

Fluency Without Fear:
Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts

רהיטות ללא פחד:
עדות מחקרית לדרכים הטובות ביותר ללימוד עובדות מתמטיות

מאת: Jo Boaler
בעזרתן של: Cathy Williams & Amanda Confer
מתוך: Youcubed, Stanford, 2014

[/https://www.youcubed.org/fluency-without-fear](https://www.youcubed.org/fluency-without-fear)

תרגום: ד"ר מיכל סוקניק

הקדמה

לפני כמה שנים, פוליטיקאי בריטי בשם Stephen Byers, עשה טעות בלתי מזיקה במהלך ראיון. השר הנכבד התבקש לתת תשובה ל- 7×8 , ותשובתו היתה 54 במקום התשובה הנכונה 56. שגיאתו עוררה לעג רב בתקשורת הארצית, שלווה בקריאה לדגש חזק יותר על שינון של 'לוח הכפל' בבתי ספר. בספטמבר האחרון, שר החינוך הקונסרבטיבי של אנגליה, איש חסר ניסיון חינוכי, דרש שכל התלמידים באנגליה יזכרו את כל עובדות הכפל עד 12×12 בגיל 9. דרישה זו הוכנסה כעת לתכנית הלימודים במתמטיקה של אנגליה ותוצאתה תתבטא, אני מנבאה, בהעלאת רמות חרדת המתמטיקה ובהימנעותם של תלמידים רבים ממתמטיקה. בארצות הברית נעים בכיוון ההפוך, כשהסטנדרטים הארציים (Common Core State Standards–CCSS) מפחיתים בחשיבותו של שינון בעל פה של עובדות מתמטיות. למרבה הצער, פרשנויות שגויות של משמעות המילה 'רהיטות' (fluency) ב- CCSS הן נפוצות, והמוציאים לאור ממשיכים להדגיש שינון בעל-פה, ומעודדים בכך את התמדת הנזק לפעילויות הכיתתיות בארצות הברית.

עובדות מתמטיות הן חשובות, אך השינון של עובדות מתמטיות על ידי חזרה, תרגול ומבחנים המוגבלים בזמן היא מיותרת ומזיקה. שגיאתו של השר האנגלי כשנשאל על 7×8 הביאה לקריאה ליותר שינון. זה היה אירוני, משום ששגיאתו חשפה את מגבלות השינון ללא 'תובנה מספרית' (number sense). אנשים שיש להם תובנה מספרית הם אלה שיכולים להשתמש בגמישות במספרים. כשמבקשים מישהו עם תובנה מספרית לפתור 7×8 יתכן שיזכור 56, אבל הוא גם יוכל לחשב ש- 7×7 זה 49 ואז להוסיף 7 כדי לקבל 56, או שיוכל

לחשב 10×7 ולהחסיר פעמיים 7 ($14 - 70$). הוא לא יצטרך להסתמך על זיכרון רחוק. העובדות המתמטיות בפני עצמן הן חלק קטן ממתמטיקה, ונלמדות הכי טוב על ידי שימוש במספרים בדרכים ובמצבים שונים. למרבה הצער, כיתות רבות מתמקדות בעובדות המתמטיות בדרכים לא פרודוקטיביות, שנותנות לתלמידים את הרושם שהעובדות המתמטיות הן עיקר המתמטיקה, ואפילו גרוע יותר, ששליפה מהירה של עובדות מתמטיות משמעותה להיות תלמיד טוב במתמטיקה. שני רעיונות אלה הם שגויים, וחשוב מאד להכחיד אותם מהכיתות, משום שיש להם חלק גדול ביצירת חרדה וניכור ממתמטיקה אצל תלמידים.

זה שימושי לזכור עובדות מתמטיות אחדות. אני לא עוצרת וחושבת על התשובה ל-8 ועוד 4, כי אני יודעת את העובדה הזו. אבל אני למדתי את העובדות המתמטיות דרך השימוש בהן במצבים מתמטיים שונים, לא על ידי תרגול שלהן ומבחנים עליהן. אני גדלתי בתקופה המתקדמת של אנגליה, כשבתי הספר היסודיים התמקדו ב'ילד כמכלול' ולא הציגו בפני לוחות של חיבור, חיסור או כפל לשינון בבית הספר. זה מעולם לא עיכב אותי בכל זמן או מקום בחיי, למרות שאני פרופסור לחינוך מתמטי. זאת משום שיש לי תובנה מספרית – דבר חשוב בהרבה לתלמידים ללמוד, הכולל לימוד העובדות המתמטיות יחד עם הבנה עמוקה של מספרים והדרכים בהן הם קשורים זה לזה.

תובנה מספרית

בפרויקט מחקר חשוב חוקרים בדקו תלמידים בשעה שפתרו תרגילים (Gray & Tall, 1994). התלמידים, בגילאים 7 עד 13, סווגו על ידי מוריהם כבעלי הישגים נמוכים, בינוניים, או גבוהים. החוקרים מצאו הבדל חשוב בין התלמידים בעלי ההישגים הנמוכים והגבוהים – התלמידים בעלי הישגים גבוהים השתמשו בתובנה מספרית, ואילו בעלי ההישגים הנמוכים לא השתמשו בה. בעלי ההישגים הגבוהים ניגשו לתרגילים כמו $7 + 19$ על ידי שינוי התרגיל, לדוגמה, ל- $6 + 20$. איש מהתלמידים שסווגו כבעלי הישגים נמוכים לא השתמש בתובנה מספרית. כשניתנו לבעלי ההישגים הנמוכים תרגילי חיסור כמו $16 - 21$, הם ספרו לאחור כשהם מתחילים ב-21 וסופרים אחורה, שזה קשה ביותר לעשות. בעלי ההישגים הגבוהים השתמשו באסטרטגיות כמו שינוי המספרים ל- $15 - 20$, שזה הרבה יותר קל לעשות. החוקרים הסיקו שבעלי ההישגים הנמוכים הם כאלה לא משום שהם יודעים פחות, אלא משום שהם אינם משתמשים במספרים בגמישות – קיבעו אותם במסלול השגוי, בדרך כלל מגיל צעיר, של ניסיון לזכור שיטות במקום של אינטראקציה עם מספרים באופן גמיש משמעותו של מסלול שגוי זה היא שהם לעיתים קרובות לומדים מתמטיקה (Boaler, 2009).

