שימוש באלגברה מוקדמת ככלי לקידום תלמידים בעלי יכולות שונות

Early Algebra to reach the range of Learners

מאת: Deborah Schifter, Susan Jo Russell, and Virginia Bastable

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, 16 (4), Nov.2009, pp. 230-237

תרגום: ברכה סגליס

התנסות בניסוח הכללות מפורשות, מציאת דוגמאות, דוגמאות נגדיות והוכחות – חשיבה אלגברית – מאפשרת לתלמידים צעירים לחשוב במידה רבה יותר על העקרונות שבבסיס העבודה שלהם ותומכת באלה שמתקשים ובאלה שמתקדמים.

ססיל, תלמידת כיתה ב' הצהירה: "אני יודעת ששבע ועוד שבע הם ארבע עשרה, אז לקחתי אחד משבע הראשון ושמתי אותו על השבע השני, כעת זה שש ועוד שמונה, וזה ארבע עשרה".
בכיתה אחרת, טוני, תלמיד כיתה ג' מסביר: "כדי לפתור את התרגיל שלושים ותשע ועוד שמונה עשרה, אני מוסיף אחד לשלושים ותשע ומוריד אחד משמונה עשרה, כדי שיהיה לי תרגיל קל יותר, שיש לו אותה תשובה: ארבעים ועוד שבע עשרה הם חמישים ושבע".

מורים רבים יזהו הערות אלה של ססיל וטוני כמוכרות להם. אחרי הכל, תלמידים אלה מפעילים אסטרטגיות שכיחות השגורות אצל תלמידים כשהם לומדים לחבר. מאידך, מיעוט מבין המורים יבחינו שבאסטרטגיות של ססיל וטוני מופיעה באופן מרומז ההכללה אודות התנהגות פעולת החיבור, הראויה לחקירה. למעשה, חקירות כאלו – ניסוח מפורש של הכללות אודות ההתנהגות של הפעולות, הצדקתם, ובחינת המרחב והגבולות של ההכללה – הינם מרכיב מרכזי של חשיבה אלגברית מוקדמת.

למרות שססיל וטוני מדברים על מספרים ספציפיים, הרי שאם יעודדו אותם, הם יוכלו אולי לציין את העיקרון הכללי: ***כאשר מחברים שני מספרים, אם מורידים כמות מהמחובר הראשון ומוסיפים אותה למחובר השני, אזי הסכום נשאר אותו הדבר.*** בשנים הבאות, הם ילמדו לבטא אותו רעיון בעזרת ייצוג פורמלי:

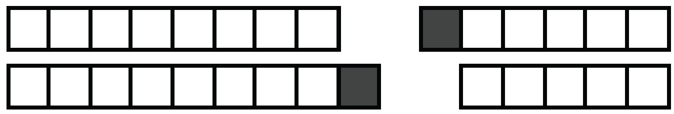
אם a, b, ו- x הם מספרים, אז

$$a + b = (a-x) + (b+x)$$

אם המורים של ססיל וטוני ירצו שגם יתר תלמידי הכיתה יבינו את הרעיון, הם עשויים לבקש הדגמה בעזרת ציור או אמצעי המחשה. לדוגמה, **איור 1** מייצג את פעולת החיבור כאיחוד שתי קבוצות של קוביות. אם לוקחים קובייה מאחת הקבוצות ומוסיפים אותה לקבוצה השנייה, הסכום של כל הקוביות נשאר קבוע. זה יהיה נכון ללא קשר למספר הקוביות שבקבוצות המקוריות. בניסוח של תלמיד

בכיתה ב׳, ״זה לא משנה כמה קוביות יש בקבוצות שלך, בגלל שרק העברת קובייה אחת למקום אחר, לא הוספת עוד קוביות ולא לקחת קוביות, אז הסכום נשאר אותו הדבר״.
תלמיד אחר אמר, ״אפשר להזיז יותר מקובייה אחת, אבל עדיין, הסכום יישאר אותו הדבר.״

איור 1: קוביות ממחישות את ההכללה: כאשר מחברים שני מספרים, אם מחסרים כמות מהמחובר הראשון ומוסיפים אותה למחובר השני, אז הסכום נשאר אותו דבר.



תלמידים יכולים להמחיש שההכללה מתאימה לכל המספרים השלמים.

