הערכת המושג המדעי של מספר אצל ילדי בית הספר היסודי

Assessing the Scientific Concept of Number in Primary School Children

מאת: Peter Moxhay
הוצג בכנס ISCAR, 2008
תרגום: ד"ר מיכל סוקניק

תקציר

תכנית הלימודים של Davydov שמה לה למטרה פיתוח מושג מדעי (תיאורטי) של מספר החל מכיתה א (גילאי 6 – 7). היא מבוססת על הבנייה מחדש, מהפכנית, הן של התוכן והן של צורת הלמידה בכיתה. מתעוררת השאלה כיצד להעריך את רמת ההתפתחות של מושג המספר אצל ילדים צעירים כאלה. מוצגות תוצאות של שלוש הערכות שונות של מושג המספר אצל תלמידים בכיתות א ו- ב בבית ספר בארה"ב. ההערכות הן מהסוגים הבאים: (1) מטלות מכוונות-אובייקט, (2) הערכות כתובות קצרות, ו- (3) עבודה מתמשכת עם תוכנות מחשב שנוצרו במיוחד. ביצוע קורלציות בין שלושת סוגי הערכה אלה, מציע שבאוכלוסיית בית הספר הנתונה, לא התאפשר לפתח מושג מדעי של מספר בכיתה א, אך כן התאפשר לעשות זאת בסוף כיתה ב. הצלחה מלאה (קרוב ל- 100% מהתלמידים המפגינים את מושג המספר) הושגה רק בכיתה שבה צורת ההוראה של Davydov התקבלה במלואה על ידי התלמידים. ההערכות המתמטיות הושלמו על ידי הערכה של רמת ההתפתחות של הילדים ברמות הניתוח, התכנון והרפלקציה של חשיבה תיאורטית, על סמך מבחן שיצר A. Z. Zak.

I. מבוא

הוראת מתמטיקה בשנים הראשונות של בית הספר היסודי ממשיכה להוות בעיה עבור המורים. חלק מהילדים מסוגלים להתמצא בקלות בתכנית הלימודים במתמטיקה מתחילת כיתה א, בעוד שאחרים אינם מסוגלים כלל להבין את הבעיות והפעולות המתמטיות עד לשנים האחרונות של בית הספר היסודי ואף בחטיבת הביניים. המורה עומד בפני מכשולים שלא ניתן להתגבר עליהם, בניסיונו לפתח את ההבנה המתמטית של כל הילדים בכיתה, והקשיים אף מחמירים בבתי ספר עם אוכלוסיות מאותגרות בהם יש תערובת של משפחות ברמה כלכלית נמוכה, לומדי אנגלית, וילדים עם מגוון לקויות למידה מאובחנות או שאינן מאובחנות. הגישה המקובלת כיום היא לספק סוג מסוים של הוראה דיפרנציאלית, שביסודה

מספקת חומרי לימוד שונים לתלמידים בעלי יכולות שונות של חשיבה מתמטית. גישה אופטימית יותר מוצגת בתכנית הלימודים במתמטיקה של Davydov (Davydov, 2008, chap. 5), שמטרתה לפתח אצל כל הילדים רמה גבוהה של חשיבה מתמטית. זוהי הוראה "התפתחותית" המנסה לפתח את היכולות המנטליות של כל הילדים. סגנונות הלמידה השונים של הילדים אכן נלקחים בחשבון, לא על ידי הבדלים בחומר ההוראה, אלא על ידי מעורבות של כל הילדים בצורות שונות של דיון קולקטיבי ואינטראקציה בין עמיתים (דיונים כיתתיים, עבודה בקבוצות קטנות, עבודה בזוגות). כל הילדים נחשפים לאותן רמות גבוהות מאד של תוכן מתמטי, שבמבט ראשון נראות כמו מתמטיקה של בית ספר תיכון (שימוש בסמלים אלגבריים, ספירה בבסיסים שונים מ- 10). ספציפית, תכנית הלימודים של Davydov שמה לה למטרה לפתח, אצל כל התלמידים, *מושג מספר* מדעי או תיאורטי, החל מראשית כיתה א.