קשה יותר, ולמרבה הצער, הם לעיתים קרובות עומדים בפני בעיות עם מתמטיקה למשך כל החיים.

תובנה מספרית היא הבסיס לכל המתמטיקה ברמה גבוהה יותר (Feikes & Schwingendorf, 2008). כשתלמידים נכשלים באלגברה זה קורה לעיתים קרובות משום שאין להם תובנה מספרית. כשתלמידים עובדים על בעיות מתמטיות עשירות – כמו אלה שיוצגו בסוף מאמר זה – הם מפתחים תובנה מספרית וכן לומדים ומסוגלים לזכור עובדות מתמטיות. כשתלמידים מתמקדים בשינון לוח הכפל, הם לעיתים קרובות משגים עובדות ללא תובנה מספרית, שמשמעותו שהם מאד מוגבלים במה שביכולתם לעשות, ונוטים לעשות שגיאות – כמו זו שהובילה ללעג כלל-ארצי לפוליטיקאי הבריטי. חוסר תובנה מספרית הובילה לשגיאות חמורות יותר, כמו טלסקופ הבל (Hubble Telescope) שפספס את הכוכבים שהיה אמור לצלם בחלל. הטלסקופ חיפש כוכבים במקבץ מסוים, אך נכשל עקב שגיאה אריתמטית שמישהו עשה בתכנות הטלסקופ (LA Times, 1990). תובנה מספרית, החיונית להתפתחות המתמטית של התלמידים, נמנעת על ידי הדגשת יתר של שינון עובדות מתמטיות בכיתות ובבתים. ככל שאנו מדגישים שינון וזכירה לתלמידים, כך הם פחות מוכנים לחשוב על מספרים והקשרים ביניהם, להשתמש בתובנה מספרית ולפתח אותה (Boaler, 2009).

המוח ותובנה מספרית

חלק מהתלמידים אינם טובים כמו אחרים בזכירת עובדות מתמטיות. זהו משהו שצריך לשבח, זהו חלק מהשונות הנפלאה של החיים והאנשים. תארו לעצמכם כמה משעמם וחסר השראה היה, לו מורים היו נותנים מבחנים של עובדות מתמטיות, וכולם היו עונים עליהם באותה צורה ובאותה מהירות כאילו היו רובוטים. במחקר מוח שנעשה לאחרונה, בדקו מדענים את מוחות התלמידים בשעה שלימדו אותם לשנן עובדות מתמטיות. הם ראו שחלק מהתלמידים הצליחו לזכור אותן ביתר קלות מאשר אחרים. זה לא יפתיע את הקוראים, ורבים מאיתנו ודאי יניחו שאלה שזכרו טוב יותר היו תלמידים בעלי הישגים גבוהים יותר או "אינטליגנטים יותר". אולם החוקרים מצאו שהתלמידים שזכרו יותר בקלות לא היו בעלי הישגים גבוהים יותר, לא היה להם מה שהחוקרים תיארו כיותר "יכולת מתמטית", ולא היו להם ציוני IQ גבוהים יותר (Supekar et al, 2013). ההבדלים היחידים שהחוקרים מצאו היו באיזור המוח הקרוי ההיפוקמפוס, שהוא האיזור במוח האחראי לזכירת עובדות (Supekar et al, 2013). חלק מהתלמידים יהיו איטיים יותר בזכירה, אבל עדיין יהיה להם פוטנציאל מתמטי יוצא דופן. עובדות מתמטיות הן חלק קטן מאד של המתמטיקה, אך למרבה הצער,

תלמידים שלא זוכרים היטב עובדות מתמטיות, מאמינים לעיתים קרובות שהם לעולם לא יצליחו במתמטיקה ונמנעים מהמקצוע.

מורים בכל ארה"ב ובריטניה מבקשים מתלמידים לשנן עובדות כפל, ולעיתים גם עובדות חיבור וחיסור, בדרך כלל משום שהסטנדרטים של תכנית הלימודים ציינו שלתלמידים צריכה להיות "רהיטות עם מספרים". Parish, שהסתמך על (Fosnot and Dolk (2001), מגדיר רהיטות כ"לדעת כיצד מספר יכול להיות מורכב ומפורק ושימוש במידע זה כדי להיות גמיש ויעיל בפתרון בעיות" (Parish 2014, p. 159). בין אם אנו מאמינים שרהיטות דורשת יותר מאשר זכירה של עובדות מתמטיות, ובין אם לא, עדות מחקרית מצביעה על כיוון אחד: הדרך הטובה ביותר לפתח רהיטות עם מספרים היא לפתח תובנה מספרית ולעבוד עם מספרים בדרכים שונות, לא לזכור באופן עיוור ללא תובנה מספרית.

כשמורים מדגישים את שינון העובדות, ונותנים מבחנים כדי למדוד עובדות מספריות, תלמידים סובלים בשתי דרכים חשובות. עבור כשליש מהתלמידים, ההתחלה של מבחנים המוגבלים בזמן היא תחילתה של חרדת מתמטיקה (Boaler, 2014). Sian Beilock ועמיתיה חקרו מוחות של אנשים על ידי הדמיית MRI ומצאו שעובדות מתמטיות מוחזקות באיזור המוח של זיכרון העבודה. אך כשתלמידים נמצאים בלחץ, כמו בזמן שהם עונים על שאלות תחת לחץ זמן, זיכרון העבודה נחסם ולתלמידים אין גישה לעובדות המתמטיות שהם יודעים (Beilock, 2011; Ramirez et al, 2013). כשתלמידים מכירים בכך שאינם מבצעים היטב במבחנים מוגבלים בזמן, הם מתחילים לפתח חרדה, והביטחון המתמטי שלהם מתערער. חסימת זיכרון העבודה והחרדה הקשורה לכך מתרחשת בעיקר אצל תלמידים בעלי הישגים גבוהים יותר ובנות. אומדן זהיר מציע שלפחות שליש מהתלמידים חווים לחץ קיצוני סביב מבחנים המוגבלים בזמן, ואלה אינם תלמידים בקבוצת הישגים מסוימת, או רקע כלכלי מסוים. כשאנו גורמים לתלמידים לעבור התנסות מעוררת חרדה זו, אנו מאבדים אותם מבחינת המתמטיקה.