הכיתה יכולה לדון בשאלות נוספות: האם ניתן להפעיל אותה אסטרטגיה על חיסור או כפל? אם לא, מדוע לא? האם הכללה זו רומזת על הכללה אחרת שעובדת עבור החיסור או הכפל? תלמידים בוגרים יותר עשויים לשאול האם העיקרון עובד גם עם סוגים אחרים של מספרים, כמו שברים או מספרים מכוונים.

מאז 2001, מחברי המאמר עובדים עם קבוצות של מורים לחקירת החשיבה האלגברית המוקדמת של תלמידים – לימוד ייצוגים, קשרים, והכללות בכיתות של בית הספר היסודי. הם התחילו לשים לב להערות מפורשות של תלמידים אודות קביעויות המופיעות במערכת המספרים, או מה שנרמז מאופן החישוב של התלמידים. ככל שהחקירה התקדמה, במקום לחכות להערות של תלמידים, המחברים שקלו כיצד ניתן לתכנן את השיעורים כך שהם יעוררו את תשומת ליבם של התלמידים לקביעויות כאלה. מורים דווחו כיצד ההבנה שעלתה בעקבות דיונים כאלה אודות ההתנהגות של פעולות החשבון תומכת ברהיטות החישובית של תלמידיהם.
בפרויקט הנוכחי, המורים עוקבים אחרי תלמידים המגלים קשיים בלימוד המתמטיקה בהשוואה לעמיתיהם, ואחרי תלמידים מתקדמים. הם מוצאים שהאלגברה המוקדמת מביאה תועלת לכל טווח הלומדים.
המאמר מציג שני תיאורים של אירועים כיתתיים הממחישים את סוג החשיבה האלגברית המוקדמת שתלמידים בבית הספר היסודי מפעילים. התיאור הראשון עוסק בתלמיד מתקדם והשני בתלמיד מתקשה.

פעולות במספרים זוגיים ואי-זוגיים

במהלך השנה, ניהלו תלמידי כיתה ג׳ של אליס רוידן דיונים אודות גורמים בכפל. עד שהם למדו את המונח ***גורם***, הם ניסחו את השאלות שלהם בעזרת הביטוי ***לספור ב..***: אם מתחילים מ- 0, באילו מספרים אפשר לספור כדי להגיע למספר המטרה של היום?
באמצעות חקירות אלה, התלמידים גילו סקרנות לגבי מספרים ראשוניים, מספרים שיש להם ארבעה גורמים בדיוק, ומספרים שיש להם גורמים רבים. הם שאלו את עצמם מה קורה כאשר ספרת האחדות

היא גורם של המספר; האם לכפולות של 6 יש תמיד את הגורמים 2 ו- 3; האם למספר זוגי יכול להיות גורם אי-זוגי; והאם למספר אי-זוגי יכול להיות גורם זוגי.

בתחילת השנה, רוידן אפיינה את לורה כתלמידה חזקה בחישובים הזקוקה לאתגרים נוספים. עם זאת, במהלך החודשים ספט' – אוק' לורה גילתה התנגדות כאשר עמיתיה לכיתה התחילו לדון אודות גורמים, כשהיא מתלוננת לפני אמה בבית שמשעמם לה ושהדיונים נמשכים זמן רב מדי.

בהדרגה, לורה החלה להיווכח שהיא יכולה לחפור לתוך הרעיונות ביחד עם עמיתיה לכיתה ושהיא נהנית מכך. להלן אחת השיחות שהתקיימה באביב. השיעור התחיל כאשר רוידן **(מ)** שואלת האם 2 הוא גורם של 156. בהתחלה תלמידי הכיתה גיחכו, בחושבם שהתשובה ברורה. ג'וליה **(ג')**, דניאל **(ד)**, תמי **(ת)**, וקתרין **(ק)**, הסבירו מדוע.

(מ): אז מדוע זה כל כך ברור?

(ג'): במקום של אחדות יש מספר זוגי.

(מ): מדוע זה מה שקובע? במקום של המאות יש מספר אי-זוגי וגם במקום של העשרות יש מספר אי-זוגי.

(ג'): טוב, אבל הם לא קובעים.

(מ): איך את יודעת את זה?

(ד): הסיבה היא שהמקום של המאות הוא בעצם זוגי, המקום של העשרות הוא זוגי והמקום של האחדות הוא זוגי. במקום של המאות, המאה היא זוגית, אפילו אם בגלל הספרה אחד זה נראה אי-זוגי.

