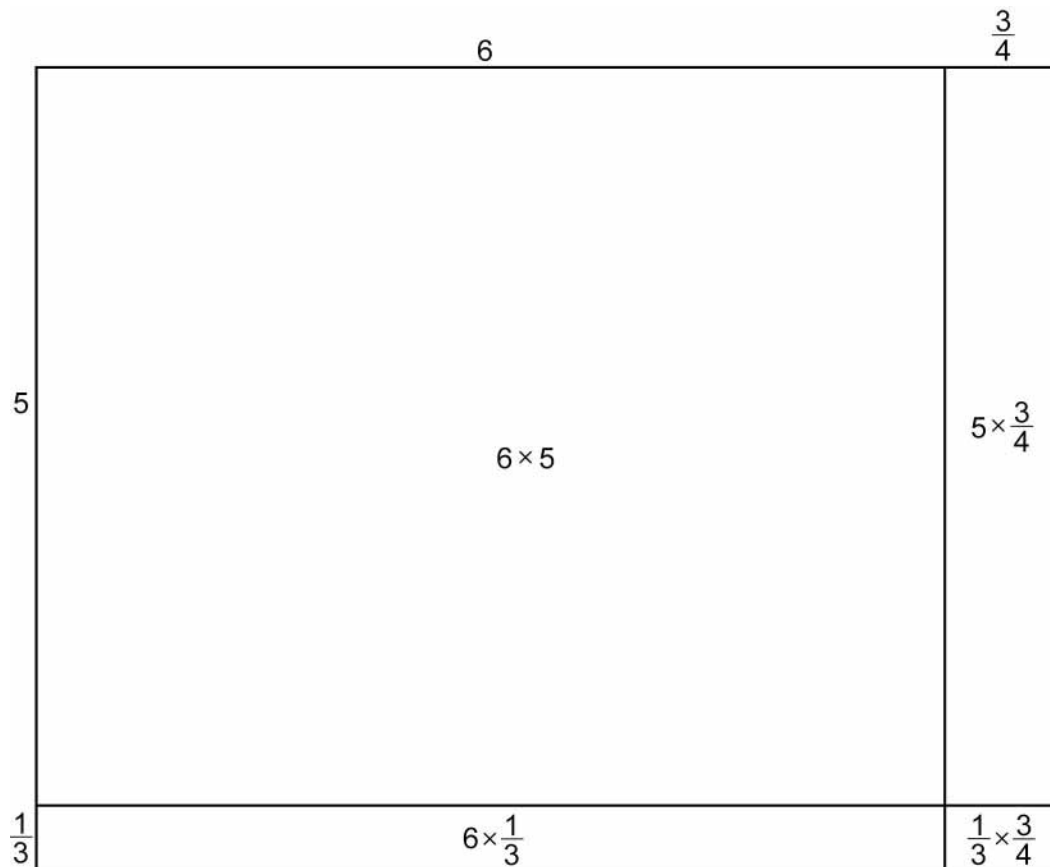
או

$$6\frac{3}{4} \times (5 + \frac{1}{3}) = 6\frac{3}{4} \times 5 + 6\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

הפיכה לכפל שברים מדומים

$$\frac{27}{4} \times \frac{16}{3}$$

שימוש במודל המלבן.



שימוש בלוח פעולה, וחיבור כל המספרים שבו.

$\times$	6	$\frac{3}{4}$	
5	$5 \times 6 = 30$	$5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$	$33\frac{3}{4}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times 6 = 2$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
	32	4	36

## 2. הכרת סיפור האירוע (נספח 1)

מטרת השלב הזה היא להכיר למורים אירוע שבו תלמידים מתקשים בפתרון תרגיל כפל מספרים מעורבים.

**הפעלה:** מחלקים למורים את סיפור האירוע (נספח 1), ומבקשים מהם לקרוא ולחשוב על:

- תחום התוכן המתמטי הקשור לאירוע
- הקושי המתואר באירוע, מקורו ודרכי הטיפול בו.