חרדת מתמטיקה מתועדת עכשיו אצל תלמידים החל מגיל 5 (Ramirez et al 2013) ומבחנים מוגבלים בזמן הם סיבה עיקרית למצב קשה זה, שלרוב נמשך כל החיים. אולם יש סיבה שנייה לא פחות חשובה שבגללה אין להשתמש במבחנים מוגבלים בזמן – הם מניעים תלמידים רבים להתרחק ממתמטיקה. בכיתות שלי באוניברסיטת סטנפורד, אני פוגשת סטודנטים רבים עם טראומה ממתמטיקה, למרות שהם בין הסטודנטים בעלי ההישגים הגבוהים ביותר במדינה. כשאני שואלת מה הביא אותם לסלידה ממתמטיקה, רבים מהסטודנטים מדברים על מבחנים תלויים בזמן בכיתה ב או ג כנקודת מפנה עיקרית עבורם, כשהחליטו שמתמטיקה היא לא בשבילם. חלק מהסטודנטים, במיוחד נשים, מדברות על הצורך להבין לעומק, שזוהי מטרה בעלת ערך רב, וקבלת ההרגשה שהבנה עמוקה אינה

מוערכת או מוצעת כשמבחינים מוגבלים בזמן הפכו לחלק משיעורי המתמטיקה. הם יכלו לעשות עבודה אחרת בשיעורי המתמטיקה, בעלת ערך רב יותר, המתמקדת במציאת משמעות ובהבנה, אבל המבחינים המוגבלים בזמן עוררו רגשות כה חזקים, שתלמידים מתחילים להאמין שמהירות עם עובדות מתמטיות היא עיקר המתמטיקה. זה מאד מצער. אנו רואים את תוצאת הדגש המוטעה בבתי ספר על שינון ומבחינים במספרים של אלה הפורשים ממתמטיקה ומשבר במתמטיקה שעומד עכשיו בפנינו (ראו www.youcubed.org). כשביתי התחילה את שינון לוח הכפל והמבחינים בגיל 5 באנגליה היא התחילה לחזור הביתה ולבכות על מתמטיקה. זה לא הרגש שאנו רוצים שתלמידים יקשרו עם מתמטיקה, וכל עוד נמשיך להלחיץ את תלמידינו לזכור עובדות במהירות, לא נכחיד את החרדה והשנאה הנפוצות כלפי המתמטיקה, השולטות בארה"ב ובבריטניה (Silva & White, 2013; National Numeracy, 2014).

בהשתלמות שהעברתי לאחרונה למורים בקליפורניה, שיתפתי אותם בעובדה שאני לא זכרתי את לוח הכפל כילדה. בנוסף שיתפתי אותם בכך שזה לא עצר אותי בשום צורה ובשום זמן, למרות שעסקתי ועבדתי במתמטיקה יום יום. כשסיפרתי זאת לחדר מלא במורים, ארבעה מהם בנו. בהפסקה אחת מהן הסבירה לי, תוך כדי בכי, שהמשפט שאמרתי שינה הכל עבורה. כילדה היה לה קושי לזכור את לוח הכפל ואבא שלה נטע בה את הרעיון שהיא לקויה בצורה מסוימת. כל חייה היא הרגישה שמהו לא בסדר איתה. היא סיפרה לי שנכחה במפגש שקיימתי עם המנהלת שלה, וחששה שה"לקות" שלה תיחשף. מספר האנשים שניזוקו מהדגש על מבחינים מוגבלים בזמן ושינון עובדות המתמטיקה בבתי הספר, הוא גדול בצורה מדאיגה.

מדוע מתייחסים למתמטיקה באופן שונה?

כדי ללמוד להיות תלמיד טוב באנגלית, לקרוא ולהבין ספרות או שירה, תלמידים צריכים לשנן את משמעותן של מילים רבות. אולם אף תלמיד באנגלית לא יאמר או יחשוב שלימוד אנגלית משמעותו זכירה ושליפה מהירה של מילים. זאת משום שאנו לומדים מילים על ידי שימוש בהן במצבים שונים – דיבור, קריאה וכתיבה. מורי אנגלית לא נותנים לתלמידיהם מאות מילים לשנן ואחר כך בוחנים אותם בתנאים של לחץ זמן. כל המקצועות דורשים שינון של כמה עובדות, אך מתמטיקה היא המקצוע היחיד שבו מורים מאמינים שצריך להיבחן בו בתנאים של הגבלת זמן. מדוע מתייחסים כך למתמטיקה?

למתמטיקה יש כבר בעיה ענקית של תדמית. תלמידים לעיתים רחוקות בוכים על מקצועות אחרים, ולא חושבים שהם בעיקר שינון או מהירות. השימוש בדרכי הוראה והורות המדגישות את שינון העובדות המתמטיות הוא חלק עיקרי מהסיבה שבגללה תלמידים

מנותקים מהמתמטיקה. אנשים רבים יטענו שמתמטיקה שונה ממקצועות אחרים וכך צריך להיות – שהמתמטיקה כולה היא קבלת תשובות נכונות, לא פרשנות או משמעות. זוהי תפיסה שגויה נוספת. ליבה של המתמטיקה הוא הנמקה – חשיבה מדוע שיטות הן הגיוניות ודיבור על הסיבות לשימוש בשיטות שונות (Boaler, 2013). עובדות מתמטיות הן חלק קטן מהמתמטיקה וכנראה החלק הכי פחות מעניין. Conard Wolfram, מ-Wolfram-Alpha, אחת מחברות המתמטיקה המובילות, מדבר בפומבי על רוחב היריעה של המתמטיקה והצורך להפסיק לתפוס את המתמטיקה כחישובים. הן Wolfram והן אני לא טוענים שבת-ספר לא צריכים ללמד חישובים, אך האיזון צריך להשתנות, ותלמידים צריכים ללמוד לחשב באמצעות תובנה מספרית, וכן להקדיש זמן רב יותר לחלקים לא מפותחים אך חיוניים במתמטיקה כמו פתרון בעיות והנמקה.