(ת): אני חושב שתפסתי למה הוא מתכוון. הוא מתכוון שאחד הוא אי-זוגי, אבל האחד הזה מייצג מאה אחת, ומאה אחת איננה אי-זוגית, והחמישים הוא גם זוגי.

(ק): אני יודעת שזוגי ועוד זוגי שווה זוגי. אולי זוגי ועוד זוגי ועוד זוגי הוא גם זוגי.

עד להערה האחרונה, הדיון עסק במספרים ספציפיים: 156, 100, 50 ו- 6. בכל זאת קתרין הבחינה שהחשיבה של עמיתיה מתייחסת להכללה שהם בדקו קודם – שסכום שני מספרים זוגיים הוא מספר זוגי. תלמידים בבית הספר היסודי מבטאים על פי רוב הכללות בשפה פשוטה. בשנים הבאות, העקרונות שנידונו כאן יבוטאו בעזרת ייצוג אלגברי ויוצגו כיישום של חוק הפילוג:

עבור כל מספר שלם x ו- y, המספרים $2x$, $2y$, ו- $2(x+y)$ הם מספרים זוגיים, ו- $2x+2y=2(x+y)$.

קתרין הבינה שכדי להתייחס לשאלה הנוכחית, ההכללה שהכירה דרשה הרחבה: סכום שלושה מספרים זוגיים הוא מספר זוגי. רוידן עבדה עם הכיתה כדי לוודא שהם הבינו את ההשערה של קתרין ואז חזרה לדון במספר הספציפי 156:

(ג'): בגלל שב-6 יש זוגות, וב- 10 יש זוגות, ומספר זוגי ועוד מספר זוגי שווה למספר זוגי...(ג'וליה עושה מחווה לציון שהמסקנה שלנו מובנת, ותלמידים רבים מאשרים את דבריה ב- אהה..).

(מ): האם זה אומר שכל ספירה בזוגי תתן מספר זוגי?

הכיתה השתמשה בביטוי ***כל ספירה ב...*** במשמעות של ***כל מספר של*** בהקשר לחיבור. רוידן שאלה בעצם האם הסכום של כל מספר שהוא, של מספרים זוגיים חייב להיות מספר זוגי.

קתרין ענתה, "אני חושבת שאני מבינה למה. זה משום שזוגי ועוד זוגי הם זוגי, והזוגי הזה ועוד זוגי אחר יהיה שווה לעוד זוגי אחר, ואפשר להמשיך את זה עוד ועוד".

קתרין ציינה קו חשיבה בר-קיום שהסכום של כל מספר שהוא של מחוברים זוגיים הינו זוגי, אבל הטענה שלה לא סיימה את הדיון. חשוב שתלמידים אחרים יציגו את הדרך שלהם להבנת הרעיון ושעמיתיהם לכיתה ישמעו נקודות מבט שונות. זה המקום שבו לורה הצטרפה לדיון:

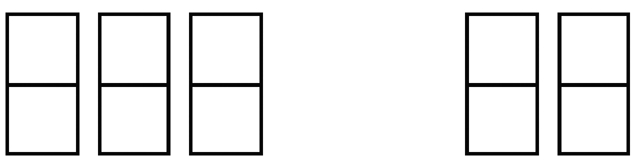
(ל): אני חושבת שזה בגלל השתיים. משום שכל מספר זוגי עשוי מקבוצות של שתיים.

(מ): האם את אומרת שדרך אחרת להסתכל על הרעיון של קתרין היא לחשוב על זה כעל איזו שהיא ספירה בשתיים ועוד ספירה אחרת בשתיים ועוד, וכך הלאה, וזה תמיד יהיה שווה למספר אחר שהוא ספירה בשתיים?

(ל): אז בגלל שכל מספר זוגי הוא ספירה בשתיים, ואני מחברת זוגי ועוד זוגי, מה שאני עושה זה לחבר כאילו שלוש ספירות בשתיים ועוד שתי ספירות בשתיים. אני תמיד אסיים עם איזו שהיא ספירה בשתיים, ואני תמיד מחברת ביחד ספירות בשתיים. ו.. [כשהיא מתחילה להתרגש מהרעיון שלה] מכיוון שספירות בשתיים ועוד ספירות בשתיים תמיד שוות לספירות בשתיים, זה תמיד יהיה שווה למספר זוגי, שהוא ספירה בשתיים!

