שברים למעלה! למעלה $\frac{n}{m}$!

Up Fractions! Up $\frac{n}{m}$!

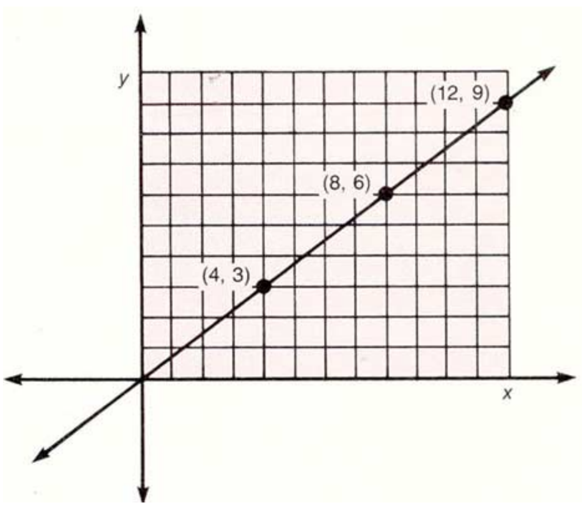
מאת: Dan Kalman מתוך: Arithmetic Teacher, Vol. 32, No. 8, April 1985
תרגום: מיכל סוקניק

האם ייחלתם פעם לדרך פשוטה וישירה לחיבור שברים? האם תעניין אתכם דרך ויזואלית? יש לי שיטה כזו, שאוכל לשתף אתכם בה, אך אני מסתייג מלעשות זאת. אינני מורה מנוסה לחשבון, ואינני בטוח כיצד להעריך את מידת השימושיות של שיטתי. אולי ע"י שילוב הרעיון שלי עם הניסיון שלכם בכיתה, נוכל להביא תרומה שימושית להוראת חשבון.

הנה הרעיון שלי. כל שבר יכול להיחשב כהוראות עבור שרטוט ישר העובר דרך הראשית של מישור x-y. כפי שמרמזת כותרת המאמר, השבר n/m מציע ללכת למעלה n וימינה m. החל מהראשית (0, 0) לכו למעלה n יחידות וימינה m יחידות כדי לקבוע נקודה נוספת (m,n). ישר ייחודי עובר דרך שתי הנקודות (0,0) ו-(m,n) שניתן לקשר אותו לשבר מסוים.

אחד הדברים המעניינים ברעיון הוא שכל השברים האקוויוולנטיים של השבר המקורי שלנו ניתנים למציאה כנקודות על הישר. לדוגמא, התחילו עם השבר 3/4. כדי לשרטט את הישר של שבר זה, התחילו ב-(0,0) ולכו למעלה 3 וימינה 4 לנקודה (4,3) כפי שרואים ב**איור 1**.

איור 1: הנקודות (3, 4) (6, 8) ו- (9, 12) מתאימות לשברים 3/4, 6/8, ו- 9/12.



כשתשרטטו את הישר דרך (0,0) ו- (4,3) תוכלו לראות שהוא עובר גם דרך הנקודות (8,6), (12,9) וכן הלאה, המתאימות לשברים האקוויוולנטיים 6/8, 9/12 וכן הלאה. למעשה, בכל פעם שהישר עובר דרך נקודת רשת (כלומר, נקודה בעלת קואורדינטות שלמות), הקואורדינטות של נקודה זו מציינות שבר אקוויוולנטי נוסף של 3/4.

שיטה זו של שימוש בישר לייצוג שבר עובדת יפה גם כשהמונים והמכנים הם מספרים שליליים. לדוגמה, עם (-6, -2) אפשר ללכת **למטה** 6 יחידות **ושמאלה** 2 יחידות. שברים כמו -2/3 ו 2/-3 יהיו על ישר אחד. נקודות עבור 2/3 ו -2/-3 יהיו על ישר אחר. באופן גרפי ניתן לראות את החוקים הקשורים למונים ומכנים מכוונים.

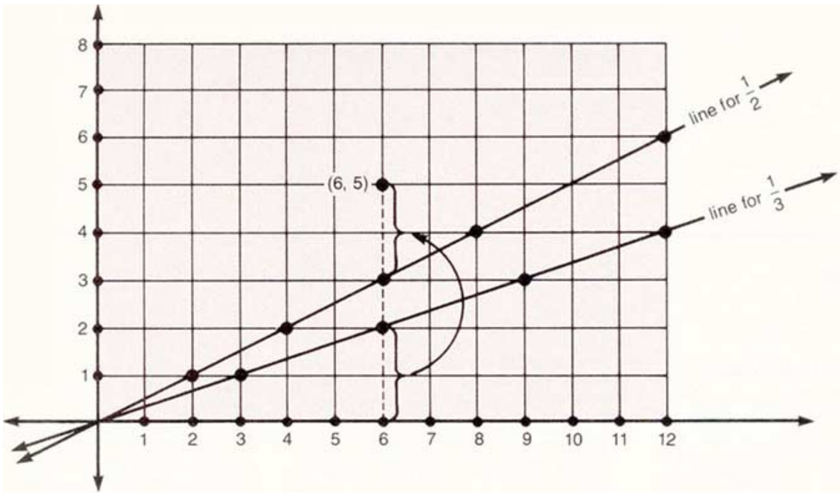
על מנת לראות חיבור של שני שברים, שרטטו קודם את הישרים שלהם. השוו בין נקודות הרשת של שני הישרים, כדי למצוא שתי נקודות הנמצאות על אותו ישר אנכי. נקודות אלה יעזרו לנו למצוא את הסכום עם מכנה משותף. כדי למצוא אותו, חברו את המרחקים האנכיים של נקודות רשת אלה מציר ה-x וקבעו נקודת רשת חדשה במספר זה על אותו ישר אנכי. הקואורדינטות של נקודה חדשה זו נותנות את השם לסכום השברים המקוריים, והישר העובר דרך הנקודה החדשה ו- (0,0) הוא הישר המייצג את סכום שני השברים.