בשעה שמלמדים תלמידים תובנה מספרית ועובדות מספריות חשוב לעולם לא להדגיש מהירות. למעשה זה נכון עבור כל המתמטיקה. ישנה תפיסה שגויה נפוצה ומזיקה במתמטיקה – הרעיון שתלמידים חזקים במתמטיקה הם תלמידים מהירים במתמטיקה. אני עובדת עם מתמטיקאים רבים, ודבר אחד ששמתי לב לגביהם הוא שהם אינם בהכרח מהירים עם מספרים, ולמעשה חלקם די איטיים. זה אינו חיסרון, הם איטיים כי הם חושבים לעומק ובהירות על מתמטיקה. Laurent Schwartz, מתמטיקאי בכיר, כתב אוטוביוגרפיה על ימיו בבית הספר, וכיצד גרמו לו להרגיש "טיפש" כי הוא היה אחד מהחושבים הכי איטיים במתמטיקה בכיתתו (Schwartz, 2001). לקח לו שנים רבות של הרגשה של פגום, כדי להגיע למסקנה ש: "למהירות אין קשר מדויק לאינטליגנציה. מה שחשוב הוא להבין לעומק דברים ואת הקשרים ביניהם. שם טמונה האינטליגנציה. העובדה שאתה מהיר או איטי אינה ממש רלבנטית." (Schwartz, 2001). למרבה הצער, שיעורי מתמטיקה המדגישים מהירות ומבחנים, מובילים תלמידים רבים שהם איטיים וחושבים לעומק, כמו Schwartz, להאמין שאינם יכולים להיות טובים במתמטיקה.

רהיטות מתמטית ותכנית הלימודים

בארה"ב תכנית הלימודים החדשה Common Core כוללת 'רהיטות' כמטרה. רהיטות מגיעה כשתלמידים מפתחים תובנה מספרית, כשהם בטוחים במתמטיקה משום שהם מבינים מספרים. למרבה הצער, המילה 'רהיטות' לעיתים מפורשת שלא כהלכה. 'Engage' New York היא תכנית לימודים ההופכת יותר ויותר פופולרית בארה"ב, המפרשת רהיטות בצורה שגויה בדרכים הבאות:

רהיטות: תלמידים מצופים שיהיו להם **מהירות ודיוק** בחישובים פשוטים; מורים מתכננים זמני שיעורים ו/או שיעורי בית לתלמידים **לשינון**, על

ידי חזרה, של פונקציות בסיסיות כמו לוח הכפל, כך שהם מסוגלים יותר להבין ולחשב פונקציות מורכבות יותר. (Engage New York).

יש בעיות עם הנחייה זו. מהירות ושינון הם שני כיוונים שעלינו להתרחק מהם בדחיפות, לא להתקרב אליהם. בעיתיות נוספת היא ש'Engage New York' מקשרת בין שינון עובדות מספריות לבין הבנת התלמידים פונקציות מורכבות יותר – טענה שאין לה תמיכה של עדות מחקרית. המחקר אומר לנו שתלמידים מבינים פונקציות מורכבות יותר כשיש להם תובנה מספרית והבנה עמוקה של עקרונות מספריים, לא זכירה עיוורת או שליפה מהירה (Boaler, 2009). אני עובדת כעת עם מנתחים של מבחני ה-PISA ב-OECD. צוות ה-PISA לא רק מעביר מבחני מתמטיקה בינלאומיים כל 4 שנים, הם גם אוספים נתונים על האסטרטגיות המתמטיות של התלמידים. הנתונים שלהם מ-13 מיליון ילדים בגיל 15 בכל העולם מראים שהתלמידים בעלי ההישגים הנמוכים ביותר הם אלה המתמקדים בשינון ומאמינים ששינון חשוב ללימוד מתמטיקה (Boaler & Zoido, in press). רעיון זה מתחיל מוקדם בכיתות ויש להכחידו. בעלי ההישגים הגבוהים ביותר בעולם הם אלה המתמקדים ברעיונות הגדולים של המתמטיקה, ובקשרים בין רעיונות. תלמידים מפתחים דימוי של מתמטיקה מקושרת כשהם עובדים על המתמטיקה בצורה מושגית ומשתמשים במציאת היגיון במקום בשינון עיוור.

בבריטניה יש להנחיות פוטנציאל דומה לנזק. תכנית הלימודים הארצית החדשה אומרת שכל התלמידים צריכים 'לזכור את לוח הכפל עד 12 ועד בכלל' עד גיל 9, ובעוד תלמידים יכולים לזכור את עובדות הכפל עד 12×12 בעזרת פעילויות עשירות ומעניינות, הנחייה זו גורמת למורים לתת לוחות כפל לתלמידים – לשנן ואחר כך להיבחן עליהם. קבוצה מובילה בבריטניה, שבראשה עומד סופר ומשורר הילדים Michael Rosen, נוצרה כדי להדגיש את הנזק שבמדיניות הנוכחית בבתי הספר ובכמויות של ילדים בבי"ס יסודי שהולכים בבכי לביה"ס מרוב לחץ מהיבחנות-יתר (Garner, The Independent, 2014). מתמטיקה היא הגורם המוביל לחרדה ופחד של תלמידים, וההתמקדות המיותרת בשינון עובדות מתמטיות בשנים המוקדמות היא אחת הסיבות העיקריות לכך.

פעילויות לפיתוח עובדות מספריות ותובנה מספרית

מורים צריכים לעזור לתלמידים לפתח עובדות מתמטיות, לא על ידי הדגשת העובדות לצורך עובדות או שימוש במבחנים מוגבלים בזמן, אלא על ידי עידוד התלמידים להשתמש במספרים, לעבוד איתם ולחקור אותם. כשתלמידים עובדים על פעילויות משמעותיות במספרים, הם ילמדו עובדות מתמטיות בעל פה ובאותו זמן יבינו מספרים ומתמטיקה. הם יהנו וילמדו מתמטיקה חשובה במקום שינון, פחד ואימה מהמתמטיקה.