בעוד שההנמקה של קתרין התבססה על הכללה שהוסכם עליה קודם (שסכום שני מספרים זוגיים הוא מספר זוגי), הרי שלורה חזרה להגדרה של הכיתה ל-***זוגי*** כספירה בשתיים. מכיוון שהתלמידים לא הביאו באותו יום עזרי המחשה שיעזרו להם לחשוב ולשוחח אודות הרעיונות שלהם, הטעון של לורה עזר להם להעלות דימוי שהם ראו בשיעורים הקודמים (ראו **איור 2**). לא משנה כמה קבוצות של זוגות של קוביות מחברים, כלומר, לא משנה כמה זוגיים מחברים, אוסף הקוביות המייצג את הסכום יהיה בהכרח קבוצה של זוגות. לכן הסכום הוא זוגי. (על סמך הדגמות כאלו של התנהגות הפעולה בנסיבות מסוימות ושימוש בסוג החשיבה שהוצע על ידי קתרין ולורה, פיתחה הכיתה של רוידן הוכחות לטענות הכלליות שהם ניסחו. לדיון נוסף אודות סוג כזה של הוכחה, ראה 2009, Schifter .)

איור 2: לורה טענה שחיבור ספירה בשתיים לספירה בשתיים ייתן סכום שהוא ספירה בשתיים



הכיתה נגעה ברעיונות כאלה לפני כן, אך התלמידים שהציגו את הרעיונות במרץ, תוך כדי גיבושם, לא היו "סגורים עליהם". ככל שהדיון התמשך, רוידן התערבה מדי פעם, כשהיא מבקשת מהתלמידים הבהרות או הצדקות, מציעה להם קישורים לרעיונות אחרים שבהם דנו בעבר, ומקפידה שכל תלמידי הכיתה עוקבים אחר דרך החשיבה. לקראת סוף שנת הלימודים, הכיתה התחילה לבדוק את המכפלה של מספרים זוגיים ואי-זוגיים, כשהיא מגיעה למסקנה שהמכפלה של כל מספר שהוא של גורמים אי-זוגיים תהיה מספר אי-זוגי, אבל אם יש גורם זוגי אחד לפחות, המכפלה תהיה זוגית.

לורה המשיכה להיות משתתפת פעילה בדיונים, כשהיא מקשיבה לעמיתיה בתשומת לב ומגיבה על פי החשיבה שלה. בניגוד לשעמום שלה בתחילת השנה, לורה היתה מעורבת מאוד. באמצע השנה כאשר רוידן ראיינה את לורה בקשר ליחס שלה כלפי הדיונים הכיתתיים על גורמים, לורה אמרה:

> זה נותן לך פרספקטיבה אחרת על המספרים. את מתחילה לחשוב על מספר כמו שמונים ושמונה, ואז כל הדברים האלה על המספר באים לראש. האם אפשר לספור את זה ב- 5? ב- 8? בכיתות הקודמות בהן הייתי אף פעם לא דיברנו על דברים כאלה. זה כאילו שלוקחים את המספר ועושים ממנו משהו חי גדול יותר. שמונים שמונה זה כאילו לא רק "שתי שמיניות" אחת ליד השנייה. זה גם ספירה ב- 11. יש לנו כל כך הרבה תיאוריות, וזה הביא אותי לחשוב. אני מדברת על זה בבית כל הזמן. הבוקר, התעוררתי ואמרתי לאמא שלי שהיום הוא מספר ראשוני, והיא אמרה, "מה"?

לורה סיימה את הראיון בהבהרה מהי עבורה המשמעות של עבודה עם כל הכיתה על רעיונות אלה: "כשכולנו חושבים ביחד על זה, יש לנו עשרים ואחד רעיונות. זה לא רק אני חושבת על זה לעצמי."

רוידן מגיבה: " ההקשר החברתי ללימוד עם העמיתים שלה, שהם בעלי יכולות שונות במתמטיקה, מחזק את ההבנה של לורה אודות רעיונות מתמטיים ומרחיב את ההסתכלות שלה לגבי מהי מתמטיקה."