יש להעריך את האופי המהפכני של מטרה זו. הגישה של Davydov מספקת הבנייה מחדש הן של התוכן והן של הצורה של הלמידה בכיתה. והמטרה של יצירת מושג מדעי של מספר אצל תלמידי כיתה א – של פיתוח החשיבה המושגית האמיתית שלהם – היא גבוהה ביותר ויוצאת דופן. מרבית תכניות הלימוד מניחות שאם תלמידים יכולים למנות כשהם נכנסים לכיתה א, אזי הם "יודעים מהו מספר", ועוברות לאמן את הילדים בפעולות עם מספרים (החל בחיבור וחיסור של מספרים חד-ספרתיים). גישה בסיסית זו לתחילת הוראת המתמטיקה היא כמעט אוניברסלית, ואין זה משנה כיצד היא מוסווית על ידי השימוש באמצעי המחשה ועזרים ויזואליים, או על ידי ניסיונות שונים של למידה שיתופית.

תכניות לימוד מסורתיות מובילות קדימה, במהירות האפשרית, לקראת פיתוח מיומנויות חישוביות, מבלי לנסות לבדוק באמת האם הילדים מבינים את המציאות המונחת ביסוד הפעולות והמונחים המתמטיים. זה מעלה את השאלה כיצד להעריך באופן אמיתי את רמת ההתפתחות של מושג המספר אצל ילדים כבר בכיתה א, ללא התחשבות בתכנית לימודים לה נחשפו. ספציפית, האם תכנית הלימודים של Davydov אכן מפתחת מושג מדעי של מספר אצל תלמידי כיתה א? ואם מושג המספר לא התפתח עד סוף כיתה א, כיצד נוכל להמשיך לעקוב ולתמוך בהתפתחות שלו בכיתה ב והלאה?

הגישה של Davydov מארגנת את תכנית הלימודים כך שחשיבת הילדים עוברת מהכללי לפרטי, ומובילה בעיקרון לשליטה מיידית בקבוצה רחבה של בעיות או מטלות. זאת בניגוד לכל הגישות האחרות הקיימות להוראת מתמטיקה, המבוססות על אימון הילדים במספר גדול של מקרים פרטיים הקשורים לטווח צר יחסית של מטלות, בתקווה שהילדים יבנו במשך

הזמן הבנה כללית. עבור Davydov, מושג תיאורטי הוא בעצמו שיטה כללית של עשייה – שיטה לפתרון קבוצה שלמה של בעיות – והוא קשור למערכת שלמה של פעולות מכוונות-אובייקט (object oriented). למעשה, הילדים לומדים כבר מההתחלה, לפתור יריעה אינסופית של מטלות מתמטיות קשורות. אם זה המצב, מתעוררת הבעיה כיצד להעריך את השליטה בטווח אינסופי של בעיות, תוך שימוש בהכרח במספר מוגבל של תרגילי הערכה. במאמר זה אני מציג ניסיון ראשון לפתרון בעיית הערכה זו בבית ספר בארה"ב, המבוסס על התאמה והרחבה של סוגי הערכה אחדים שהוצעו במקור על יד Davydov ועמיתיו.

עבודה זו היא שיאו של פרויקט (Moxhay, 2003) שנמשך שש שנות לימוד (2002 – 2003 עד 2007 – 2008), וניסה לאמץ ולשנות גרסה אחת של תכנית הלימודים במתמטיקה של Davydov בבתי ספר ציבוריים בפורטלנד (מיין, ארה"ב). אדווח כאן רק על חלק מהתוצאות שהתקבלו במהלך השנתיים האחרונות של הפרוייקט (2006 – 2007 ו- 2007 – 2008), ובבית ספר אחד בלבד – בית ספר יסודי Presumpscot. אתמקד רק בשנתיים האחרונות של הפרוייקט, משום שארבע השנים הראשונות הוקדשו לאימון המורים לרמה גבוהה של הבנת הגישה של Davydov ולהסתגלות לתכנית הלימודים ולסוגי ההערכה המתאימים.