שיחות מספריות

אחת הדרכים הטובות ביותר ללמד תובנה מספרית ועובדות מתמטיות בעת ובעונה אחת היא לימוד אסטרטגיה הנקראת 'שיחות מספריות' שפותחה על ידי Ruth Parker ו-Kathy Richardson. זוהי פעילות קצרה אידיאלית איתה מורים יכולים להתחיל שיעור או הורים יכולים לעשות בבית. היא כוללת העלאת בעיה מתמטית מופשטת כמו 18×5 ובקשה מהתלמידים לפתור את הבעיה בראש. לאחר מכן המורה אוספת את השיטות השונות ובודקת מדוע הן עובדות. לדוגמה, המורה תשאל כמה זה 18×5 ותמצא שהתלמידים פתרו את התרגיל בדרכים שונות אלה:

$20 \times 5 = 100$ $2 \times 5 = 10$ $100 - 10 = 90$	$10 \times 5 = 50$ $8 \times 5 = 40$ $50 + 40 = 90$	$18 \times 5 = 9 \times 10$ $9 \times 10 = 90$	$18 \times 2 = 36$ $2 \times 36 = 72$ $18 + 72 = 90$	$9 \times 5 = 45$ $45 \times 2 = 90$
---	---	---	--	---

תלמידים אוהבים לתת את האסטרטגיות השונות שלהם ובדרך כלל הם לגמרי מרוכזים ונלהבים מהשיטות השונות שעולות. תלמידים לומדים מתמטיקה מנטלית, יש להם הזדמנויות לשינון העובדות המתמטיות והם גם מפתחים הבנה מושגית של מספרים ושל תכונות אריתמטיות החיוניות להצלחה באלגברה ומעבר לכך. הורים יכולים להשתמש באסטרטגיה דומה על ידי בקשה לאסטרטגיות מילדיהם ודין איתם בשיטות השונות בהן אפשר להשתמש. שני ספרים, אחד שנכתב על ידי Cathy Humphreys ו-Ruth Parker (in press) והשני על ידי Sherry Parish (2014) מדגימים שיחות מספריות שונות רבות עליהן אפשר לעבוד עם תלמידי תיכון ויסודי בהתאמה.

המחקר אומר לנו שכיתות המתמטיקה הטובות ביותר הן אלה שבהן התלמידים לומדים עובדות מספריות ותובנה מספרית על ידי עיסוק בפעילויות המתמקדות בהבנה מתמטית

במקום בשינון בעל פה. חמש הפעילויות הבאות נבחרו כדי להדגים עקרון זה; הנספח למסמך זה נותן מגוון גדול יותר של פעילויות ומקשר למשאבים שימושיים נוספים שיעזרו לתלמידים לפתח תובנה מספרית.

פעילויות של עובדות חיבור



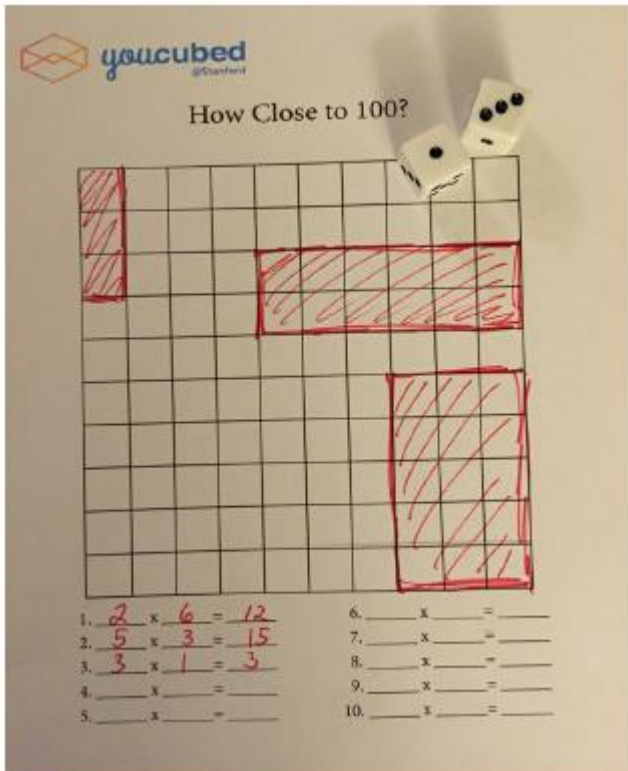
פרק אותה: זו פעילות בה ילדים יכולים לעבוד בקבוצות. כל ילד יוצר רכבת של מספר מסוים מקוביות מתחברות. בהינתן האות "פרקו", התלמידים שוברים את הרכבות שלהם לשני חלקים ומחזיקים יד אחת מאחורי גבם. הילדים מראים במעגל, לפי התור, את הקוביות שנשארו להם. הילדים האחרים צריכים למצוא את צירוף המספרים המלא.

לדוגמה, אם יש לי 8 קוביות ברכבת המספר שלי, אני יכול לפרק אותה ולשים 3 מאחורי גבי. אני אראה לקבוצתי את 5 הקוביות הנותרות ועליהם להיות מסוגלים לומר ששלוש חסרות וש- 5 ועוד 3 הם 8.

כמה מתחבאים? בפעילות זו יש לכל ילד אותו מספר קוביות וכוס. לפי התור הם מחביאים חלק מהקוביות בכוס ומראים את אלה שנשארו. הילדים האחרים מוצאים את התשובה לשאלה "כמה מתחבאים", ואומרים את צירוף המספרים המלא.

דוגמה: יש לי 10 קוביות והחלטתי להחביא 4 בכוס שלי. הקבוצה שלי יכולה לראות שיש לי רק 6 קוביות. התלמידים צריכים להיות מסוגלים לומר שאני מחביא 4 קוביות וש- 6 ועוד 4 הם 10.