## 3. ניתוח הבעיה

מטרות השלב הזה:

- להגדיר את הקושי, לנסות להבין את מקורו ולחשוב על דרכים לטיפול בו
- לעודד שיח עמיתים על אירוע המתאר קושי בתפיסת מושג מתמטי
- למצוא הקשרים של הבעיה בשכבות הגיל השונות
- לדון בדרכי טיפול שונות בקושי המתואר.

**הפעלה:** לאחר קריאת האירוע באופן אישי חושבים על הבעיה המוצגת בסיפור, על המקור לבעיה ועל דרכי הטיפול בה, מתכנסים בקבוצות עבודה. (רצוי שצוותי מורים מאותו בית ספר ישתתפו באותה קבוצת עבודה.)

דנים באירוע לפי השלבים של ניתוח אירועים: הגדרת הבעיה, מקורה ודרכים לטיפול בה, ומגבשים תשובות להצגה במליאה. רושמים על שקף את הרעיונות כדי להציג במליאה.

להלן הצעות שהתקבלו במפגשים שהתקיימו בעבר:

#### הגדרת הבעיה

- התלמיד לא הבין את הפתרון שהמורה הציעה
- התלמיד לא היה מסוגל לפתור תרגיל במספרים מעורבים ללא מעבר למספרים מדומים
- התלמיד הבין את האלגוריתם אבל לא את המשמעות של הפתרון
- התלמיד הופתע מכך שתשובה זהה התקבלה בשתי דרכים שונות
- התלמיד המציא אלגוריתם משלו, ולא הבין מדוע הדרך לא הובילה לפתרון נכון.

#### מקורות אפשריים לבעיות שהתעוררו

- התלמיד הכליל מחיבור מספרים מעורבים (שלם עם שלם ושבר עם שבר)
- התלמיד לא מכיר את חוק הפילוג המורחב – נדרשת יכולת השלכה והבנה מעמיקה בכפל של דו ספרתי בדו ספרתי (אולי, יודע רק את האלגוריתם של חד ספרתי בדו ספרתי)
- התלמיד לא הבין שלפעולת חשבון בין שני מספרים יש תוצאה אחת ויחידה, גם אם דרך הפיתרון שונה.
- התלמיד אינו מבין כי  $6\frac{3}{4} = 6 + \frac{3}{4}$  ולכן אינו מבין את הצורך בביצוע חוק הפילוג המורחב.

#### דרכים לטיפול

- ליצור קונפליקט קוגניטיבי – להראות שלא התקבלה אותה התוצאה
- להציג דוגמה פשוטה יותר למשל,  $2\frac{1}{2} \times 4\frac{2}{3}$  שאפשר לחשב את התוצאה שלה בעל-פה. דרך אפשרית לחישוב מהיר בע"פ:

$$2\frac{1}{2} \times 4 = 10 \quad 2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{3} = 1 \quad 10 + 1 = 11$$

- להשתמש במודל המלבן של הכפל – בניית משמעות וייצוג שונה וויזואלי שמסייע לחלק מתלמידי הכיתה.

#### 4. איסוף הרעיונות והצגתם במליאה

מטרת שלב זה, היא לחשוף את הצוותים לרעיונות נוספים שעלו בקבוצות אחרות.

**הפעלה:** כל אחת מקבוצות העבודה מציגה את הרעיונות שלה במליאה.  
במקרה זה חשוב לקבוע "תרבות דיון". רצוי שכל קבוצה תציג את הרעיונות שלה ורק לאחר מכן, יינתן זמן לתגובות, לשאלות ולתשובות.

#### 5. פעילות בקבוצות ודיון במליאה בנושא חוק הפילוג בתכנית הלימודים.

מטרת השלב הזה היא להכיר את פריסת הנושא "חוק הפילוג" בכלל ו"חוק הפילוג המורחב" בפרט בתכנית הלימודים.

**הפעלה:** מעיינים בתכנים של תכנית הלימודים החדשה ודנים בקבוצות בשאלה:

*באיזו כיתה יש תכנים המתקשרים לאירוע של גדי?*

דנים במליאה ב:

הבחנות בין חוק הפילוג לחוק הפילוג המורחב

איך הידע על אודות פריסת הנושא תורמת לנו כמורים.