יהיה מתאים לתת כאן תיאור קצר של אוכלוסיית בית הספר. בפורטלנד, מיין, יש קהילה עם שונות תרבותית וכלכלית, ומספר משמעותי של מהגרים חדשים. בביה"ס יש 28% תלמידים שאנגלית אינה שפת אם שלהם, ו- 60% תלמידים הזכאים לארוחות חינם. אוכלוסיית התלמידים מאתגרת להוראה, אך היא אינה הקשה ביותר בעיר פורטלנד.
הגרסה של תכנית הלימודים במתמטיקה של Davydov אותה ניסינו לאמץ היתה החדשה ביותר (Gorbov et.al, 2001), ומיועדת לבתי ספר יסודיים ברוסיה, בהם הילדים מגיעים לכיתה א בגיל 6. גירסה קודמת של תכנית הלימודים במתמטיקה פותחה במקור לשימוש עם ילדים רוסים שהתחילו בית ספר בגיל 7, כפי שנעשה בעבר בברית המועצות. בגרסה הרוסית החדשה יותר יש התאמה משמעותית לגיל הצעיר יותר של תלמידים, משום שבעבר גיל 7 נחשב לגיל שבו לימוד החליף את המשחק כפעילות המובילה המניעה את ההתפתחות המנטלית של הילדים. מצאנו שכדי להשתמש בתכנית הלימודים במערכת הבית-ספרית שלנו, היה צורך לעשות גזירה וסידור מחדש של חומר הלימוד, לא רק כדי להפוך את השיעורים לנגישים עבור תלמידינו, אלא גם שהמתמטיקה לא תסטה יותר מידי מלוח הזמנים המוכתב על ידי הסטנדררטים וההערכה המקומיים והארציים.

לא אדון כאן בפרטי תכנית הלימודים של Davydov, או בהתאמות שלנו אליה. אולם אחד ההיבטים העיקריים שלה הוא, שכדי לפתח את מושג המספר, יש לדחות את הצגת המספרים עצמם עד שיעברו מספר חודשים בכיתה א. השיעורים בשליש הראשון של כיתה

א מתמקדים בחומר "טרום-מספרי": תכונות של אוביקטים כמו צבע, צורה וגודל, וכן כמויות כמו אורך, נפח, שטח, משקל, וכמות של עצמים בדידים (כלומר, אוספים של דברים, אך עדיין ללא שימוש במספר כדי למנות "כמה יש"). תכנית הלימודים בנוייה כך, על מנת שמושג המספר יופיע ויתגלה מתוך התנאי המקדים של מושג הכמות המתמטית. בבתי הספר שלנו עשינו כמה קיצוצים בתכנית הלימודים, כך שהצגת המספרים מתרחשת לא יאוחר מ- 1 בדצמבר.

בית ספר Presumpscot הוא בית ספר קטן; במהלך השנים עליהן אדווח, בכל שכבת גיל היו רק 2 כיתות, עם כ- 20 ילדים בכל כיתה. למרות שתכנית הלימודים של Davydov התקיימה גם בבתי ספר אחרים, כדאי לנתח את התוצאות של פיתוח מושג המספר בבית ספר זה, משום שרמת ההכשרה של המורים היתה אחידה ובאיכות גבוהה בכל הכיתות המשתתפות. (השתמשנו בתכנית של Davydov בכיתות א, ב, וחלקית בכיתה ג, בנושא של חיבור וחיסור מספרים רב-ספרתיים). בית ספר Presumpscot היה ייחודי במערכת החינוך שלנו, בכך שתכנית הלימודים של Davydov אומצה בכל בית הספר (בכיתות הרלבנטיות) וכך מנעה קונפליקט בין מורים המשתמשים בגישת Davydov לבין מורים המשתמשים בתכנית יותר מסורתית.