לורה מקבלת השראה מהרעיונות של עמיתיה לכיתה, וההזדמנות להעביר את הרעיונות שלה בתמורה מסייעת לה להבהיר ולהעמיק את החשיבה שלה.

הכפלת גורם

תיאור האירוע השני מתייחס לכיתה ג' אחרת שבה עסקו בדיונים בהם התלמידים ניסחו והצדיקו הכללות אודות פעולות. אחת מהטענות הכלליות שכיתה זו הביעה היתה שאם מכפילים (פי 2) את אחד הגורמים בתרגיל כפל, גם התוצאה מוכפלת. בייצוג אלגברי, ניתן לבטא רעיון זה כך:

עבור כל המספרים x, y ו- z, אם $xy=z$, אז $(2x)y=2z$.

במקום להציג את התלמידים שהיו פעילים בדיון הכללי, תיאור זה מתמקד בתלמידה שהיתה חסרת ביטחון ורהיטות בחישובים. שריתה נוטה להיות שקטה, והמורה שלה קרי סטנלי **(מ)**, נפגשה איתה באופן יחידני כדי לגלות מה היא הבינה מהדיון הכיתתי ולראות האם שריתה עושה קישורים.

כאשר סטנלי ביקשה משריתה **(ש)** לומר מה הם היו אמורים ללמוד בשיעורים של "ההכפלה", שריתה ענתה שהם לקחו תרגיל כפל ואז הכפילו חלק מהמספרים כדי למצוא תשובה לתרגיל אחר. סטנלי ביקשה ממנה להמחיש זאת עם התרגיל 2×3.

(ש): שתי פעמים שלוש שווה ל... אני חושבת, שש. כן, שש, בגלל ששלוש ועוד שלוש שווה שש.

(מ): בסדר, אז איך עובד רעיון ההכפלה שלנו?

(ש): טוב, צריך לכפול ב- 2 את השתיים לארבע ואת השש לשתים עשרה. אז מקבלים שלוש פעמים ארבע שווה שתים עשרה.

(מ): האם תוכלי להסביר לי קצת יותר על זה? מה הכפלת או מדוע עשית זאת?

(ש): אני לא בטוחה שאני יודעת מדוע, אני רק יודעת שזה עובד.

(מ): מה עובד בזה?

(ש): יש לך שתי פעמים שלוש, אז את עושה את זה ארבע פעמים שלוש. במקום שהתשובה תהיה שש את עושה שתהיה שתים עשרה.

(מ): זה מעניין. מדוע לא שינית את השלוש?

(ש): *[שותקת לפחות דקה שלמה]* אני לא בטוחה, אני יכולה לצייר משהו?

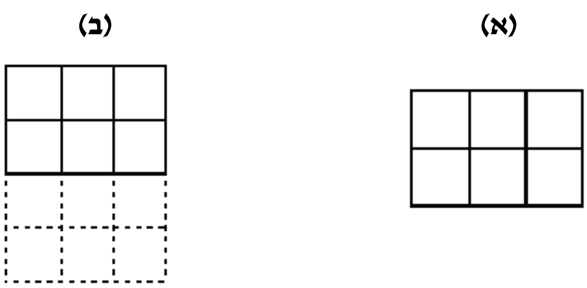
(מ): בוודאי.

(ש): *[מתחילה לצייר מערך של 2 על 3 משבצות, כפי שמופיע **באיור 3א**.]* הנה מערך עבור שתי פעמים שלוש, זה יוצא ביחד שש. אם אני מכפילה, אז אני הולכת לעשות את זה גדול יותר *[מצביעה על שתי השורות ומזיזה את האצבע שלה כלפי מטה].*

(מ): האם תוכלי לצייר זאת, כדי להראות לי מה את חושבת?

(ש): *[מרחיבה את המערך, כפי שרואים **באיור 3ב**].* זה שתי פעמים שלוש, ואני יכולה פשוט למתוח את זה כדי שזה יהיה ארבע פעמים שלוש. אני חושבת שככה אני יכולה להראות מה הוכפל. השתיים הוכפל משום שאני הוספתי עוד שתי שורות. גם התשובה הוכפלה, משום שעכשיו יש לי שש ועוד שש שווה שתים עשרה. זה ארבע פעמים שלוש.

איור 3: שריתה ממחישה שהכפלת גורם אחד בביטוי כפלי מכפילה את התוצאה.