את תכנית הלימודים החדשה לבתי הספר היסודיים אפשר למצוא בכתובות הבאות:

<http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/>

[http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot\\_Limudim/Math\\_Yesodi/PDF/](http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Tochniyot_Limudim/Math_Yesodi/PDF/)



מדוע הדרך אינה טובה?<sup>1</sup>

פתרתי עם תלמידי תרגילי חזרה לקראת מבחן. פתרנו כמה תרגילי חיבור וכפל בשברים פשוטים. כולם נראו שולטים בחומר. אחרי השיעור פנה אלי גדי ואמר: "אני מבין היטב את החוקים שלימדת בכיתה, אבל אני לא מבין מדוע הדרך שלי אינה טובה?"  
מורה: באיזו דרך אתה משתמש?

גדי: בתרגיל כמו  $6\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3}$ , אני מכפיל  $5 \times 6$  ואני מקבל 30, ואז אני עושה  $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$  ומקבל  $\frac{3}{12}$  לכן התשובה שלי היא  $30\frac{1}{4}$ . אני יודע שזו טעות ואני לא מבין מדוע.

מורה: מדוע עשית את התרגיל בדרך הזו?

גדי: כי בחיבור ובחיסור שברים פשוטים אתה יכול לחשב את השלמים בנפרד ואת השברים בנפרד, אז חשבתי שגם בכפל זה נכון.

גדי נראה מבולבל מחוסר העקביות בפתרון התרגילים ורצה להמשיך ולשוחח איתי על העניין. לכן, הזמנתי אותו לבוא בהפסקה הגדולה או בתום הלימודים. כשהוא עזב והלך לשיעור הבא, תמהתי האם הוא באמת יבוא. הוא אכן בא. התחלתי בכתיבת התרגיל על הלוח  $6\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3}$  ושאלתי, "מה זה אומר?"

גדי: אני לא יודע...  $6\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3}$  ... מה זה יכול להגיד?

מורה: O.K. האם זה אותו דבר כמו  $5 \times 6$  ועוד  $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ ?

גדי: אני לא יודע...למה לא?

מורה: כאשר אתה מפריד אותם כפי שעשית, אתה בעצם כפלת את ה-6 בחמש בלבד. האם לא צריך

לכפול את ה-6 גם ב- $\frac{1}{3}$ ? התחלנו לרשום את התרגיל נכפול  $6 \times 5$ ,  $6 \times \frac{1}{3}$ ,  $5 \times \frac{3}{4}$  ו- $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ .

"עכשיו חבר את כל התשובות, מה נקבל?" נקבל...  $32\frac{48}{12}$  .... 36. בוא נראה מה קורה כשאנחנו פותרים לפי השיטה שלמדנו בכיתה. נשנה את שני המספרים המעורבים למספרים מדומים ואז נכפול מונה במונה ומכנה במכנה מה נקבל?  $\frac{27}{4} \times \frac{16}{3}$ , אם נצמצם נקבל  $9 \times 4$ . שזה 36."

גדי נראה מופתע שבשתי השיטות התקבלה אותה התוצאה. הוא התחיל לצאת מהכיתה ולפתע הסתובב אלי ואמר: "אבל רק רגע אחד, אני עדיין לא מבין מדוע הדרך שלי אינה עובדת?"  
אמרתי לו שזה בגלל שהוא כפל את השלמים בנפרד ולא עם השברים "אתה צריך לכפול את שניהם כפי שעשינו עכשיו" הוספתי להסביר, בידיעה שאני לא ממש עונה לשאלה שלו.  
גדי: אה... אני מבין.