II. היבטים אחדים של חשיבה מושגית של ילדים

<u>חשיבה מושגית: מכוונת-אובייקט, מכלילה ורפלקטיבית</u>

על מנת להבין כיצד ומדוע בחרנו סוגי הערכה מסוימים עבור מושג המספר בכיתות א ו- ב, יש לדון בעצם הרעיון של Davydov אודות מהו מושג ומהם התנאים להתפתחות מושג המספר אצל ילדי בית הספר היסודי. דיון זה יבהיר שבפסיכולוגיה ובפילוסופיה הרוסית, עצם המונח של מושג נבדק בצורה הרבה יותר מלאה מאשר בספרות הפדגוגית המערבית. מושג המספר של Davydov מגיע הרבה מעבר ל"תובנת מספר" או "חשיבה כמותית" כמגוון של יכולות ומיומנויות רצויות עם מספרים.

בגישתו של Davydov, האמירה שלילדים יש מושג, או שהם מפגינים חשיבה מושגית, חייבת להיות מבוססת על נוכחותן של שלוש תכונות. ראשית, החשיבה שלהם חייבת להיות *מכוונת-אובייקט*, כלומר, היא חייבת להיות מושתתת בעיקר על פעולות עם טרנספורמציות על עצמים אמיתיים במקום על פעולות עם סימנים. Davydov כותב (Davydov, 2008, chap. 4):

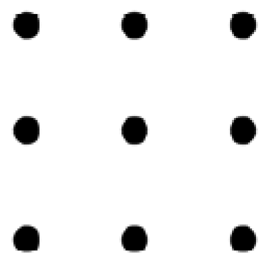
...כל מושג מסתיר פעולה קוגניטיבית מיוחדת, מכוונת-אובייקט.. שצריכה להתגלות כדי לחשוף את המנגנונים הפסיכולוגים עבור ההופעה והתפקוד של המושג הנתון.

שנית, היא חייבת להיות *מוכללת* – היא חייבת להתקשר למערכת שלמה של מטלות (בעיות) קשורות, במקום להיות מבוססת על אימון הילדים לפתור טווח צר של מטלות מסוימות. שלישית, היא חייבת להתבסס על פעולת החשיבה של *רפלקציה* – היכולת להתחשב בבסיסן של הפעולות של הילד עצמו (קשור לרעיון של מטה-קוגניציה כיכולת לחשוב על החשיבה של האדם עצמו). להלן פירוט כל אחת משלוש תכונות אלה.

<u>חשיבה מכוונת-אובייקט</u>

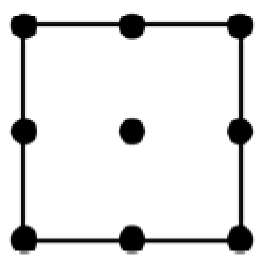
אם חשיבה קונספטואלית היא, באופן בסיסי מכוונת-אובייקט, כלומר, אם היא נובעת מפעולות או פעילות מכוונת-אובייקט, אזי על מנת לחקור את יצירת מושג המספר, עלינו לקבוע מהו *האובייקט* של המתמטיקה הבית-ספרית. (במאמר זה, כשאנו אומרים "מתמטיקה" אנו מתכוונים לאריתמטיקה, כלומר, לימוד המספר. אין אנו עוסקים בנושא של פיתוח מושגים של גיאומטריה, למשל). דרך אחרת לשאול את השאלה על *האובייקט* של מתמטיקה, היא לשאול איזו *מטלה* אנושית נפתרת בעזרת שיטות מתמטיות של פעולה שהתעוררה במהלך ההיסטוריה האנושית.

כדי לקבוע טרמינולוגיה מסוימת, הבה נבחן קודם מטלה או חידה אחרת, "בעיית תשע הנקודות" (איור 1).