אדגים את זה עם החיבור של 1/3 + 1/2. **באיור 2** שרטטתי את הישרים עבור "למעלה 1 וימינה 2" ועבור "למעלה 1 וימינה 3". המקום הראשון שבו מצאתי שתי נקודות רשת על אותו ישר אנכי הוא בנקודה x=6, שהוא המכנה המשותף הקטן ביותר של 1/2 ו- 1/3 למרות שמקום נוסף כזה אפשר למצוא ב- x=12. אני מודד את המרחק מציר ה-x לנקודה הראשונה ומודד את אותו המרחק מעל לנקודה השנייה, כך שמתקבלת נקודה שלישית ב-(6,5) המתאימה לשבר 5/6. שרטוט הישר העובר בין (0,0) ו-(6,5) מאתר שמות נוספים ל- 1/3 + 1/2. למעשה, שיטה זו של מדידה וחיבור יכולה להתבצע על כל ישר אנכי בלי להתחשב בשאלה אם הוא כולל נקודות רשת עבור כל ישר נתון. אם כן, גישה אחת לחיבור שברים היא לשרטט את הישרים שלהם, לחבר אותם במובן הגיאומטרי שתואר זה עתה, ואיתור נקודות רשת על הישר החדש שנוצר.

שיטה זו של ייצוג שבר ע"י ישר עובדת היטב גם עם שברים מורכבים. ניתן לבצע פישוטים עם ביטויים הכוללים שברים, מספרים מעורבים, או מספרים עשרוניים, ע"י שרטוט הישר ומציאת נקודת רשת. לדוגמא, כדי לפשט את (1/2)/(1/4), יש ללכת למעלה 1/2 וימינה 1/4 כדי לשרטט את (1/2,1/4). הישר העובר דרך (0,0) ו- (1/2,1/4) עובר גם דרך (1,2) ומציין ש-2/1 או 2, הוא שם נוסף לשבר המורכב.

רעיונות אלה קשורים להבחנה בין שברים ומספרים רציונלים. כל ישר המשורטט על פי ההוראות של למעלה-וימינה מייצג מספר רציונלי. על-ידי הסתכלות על נקודות שונות על הישר, אנו מוצאים **שמות** שונים עבור מספר רציונלי זה, אך זהו למעשה מספר יחיד. לסיכום, ברצוני לומר "ישר אחד - מספר רציונלי אחד ; נקודות רבות - שמות רבים".

איור 2: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$



כעת, לאחר שסיפרתי על הרעיון שלי, עליכם לתת לי את חלקכם. יתכן ושמתם לב למכשולים פוטנציאלים בשיטתי. אני רואה מספר נקודות קושי. ראשית, לרוע המזל, יוצא שהנקודה (2,3) מייצגת את 3/2 ולא את 2/3. האם לדעתכם זה עלול לבלבל את הילדים? חשבתי לסדר זאת בדרך אחרת כך שמשמעות n/m תהיה n ימינה ו-m למעלה, אך גישה זו אינה קונסיסטנטית עם המוסכמה המקובלת לייצוג שיפוע של ישר. כאן אני חייב להשאיר זאת לשיפוטכם.

בעיה נוספת ששמתי לב אליה היא שיש לבצע את שרטוט הישרים בזהירות רבה. שגיאות בשרטוט יביאו לתשובות שגויות בחיבור. באופן דומה, מוכרחים להבחין בין מקומות בהם הישר ממש עובר דרך נקודת רשת לבין כאלה בהם הוא רק קרוב לנקודה. בעיה זו עשויה להפוך ליתרון כשמחפשים אומדן לסכום של שברים.

יש לי גם שאלות לגבי פשטות הבנייה של חיבור גיאומטרי. שוב אני מבקש להיעזר בניסיונכם. האם זו בנייה שתלמידיכם יוכלו לבצע וליהנות ממנה?

אני חייב להודות שנהניתי הנאה גדולה בגילוי הרעיונות אותם חלקתי אתכם כאן. כולי תקווה שתפיקו מהם תועלת בכיתה, אולי כנושא העשרה לתלמידים מתקדמים. יחד עם זאת, לאור הקשיים הפוטנציאלים, אינני רואה שיטה זו כהמצאה הגדולה ביותר מאז הבדידים. במקום זאת, אני מסתפק בלהראות לכם מה ניתן לעשות, וסומך על ניסיונכם כדי להחליט מה, מתי וכיצד. אני עשיתי את חלקי; עכשיו הכל תלוי בכם.