שריתה הקשיבה לדיון הכיתתי וידעה את הטענה הכללית שעמיתיה לכיתה קבעו. עם זאת, למרות שהיתה מסוגלת לצטט את הטענה, היא לא הבינה בהתחלה מדוע היא נכונה. בזמן שנפגשה עם המורה שלה, שריתה ציירה מערך, שסיפק לה דימוי של הכפל ואיפשר לה לראות שכאשר היא מכפילה את אחד הגורמים, גם התוצאה בהכרח מכפילה את עצמה.

(מ): ובכן, מה שאני רואה הוא שהכפלת את אחד המימדים ; עשית ששתי שורות תהיינה ארבע שורות. מה היה קורה עם היית מכפילה גם את השלוש ועושה מהמערך של 2×3, מערך של 4×6?

(ש): זה לא היה נראה כמו זה. אני חושבת שהצורה תשתנה הרבה. טוב, אולי זה יעבוד, אבל אז זה אומר שארבע פעמים שש שווה לשתים עשרה. זה לא הגיוני.

(מ): האם תוכלי לצייר מערך שמראה זאת? *[מכיוון ששריתה מהססת לזמן קצר, סטנלי מציעה שהיא תכין מערך של מה שהיא מנסה להבין]* . מה עוצר אותך לצייר מערך? האם אני יכולה לעזור?

(ש): טוב, היה לי שתי פעמים שלוש, אבל אם אני מכפילה הכל זה אומר שאני אעשה מערך של ארבע על שש. זה בטוח לא שווה לשתים עשרה. *[היא יוצרת את המערך המופיע **באיור 4א**].*

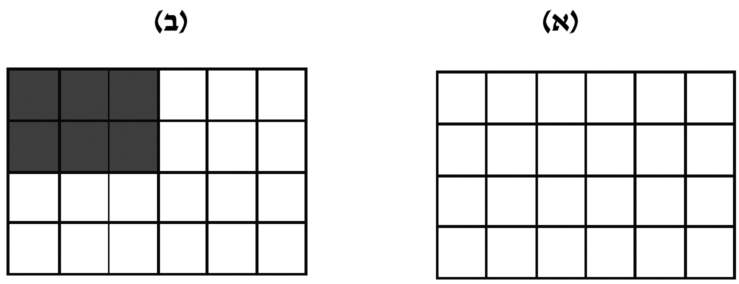
(מ): לכמה שווה מערך זה?

(ש): *[סופרת את המשבצות]* זה עשרים וארבע.

(מ): האם את רואה את שתי פעמים שלוש במערך שציירת?

בתגובה, שריתה צבעה את המערך של 2×3 (ראו **איור 4ב**). ואז היא אמרה: "מה שיש פה זה לא 2 מערכים כאלה; קודם זה היה מוכפל, מה שעשינו בהתחלה. כעת יש ארבעה מערכים כמו זה שהתחלנו איתו. בגלל זה אנחנו לא צריכים להכפיל הכל!"

איור 4: שריתה ממחישה שהכפלה של שני הגורמים בביטוי כפלי מגדילה את התוצאה פי ארבע.



למרות שאחת התלמידות בכיתה כבר הגיעה להבחנה זו באחד השיעורים הקודמים, כעת, משהתאפשר לה לצייר מערך משלה ולשוחח עם המורה באופן יחידני, שריתה הצליחה לבטא רעיון זה במילים שלה ולהפיק הבנה ממה שנדון עם הכיתה כולה. אבל סטנלי עדיין תהתה האם שריתה מסוגלת ליישם רעיונות אלה לקונטקסט אחר, אז היא המשיכה את השיחה.

(מ): ובכן, שריתה, שוחחנו הרבה על שימוש במה שאנחנו יודעים כדי לעזור לנו לפתור תרגיל. היום עברנו על הכלל להכפלה שקבעה הכיתה. הדוגמה שהתמקדנו בה היתה שתי פעמים שלוש שווה שש, וארבע פעמים שלוש שווה שתים עשרה. כיצד תוכלי להשתמש בכלל זה כדי שיעזור לך לפתור תרגיל אחר?

(ש): אני עדיין לא ממש טובה בכל עובדות הכפל . אבל אם אני אקבל תרגיל כמו ארבע פעמים שתים עשרה, אני יכולה לפתור את התרגיל ארבע פעמים שש ופשוט להכפיל את התשובה. זה יהיה יותר קל מאשר ספירה בדילוגים... אני חושבת שהמערך שלי גם כן עוזר.