פעילויות של עובדות כפל



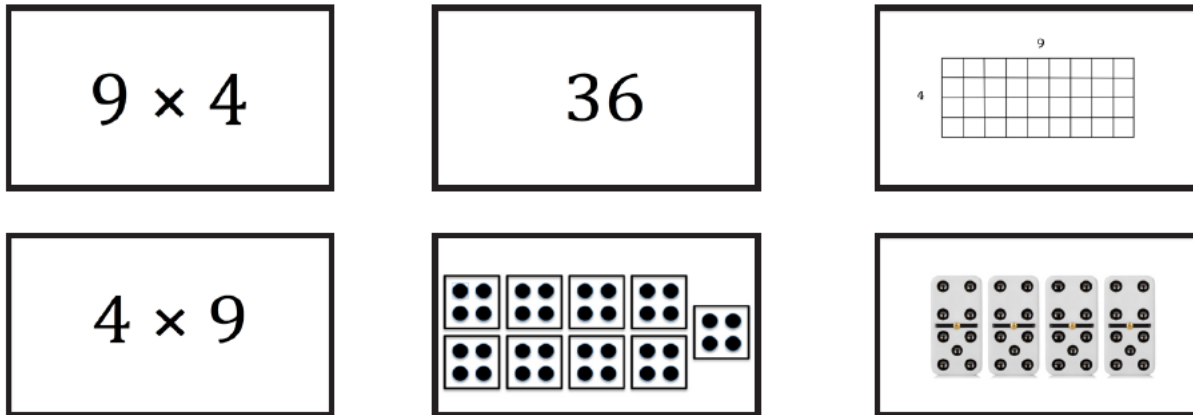
כמה קרוב ל-100? משחק זה משחקים בזוגות. לכל זוג ילדים יש לוח של 100 משבצות ריקות. השחקן הראשון מטיל שתי קוביות משחק. הוא משתמש במספרים שמתקבלים כדי ליצור מערך על לוח ה-100. הילדים יכולים לצייר את המערך בכל מקום על הלוח, אבל המטרה היא למלא את הלוח כך שיהיה הכי מלא שאפשר. לאחר שהשחקן מצייר את המערך על הלוח, הוא כותב את התרגיל המתאר אותו. המשחק מסתיים כששני השחקנים הטילו את הקובייה ואינם יכולים לצייר יותר מערכים על הלוח. כמה קרוב ל-100 תוכלו להגיע?

פיצת פטריות: במשחק זה, הילדים מטילים קובייה פעמיים. ההטלה הראשונה אומרת להם כמה פיצות לצייר. ההטלה השנייה אומרת להם כמה פטריות לשים על כל פיצה. לאחר מכן הם כותבים את התרגיל שיעזור להם לענות על השאלה "כמה פטריות בסך הכל?" לדוגמה, אני מטילה את הקובייה ומקבלת 4, אז אני מציירת 4 פיצות גדולות. אני מטילה שוב ומקבלת 3 אז אני שמה 3 פטריות על כל פיצה. לאחר מכן אני כותבת $4 \times 3 = 12$ וזה אומר לי שיש 12 פטריות בסך הכל.

קלפים מתמטיים

הורים רבים משתמשים ב'כרטיסי הברקה' כדרך לעידוד לימוד של עובדות מתמטיות. אלה בדרך כלל כוללים 2 דברים שאינם מועילים – שינון ללא הבנה ולחץ של זמן. בפעילות שלנו של קלפים מתמטיים, השתמשנו במבנה קלפים שילדים אוהבים, אבל עברנו לדגש על תובנת מספרים והבנה של הכפל. מטרת הפעילות היא להתאים קלפים עם אותה תשובה מספרית, המוצגת בייצוגים שונים. שימו את כל הקלפים על השולחן ובקשו מהילדים לקחת אותם לפי התור; לקחת כמה שהם מוצאים עם אותה התשובה (המוצגת בכל ייצוג). לדוגמה, 9 ו-4 יכולים להיות מוצגים במודל שטח, בקבוצות עצמים כמו דומינו, ובתרגיל. כשתלמידים

מתאימים את הקלפים, עליהם להסביר כיצד הם יודעים שהקלפים השונים הם שקולים. פעילות זו מעודדת הבנה של כפל כמו גם חזרה על עובדות מתמטיות. סט מלא של קלפים מופיע בנספח A.



מסקנה: ידע הוא כוח

הפעילויות המפורטות לעיל הן הדגמות של משחקים ומטלות בהן תלמידים לומדים עובדות מתמטיות בזמן שהם עובדים על משהו ממנו הם נהנים, במקום משהו ממנו מפחדים. הפעילויות השונות גם מתמקדות בהבנה של חיבור וכפל, במקום שינון עיוור וזה חשוב ביותר. בנספח A מוצעים פעילויות ומקורות נוספים.

כמחנכים כולנו שותפים למטרה של טיפוח לומדי מתמטיקה בעלי עוצמה, החושבים היטב על המתמטיקה כמו גם משתמשים במספרים ברהיטות. אולם מורים וכותבי תכניות לימודים אינם מסוגלים לעיתים להגיע למחקר חשוב – דבר הגורם לכך שפרקטיקות לא פרודוקטיביות ממשיכות להתקיים בכיתות. מאמר קצר זה מדגים את הנזק הנגרם על ידי הפרקטיקות המלוות לרוב את הוראת עובדות המתמטיקה – לחץ זמן, מבחנים מוגבלים בזמן ושינון עיוור, וכן מסכם את העדות המחקרית של משהו מאד שונה – תובנה מספרית. תלמידים בעלי הישגים גבוהים משתמשים בתובנה מספרית, וחשוב מאד שתלמידים בעלי הישגים נמוכים, במקום לעבוד על תרגול ושינון, ילמדו גם להשתמש במספרים בגמישות ובאופן מושגי. שינון ומבחנים התלויים בזמן עומדים בדרכה של התובנה המספרית, ונותנים לתלמידים את התחושה שמציאת היגיון אינה חשובה. עלינו לכוון מחדש בדחיפות את ההוראה שלנו של תחילת המספרים ותובנה מספרית בהוראת המתמטיקה שלנו בבריטניה ובארה"ב. אם לא נעשה זאת, רמת הכישלון והנשירה – שכבר נמצאת בגובה שיא בשתי המדינות (National Numeracy, 2014; Silva & White, 2013) – תגדל. כשאנו מדגישים

שינון ומבחנים בשם הרהיטות אנו מזיקים לילדים, אנו מסכנים את עתידה של החברה הכמותית-תמיד שלנו, ואנו מאיימים על תחום המתמטיקה. יש לנו את הידע המחקרי הדרוש כדי לשנות זאת ולאפשר לכל הילדים להיות לומדי מתמטיקה בעלי עוצמה. עכשיו הזמן להשתמש בו.