איור 1. בעיית תשע הנקודות

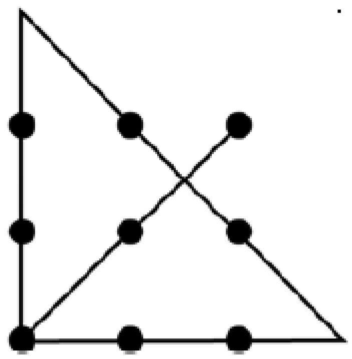
המטרה במטלה זו היא להניח את קצה העיפרון על הנייר, ואז, מבלי להרים את העיפרון מעל הנייר, לצייר ארבעה קווים ישרים, כך שהמסלול המצויר עובר דרך כל תשע הנקודות. ניסיון טיפוסי לפתור מטלה זו עשוי להיראות כך:



איור 2. בעיית תשע הנקודות: פתרון שגוי

מי שמנסה לפתור מטלה זו עושה בדרך כלל כמה ניסיונות אנאלוגיים ולבסוף מוותר. זה פשוט לא נראה אפשרי לפתור את המטלה תוך שימוש בארבעה קווים בלבד.

אולם קיים פתרון, הנראה כך:



איור 3. בעיית תשע הנקודות: פתרון נכון

הנקודה כאן היא לא שזו "בעיה טריקית", אלא שלכל מטלה שיש לפתור יש לא רק *מטרה*, אלא גם *תנאים* מסוימים הדרושים להשגת המטרה. בתחילה תנאים אלה היו מעורפלים. ידענו שצריך לצייר ארבעה קווים בלבד, ושהקווים צריכים להיות ישרים ומחוברים ביניהם, אבל לא היה ברור האם הם צריכים להישאר בתוך הריבוע שנוצר על ידי תשע הנקודות. ההיבט או הרגע היצירתי של פתרון בעיה זו היה *שינוי התנאים* של המטלה כך שיופיעו האמצעים והשיטה לפתרונה. למעשה, היה צריך "לשבור את החוקים" (למרות שהיציאה מחוץ לריבוע היה חוק בלתי כתוב, שהפותר כפה על עצמו) כדי ליצור שיטה לפתרון המטלה. במקרה זה, התנאים שונו מהערפול ההתחלתי שלהם, להבנה ברורה שאנו יכולים לצייר את הקווים מחוץ לריבוע הנוצר על ידי הנקודות. שינוי כזה של תנאי המטלה הוא מרכיב של כל פתרון בעיה יצירתי אמיתי, ויש לו תפקיד חשוב בכתביו של Davydov בנושא למידה של ילדים.

מהו האובייקט עליו פועלים בבעיית תשע הנקודות? אנו יכולים לומר שזה לא רק תשע הנקודות על הדף, ולא רק העיפרון והקווים הישרים שאנו מציירים, אלא גם שעצם התנאים של המטלה כלולים באובייקט עליו אנו פועלים.

אם כן, מהו האובייקט של מתמטיקה (אריתמטיקה)? מהי מטרת המטלה שנפתרה על ידי המצאת המספר במהלך ההיסטוריה האנושית? בתשובה לשאלה זו על מנת לבנות תכנית לימודים במתמטיקה, Davydov ושותפיו אינם מעוניינים בפרטים המתארים כיצד השימוש במספר הופיע, לדוגמה בתקופת הברונזה, אלא בזיקוק לוגי תמציתי של תהליך היסטורי זה. תוצאת עבודתם היא שניתן להתייחס למתמטיקה כתגובה למטלה של לקיחת כמות נתונה (אורך, נפח, משקל, שטח, כמות אובייקטים בדידים) ושכפול שלה בזמן או במקום שונים.

המטלות המתאימות יכולות להינתן בכיתה במגוון של דרכים. בגרסה אחת, הילדים מתבקשים לשכפל קטע המצויר על הלוח בקצה אחד של החדר, על לוח הנמצא בקצה השני של החדר. בגרסה אחרת, אפשר לבקש מהם לקבוע מראש האם יהיה מקום לפריט ריהוט כבד כלשהו, למשל כוננית ספרים, שיעבירו למרחב מוגבל כלשהו (למשל, בין השולחן לחלון) בחדר אחר. הבה נדגים מטלה זו, שפתרונה עשוי להוביל לגילוי המספר על ידי הילדים, תוך שימוש בחומרים הבאים (איור 4).