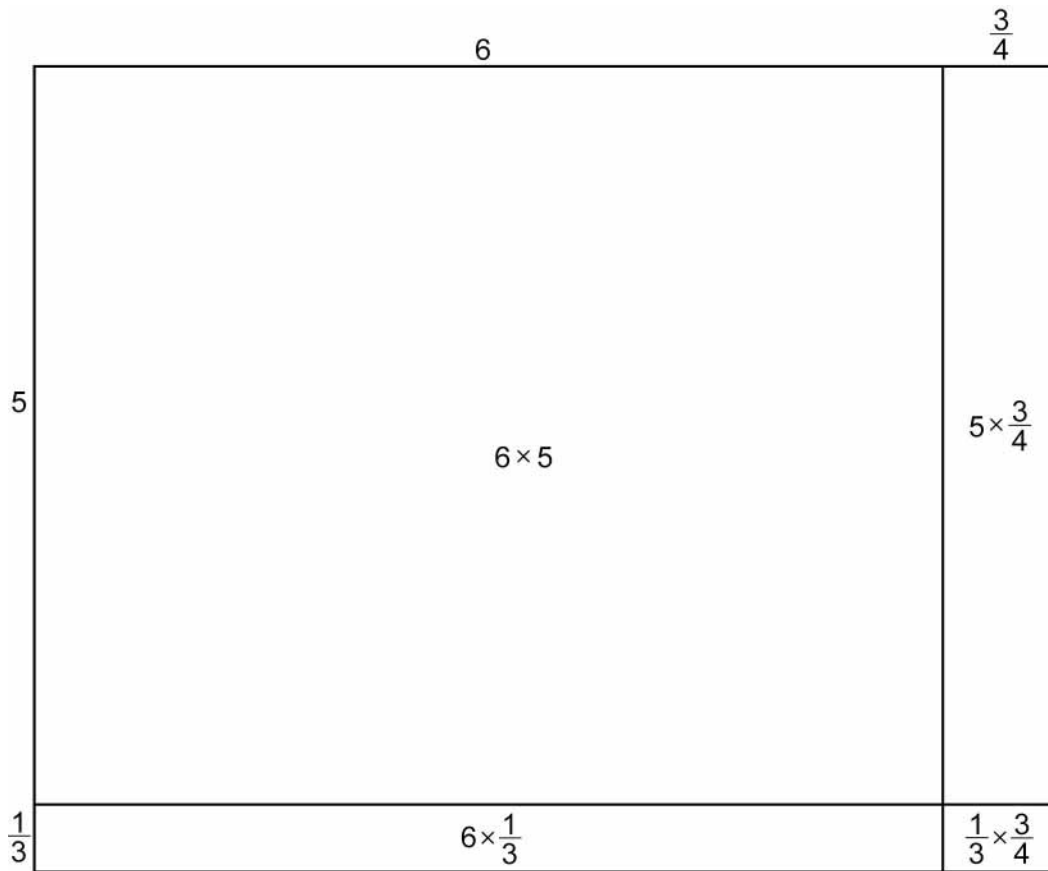
הרגשתי שהוא לא בטוח במה שהוא אומר. אמרתי לו להמשיך לחשוב על העניין ולפנות אלי שוב אם עדיין יהיו לו שאלות.

<sup>1</sup>לקוח מתוך:

Barnet, C., Goldstein, D. & Jackson, B. (1994). *Fractions, decimals, ratios, & percents: Hard to teach and hard to learn*. Portsmouth, NH: Heinemann



$6 \times 5$	$5 \times \frac{3}{4}$	$6 \times \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$
--------------	------------------------	------------------------	----------------------------------





$$6\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} = 6 \times 5 + \frac{3}{4} \times 5 + 6 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

או

$$(6 + \frac{3}{4}) \times (5\frac{1}{3}) = 6 \times 5 + 6 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times 5 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

או

$$6\frac{3}{4} \times (5 + \frac{1}{3}) = 6\frac{3}{4} \times 5 + 6\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

או

הפיכה לכפל שברים מדומים

$$6\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} = \frac{27}{4} \times \frac{16}{3} = 9 \times 4 = 36$$

2. ייצוג של לוח פעולה

×	<b>6</b>	$\frac{3}{4}$	
<b>5</b>	$5 \times 6 = 30$	$5 \times \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$	$33\frac{3}{4}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times 6 = 2$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
	<b>32</b>	<b>4</b>	<b>36</b>