ביבליוגרפיה

Appendix A: Further Activities and Resources, <http://youcubed.org/teachers/wp-content/uploads/2014/10/AppendixA.pdf>

Beilock, S. (2011). *Choke: What the Secrets of the Brain Reveal About Getting It Right When You Have To*. New York: Free Press.

Boaler, J. (2009). *What's Math Got To Do With It? How Parents and Teachers Can Help Children Learn to Love Their Least Favorite Subject*. New York: Penguin.

Boaler, J. (2013, Nov 12 2013). *The Stereotypes That Distort How Americans Teach and Learn Math*. The Atlantic.

Boaler, J. & Zoido, P. (in press). *The Impact of Mathematics Learning Strategies upon Achievement: A Close Analysis of Pisa Data*.

Engage New York. http://schools.nyc.gov/NR/rdonlyres/9375E046-3913-4AF5-9FE3-D21BAE8FEE8D/0/CommonCoreInstructionalShifts_Mathematics.pdf

Feikes, D. & Schwingendorf, K. (2008). *The Importance of Compression in Children's Learning of Mathematics and Teacher's Learning to Teach Mathematics*. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 7 (2).

Fosnot, C, T & Dolk, M (2001). *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division*. Heinemann:

Garner, R. (October 3, 2014). *The Independent*. <http://www.independent.co.uk/news/education/education-news/authors-teachers-and-parents-launch-revolt-over-exam-factory-schools-9773880.html?origin=internalSearch>

Gray, E., & Tall, D. (1994). *Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

Humphreys, Cathy & Parker, Ruth (in press). *Making Number Talks Matter: Developing Mathematical Practices and Deepening Understanding, Grades 4-10*. Portland, ME: Stenhouse.

LA Times (1990) http://articles.latimes.com/1990-05-10/news/mn-1461_1_math-error

Parish, S. (2014). *Number Talks: Helping Children Build Mental Math and Computation Strategies, Grades K-5, Updated with Common Core Connections*. Math Solutions.

Ramirez, G., Gunderson, E., Levine, S., and Beilock, S. (2013). Math Anxiety, Working Memory and Math Achievement in Early Elementary School. *Journal of Cognition and Development*. 14 (2): 187–202.

Supekar, K.; Swigart, A., Tenison, C., Jolles, D., Rosenberg-Lee, M., Fuchs, L., & Menon, V. (2013). Neural Predictors of Individual Differences in Response to Math Tutoring in Primary-Grade School Children. *PNAS*, 110, 20 (8230-8235)

Schwartz, L. (2001). *A Mathematician Grappling with His Century*. Birkhäuser

Silva, E., & White, T. (2013). *Pathways to Improvement: Using Psychological Strategies to help College Students Master Developmental Math*: Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.

National Numeracy (2014). <http://www.nationalnumeracy.org.uk/what-the-research-says/index.html>

נספח A

<http://youcubed.org/teachers/wp-content/uploads/2014/10/AppendixA.pdf>

כמה קרוב ל-100?

מה צריך

- שני שחקנים
- שתי קוביות
- דף תיעוד (ראו בעמוד הבא)

משחק זה משחקים בזוגות. לכל זוג ילדים יש לוח של 100 משבצות ריקות. השחקן הראשון מטיל שתי קוביות משחק. הוא משתמש במספרים שמתקבלים כדי ליצור מערך על לוח ה-100. הילדים יכולים לצייר את המערך בכל מקום על הלוח, אבל המטרה היא למלא את הלוח כך שיהיה הכי מלא שאפשר. לאחר שהשחקן מצייר את המערך על הלוח, הוא כותב את התרגיל המתאר אותו. המשחק מסתיים כששני השחקנים הטילו את הקובייה ואינם יכולים לצייר יותר מערכים על הלוח. כמה קרוב ל-100 תוכלו להגיע?

וריאציה

לכל ילד יש לוח משבצות משלו. המשחק ממשיך עד שרואים מי הגיע הכי קרוב ל-100.

youcubed @Stanford

How Close to 100?

1.	2	x	6	=	12
2.	5	x	3	=	15
3.	3	x	1	=	3
4.		x		=	
5.		x		=	
6.		x		=	
7.		x		=	
8.		x		=	
9.		x		=	
10.		x		=	

כמה קרוב ל-100?

1. _____ x _____ = _____

2. _____ x _____ = _____

3. _____ x _____ = _____

4. _____ x _____ = _____

5. _____ x _____ = _____

6. _____ x _____ = _____

7. _____ x _____ = _____

8. _____ x _____ = _____

9. _____ x _____ = _____

10. _____ x _____ = _____

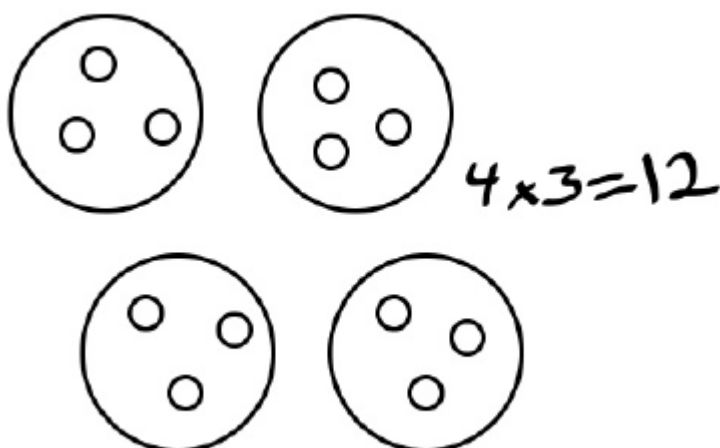
פיצת פטריות

מה צריך

- שחקן אחד או יותר
- שתי קוביות לכל שחקן

במשחק זה, הילדים מטילים קובייה פעמיים. ההטלה הראשונה אומרת להם כמה פיצות לציר. ההטלה השנייה אומרת להם כמה פטריות לשים על כל פיצה. לאחר מכן הם כותבים את התרגיל שיעזור להם לענות על השאלה "כמה פטריות בסך הכל?"