איור 4. מטלת הלמידה המובילה לגילוי המספר

על שולחן אחד, יש פס של סרט נייר. המטלה היא ללכת לשולחן אחר (בחדר אחר), ולחתוך, מגליל של סרט נייר, חתיכה שתהיה זהה בדיוק למקורית, כלומר, בדיוק באותו אורך. אך יש חוק נוקשה – אסור לנו לקחת את פס הנייר המקורי לשולחן האחר. כיצד הילד, או כיתה של ילדים, יפתרו מטלה זו? בדרך כלל ילד פשוט ילך לשולחן השני ויחתוך חתיכת נייר בגודל אקראי, מתוך תקווה שהיא באותו אורך כמו המקורית. כשייקח אותה חזרה וישווה לפס המקורי, הוא יווכח שהאורך שגוי. לילד כזה, תנאי המטלה לא מאפשרים להגיע לפתרון נכון (חוץ מאשר בעזרת המזל). כיצד אפשר לקבל חתיכה בדיוק באורך הרצוי, בכל פעם ומבלי לשגות? השולחן האחר שבו עלינו לחתוך את פס הנייר החדש נמצא רחוק מידי, ולכן לעולם לא נוכל להיות בטוחים שקבלנו את האורך הנכון!

כאן שוב, פתרון נכון יכול להתקבל על ידי *שינוי תנאי המטלה* בדרך כלשהי. במקרה זה הפתרון מובן מאליו למבוגר שיש לו את מושג המספר, אך הוא לגמרי לא ברור לתלמידים בכיתה א או ב. הילדים צריכים למצוא את הפתרון על ידי דיון קבוצתי ועל ידי ניסוי וטעייה. יכולות להיות צורות רבות לפתרון, אבל הוא תמיד כולל "שבירת החוקים הבלתי כתובים" והבאה של משהו חדש, במקרה זה, אובייקט שלישי כלשהו בו ניתן להשתמש כמתווך.

פתרון אחד (איור 5) יכול להיות לקחת אובייקט שלישי כלשהו, כגון חבל, ולחתוך אותו כך שיהיה בדיוק באותו האורך של פס הנייר, ואחר כך להעביר את האובייקט המתווך הזה (החבל) לשולחן האחר, שם ניתן להשתמש בו כדי לחתוך פס נייר חדש באורך הנדרש. במקרה זה, המתווך שווה באורכו לאובייקט אותו יש לשכפל.

איור 5. פתרון בעזרת מתווך (גרסה 1)

בפתרון אחר (איור 6), הילדים יכולים לקחת אובייקט שלישי נתון, למשל חתיכת עץ, ולסמן אותה כך שתראה את אורך פס הנייר. במקרה שמודגם באיור, המתווך הזמין ארוך מהאובייקט אותו יש לשכפל, אבל הפעולה של הסימון שלו הופכת אותו לשימושי עבור המטלה. לכן פתרון זה שקול לפתרון הראשון, רק שהילדים מבצעים סדרה שונה של פעולות.

איור 6. פתרון בעזרת מתווך (גרסה 2)

מה קורה אם האובייקט המתווך הזמין היחידי *קטן* מפס הנייר? לדוגמה, זה יכול להיות קוביה מעץ (איור 7). זהו המצב המעניין מכולם, משום שאז הילדים צריכים לגלות שהם יכולים להשתמש בקובייה *כיחידה* – כמתווך שניתן להניח אותו שוב ושוב (בכל פעם לסמן על הנייר עם עיפרון), ואחר כך *למנות* כמה פעמים היחידה הונחה. לאחר מכן לוקחים את היחידה לשולחן האחר (יחד עם המספר), שם מניחים אותה על פס הנייר כמספר הפעמים הנדרש כדי לשכפל, על ידי גזירה, את פס הנייר באורך הדרוש.