השיחה שהיתה לסטנלי עם שריתה, התבססה על הדיון שהתקיים בכיתה. שריתה הקשיבה בתשומת לב והיתה מסוגלת לצטט את הטענה שעמיתיה לכיתה הציגו, אבל היא לא היתה בטוחה לגבי ההצדקה. ההזדמנות לשוחח על רעיונות אלה באופן יחידני ולצייר את הדימויים שלה, אפשרה לשריתה להסביר מדוע הטענה נכונה. בנוסף, היא הרגישה מספיק בטוחה ליישם טענה זו ככלי בעבודתה עם חישובים.

אלגברה מוקדמת

שני תיאורי האירועים ממחישים את סוג החשיבה האלגברית המוקדמת שאפשר להציג בכיתות של בית הספר היסודי. תלמידים מבחינים לעיתים קרובות בקביעויות שבמערכות מספרים – לדוגמה, שהמחוברים בתרגיל חיבור (או הגורמים בתרגיל כפל) ניתנים להחלפה מבלי שהתוצאה תשתנה;

שהוספת אותו הסכום לשני המספרים בתרגיל חיסור אינה משנה את ההפרש ; כמו גם ההכללות שהוצגו קודם במאמר זה.

תצפיות כאלו מצדיקות המשך החקירה. כפי שמדגימים תיאורי האירועים, תלמידים יכולים לבטא באופן מפורש את מה שקבוע ולשקול האם יש פה הכללה שניתן ליישם אותה למחלקה של מספרים. בכיתות של רוידן ושל סטנלי, ייצוגים חזותיים סייעו לתלמידים לפרש טענה כללית ולהעלות את השאלה כיצד ניתן לדעת האם הטענה ישימה לכל המספרים (השלמים).

המורים איתם עבדנו, התחילו לשלב דיונים כאלה בעבודה השגרתית של התלמידים כאשר הם עושים חישובים. אחת המורות הגיבה על מה שהתלמידים למדו : "על ידי התייחסות מפורשת להכללות, ולאחר מכן מציאת דוגמאות, דוגמאות נגדיות והוכחות, התלמידים חושבים יותר על העקרונות שבבסיס עבודתם. הכללות מסייעות לתלמידים לראות קשרים בתוך ובין מספרים, ובתוך ובין פעולות."

יתר על כן, מורים דווחו שעבודה זו באלגברה מוקדמת – כלומר, דיונים אודות ההתנהגות של הפעולות, ניסוח טענות כלליות, ייצוג טענות אלה, וניסיון להוכיח אותן – תומכת בכל סוגי התלמידים. תלמידים כמו שריתה, המתקשים במתמטיקה, מתחילים לחשוב באופן מתמטי באמצעות עבודה כזאת. מורה אחת כתבה : "כשהתחלתי לעבוד עם תלמידי על הכללות, הבחנתי בתזוזה אצל התלמידים בעלי היכולת הנמוכה יותר. דברים הפכו להיות נגישים יותר עבורם."

כאשר ההכללות הופכות להיות מפורשות – באמצעות השפה וייצוגים מרחביים המשמשים להצדקתן – הן הופכות נגישות ליותר תלמידים ומהוות בסיס לרהיטות חישובית גבוהה יותר. יתר על כן, הנטייה ליצור ייצוג כאשר מתעוררת שאלה מתמטית, תומכת בחשיבה של התלמידים כאשר הם נמצאים בבלבול ומבוכה.

במקביל, מורים תיארו כיצד תלמידים שהביצועים המתמטיים שלהם גבוהים יותר מעמיתיהם לכיתה, מוצאים תוכן זה כמאתגר ומעורר. עבור תלמידים כמו לורה, לימוד המספרים והפעולות יכול להתרחב מעבר ליכולת חישובית גבוהה להתרגשות שבהעלאה והוכחה של השערות אודות יחסים מתמטיים הישימים למחלקה אינסופית של מספרים.

ביבליוגרפיה

Schifter, Deborah. "Representation-Based Proof in Elementary Grades". In *Teaching and Learning Proof across the Grades*, edited by Despina A. Stylianou, Maria L. Blanton, and Eric J. Knuth. Oxford: Routledge-Taylor Francis; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2009.