לדוגמה, אני מטילה את הקובייה ומקבלת 4, אז אני מציירת 4 פיצות גדולות. אני מטילה שוב ומקבלת 3 אז אני שמה 3 פטריות על כל פיצה. לאחר מכן אני כותבת $4 \times 3 = 12$ וזה אומר לי שיש 12 פטריות בסך הכל.

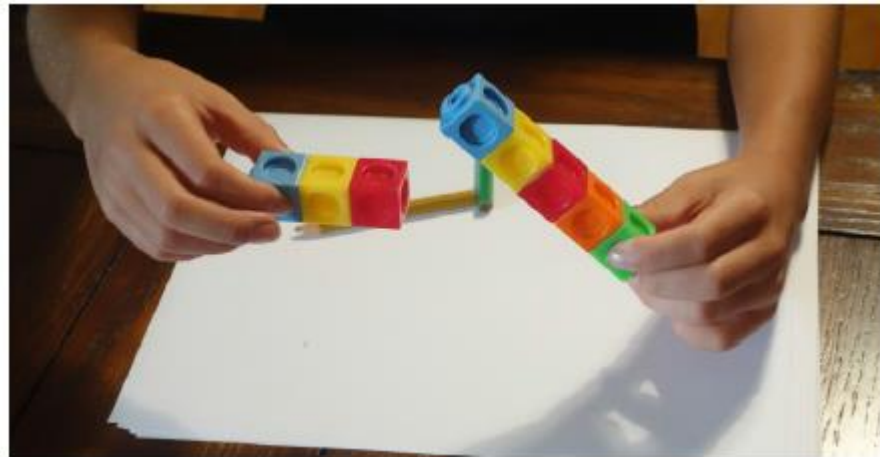


פרק אותה

מה צריך

- שחקן אחד או יותר
- 10 או יותר קוביות מתחברות לכל שחקן

זו פעילות בה ילדים יכולים לעבוד בקבוצות. כל ילד יוצר רכבת של מספר מסוים מקוביות מתחברות. בהינתן האות "פרקו", התלמידים שוברים את הרכבות שלהם לשני חלקים ומחזיקים יד אחת מאחורי גבם. הילדים מראים במעגל, לפי התור, את הקוביות שנשארו להם. הילדים האחרים צריכים למצוא את צירוף המספרים המלא.



כמה מתחבאים?

מה צריך

- שחקן אחד או יותר
- 10 או יותר קוביות מתחברות לכל שחקן
- כוס לכל שחקן

בפעילות זו יש לכל ילד אותו מספר קוביות וכוס. לפי התור הם מחביאים חלק מהקוביות בכוס ומראים את אלה שנשארו. הילדים האחרים מוצאים את התשובה לשאלה "כמה מתחבאים", ואומרים את צירוף המספרים המלא. דוגמה: יש לי 10 קוביות והחלטתי להחביא 4 בכוס שלי. הקבוצה שלי יכולה לראות שיש לי רק 6 קוביות. התלמידים צריכים להיות מסוגלים לומר שאני מחביא 4 קוביות וש- 6 ועוד 4 הם 10.

סגרו את הקופסה

מה צריך

- שחקן אחד או יותר
- 2 קוביות
- נייר ועיפרון

כתבו את המספרים 1 עד 9 בשורה אופקית על הנייר. שחקן 1 מטיל את הקוביות ומחשב את סכום שני המספרים. לאחר מכן הוא בוחר למחוק מספרים שיש להם אותו סכום כמו שהתקבל מהטלת הקוביות. אם המספרים 7, 8, ו-9 מחוקים, שחקן 1 יכול לבחור להטיל קובייה אחת או שתיים. אם אחד מהמספרים האלה עדיין לא מחוק, השחקן חייב להשתמש בשתי הקוביות. שחקן 1 ממשיך להטיל את הקוביות, לחשב את הסכום ולמחוק מספרים, עד שאינו יכול להמשיך יותר. אם כל המספרים נמחקו, השחקן אומר "סגרו את הקופסה". אם לא כל המספרים נמחקו, שחקן 1 מחשב את סכום המספרים שלא נמחקו, וזהו סכום הנקודות שלו. אם הגיע למצב של "סגרו את הקופסה", שחקן 1 מקבל 0 נקודות. שחקן 2 כותב את המספרים 1 עד 9 ומשחק לפי כל החוקים כמו שחקן 1. מנצח השחקן עם סכום הנקודות הנמוך ביותר.

וריאציה

שחקנים 1 ו-2 יכולים לבחור לשחק 5 סיבובים, כשהם מסכמים את הנקודות שלהם לאחר כל סיבוב. השחקן עם סך הנקודות הנמוך ביותר מנצח במשחק.

קלפים מתמטיים

מה צריך

- שחקן אחד או יותר
- חפיסת קלפים אחת (ראו את העמודים הבאים)

הורים רבים משתמשים ב'כרטיסי הברקה' כדרך לעידוד לימוד של עובדות מתמטיות. אלה בדרך כלל כוללים 2 דברים שאינם מועילים – שינון ללא הבנה ולחץ של זמן. בפעילות שלנו של קלפים מתמטיים, השתמשנו במבנה קלפים שילדים אוהבים, אבל עברנו לדגש על תובנת מספרים ו**הבנה** של הכפל. מטרת הפעילות היא להתאים קלפים עם אותה תשובה מספרית, המוצגת בייצוגים שונים. שימו את כל הקלפים על השולחן ובקשו מהילדים לקחת אותם לפי התור; לקחת כמה שהם מוצאים עם אותה התשובה (המוצגת בכל ייצוג). לדוגמה, 9 ו-4 יכולים להיות מוצגים במודל שטח, בקבוצות עצמים כמו דומינו, ובתרגיל. כשתלמידים מתאימים את הקלפים, עליהם להסביר כיצד הם יודעים שהקלפים השונים הם שקולים. פעילות זו מעודדת הבנה של כפל כמו גם חזרה על עובדות מתמטיות.

[להדפסת הקלפים](#) – עמודים 7-19 בקישור הנ"ל.