איור 7. פתרון המשתמש ביחידה

על פי Davydov, על ידי תגלית כזו, הילדים יוצרים מחדש, בקצרה, את המצאת המספר כמכשיר אנושי המאפשר לשכפל *כל* כמות במקום או בזמן שונים. (דיון זה הוא מאד מרוכז – בשיעורים האמיתיים של תכנית הלימודים במתמטיקה של Davydov, מסיקים על התגלית הזו בצורה של צעד אחר צעד במהלך מספר שבועות). למעשה, תגלית זו היא המפתח שיכול להוביל להתפתחות מושג המספר אצל כל הילדים בכיתה.

למרות שמטלה זו עם פס הנייר היא מטלה ספציפית, הנפתרת על ידי תגלית ספציפית מצד הילדים, היא מובילה באופן "גנטי" לפתרון של כל המטלות האנלוגיות. אם הילדים, העובדים כקולקטיב, תופסים את משמעות התגלית שמצאו, אזי עליהם להיות מסוגלים (שוב, כקולקטיב, לפחות בהתחלה) לתקוף את כל הבעיות האנלוגיות. הנקודה העיקרית כאן היא קשר מיוחד בין האוניברסלי והספציפי ואישי. קשר זה מתבטל לחלוטין אם המורה חושב שמושג הוא משהו שמנסחים מילולית, או אם המורה פשוט "מעביר" לילדים את הפתרון. הילדים חייבים להשתתף בשינוי התנאים של מטלה זו, כדי לגלות את הדרכים לפתרונה.

לסיכום, פתרון הילדים למטלה המתוארת לעיל הוא התגלמות החשיבה *מכוונת-אובייקט* שלהם. מה שחשוב להתפתחות המושג אינו "עבודה בידיים" *כשלעצמה*, אלא היצירתיות

הנובעת מכך שהילדים משנים את *התנאים* כתוצאה מהדיון הקולקטיבי והעבודה של ניסוי וטעייה שלהם. התנאים הם הדבר החשוב ביותר עבור הילדים ל"עבודה בידיים". אם מצב זה חסר, לא תהיה התפתחות מושג מדעי (כלומר, תיאורטי). אכן, זהו היבט שגוי נפוץ של השימוש במה שנקרא אמצעי המחשה בהוראה, שכמו כל כלי עזר ויזואלי, מסוגלים ליצור רק מושגים מלאכותיים, אמפיריים.

יתרה מזאת, בתכנון הערכה של מושג המספר, המיקוד חייב להיות על יכולת הילד לבצע בדיוק סוג זה של פעולה מכוונת-אובייקט, שבה נדרש השימוש במספר, אך אין התייחסות למספר קונקרטי בניסוח הבעיה. *מספר* כאמצעי לפתרון הבעיה חייב להיות מוצג על ידי הילד, הוא לא צריך תמיד להינתן על ידי מתכנן ההערכה.

על פי Davydov, פתרון סוג זה של בעיה שתוכננה במיוחד, מספק עקרונית *שיטה כללית* לפתרון כל הבעיות בתחום רחב מאד של בעיות – במקרה זה, כל הבעיות הדורשות שימוש במספר! אולם באיזה מובן הילדים הישיגו פתרון כללי? איזה תפקיד יש להכללה, ועל איזה סוג של הכללה אנו מדברים?

<u>חשיבה מוכללת</u>

טבעי אם כך לשאול, האם הילדים שכבר פתרו את המטלה עם סרט הנייר המתוארת לעיל, יכולים לפתור כל בעיה אנלוגית. רוב הסיכויים שלא. לדוגמה, הנה המטלה הכוללת נפחים של מים (איור 8). מטלה זו מניחה (כמו בשלב הטרום-מספרי של תכנית הלימודים של Davydov) שהילדים כבר שולטים בפעולה של השוואה ישירה בין נפחם של שני מיכלים, לדוגמה, על ידי מילוי אחד מהם במים ושפיכת המים ממיכל אחד לשני.

איור 8. מטלה אנלוגית עם נפחים של מים צבועים

במטלה זו יש לנו בשולחן אחד נפח נתון של מים צבועים, והמטרה היא ללכת לשולחן בחדר האחר ולשפוך נפח שווה (מהקנקן או ממקור אחר) למיכל הריק האחר (שיש לו צורה אחרת). גם כאן, הילדים יכולים לפתור מטלה זו על ידי הבאת אובייקט שלישי (כוס קטנה, כמו באיור 9) שיכול לשמש כיחידה של נפח.

איור 9. הצגת יחידת נפח

אנו יכולים למדוד את הנפח הנתון על ידי שפיכה שוב ושוב למיכל היחידה ומניית מספר היחידות, ואחר כך העברת היחידה לשולחן האחר ושימוש בה כדי לשפוך כמות שווה של יחידות, ובכך לשכפל את הנפח הדרוש במיכל שבשולחן האחר.

ברור שאנו יכולים ליצור קבוצה אינסופית של מטלות השקולות לשתי המטלות שזה עתה תוארו. ילדים רבים, או כיתות של ילדים, ייגשו למטלת הנפח כאל משהו חדש לגמרי, אפילו לאחר שהגיעו לשליטה במטלת סרט הנייר. אחרים אולי יכלילו מיד מהמטלה הראשונה לשנייה, והכללה כזו תהיה יותר ויותר סבירה ככל שגיל הילדים יגדל. כיצד ניתן לאפשר לילדים בכיתה א או ב ליצור הכללה כזו? אם הם יכולים ליצור הכללה זו, ולפתור את כל המטלות של קבוצה אינסופית זו של מטלות, אזי ניתן לומר שהם יצרו את *מושג המספר* כיכולת כללית שממנה אין דרך חזרה.

בגישתו של Davydov, תהליך זה של הכללה מסתייע על ידי השימוש ב*מודל* מיוחד לייצוג תהליך המדידה, שצורה אחת שלו מופיעה באיור 10.

$$A \xleftarrow{6} E$$

איור 10. המודל של תהליך המדידה

במודל זה, החץ מייצג את תהליך המדידה עם היחידה. אחת מהאותיות הגדולות (שיכולה להיבחר שרירותית, למרות שכאן היא E) מייצגת את היחידה (של אורך, של נפח, של שטח, וכדו') בעוד שהאות הגדולה האחרת (שכאן נבחרה להיות A) מייצגת את הכמות שתחילה יש למדוד ואחר כך לשכפל. האות של היחידה נמצאת תמיד בזנב החץ (שיכול להצביע על כיוון כלשהו), בעוד שהאות עבור הכמות הנמדדת נמצאת בראש החץ. בשתי הדוגמאות שלנו היחידה E היא במקרה אחד אורך הצלע של הקובייה או הנפח של כוסית היחידה, ו- A הוא האורך של פס הנייר או נפח המים הנתון. לבסוף, המספר הכתוב מעל החץ מייצג את כמות הפעמים בה השתמשו ביחידה כדי למדוד את הכמות הנתונה.

חשיבות המודל היא בכך שהוא מסוגל להחליף כל מטלה במערכת שלנו של מטלות קשורות של מדידה או יצירה של כמות. הוא יכול להחליף מטלת מדידה עם אורך, עם נפחים, עם שטחים וכן הלאה, ועושה הפשטה של כל החומרים בהם משתמשים ושל כל הפעולות השונות שיש לבצע.

הילדים מגיעים די מהר לשליטה במודל על ידי יישום שלו במספר קטן של מטלות מדידה, וזה אמור לאפשר להם ליצור הכללה – שתהיה להם שיטה כללית לפתרון כל המטלות של "מושג המספר" (כלומר, מטלות מדידה). בתכנון הערכה של מושג המספר, יש להעריך את שליטת הילדים במודל, כבדיקה מסייעת של המידה שבה הם הכלילו את המטלות המכוונות-אובייקט ויכולים לראות אותם כמקרים פרטיים של קבוצת מטלות כללית.

<u>חשיבה רפלקטיבית</u>

היבט אחד עיקרי של חשיבת הילדים בו לא דנו, עליו Davydov שם דגש רב, הוא מטהקוגניציה או *רפלקציה*, המוגדרת כיכולת של מישהו להבין את הבסיס לפעולות שלו עצמו. למעשה, מושג המספר לא יכול להתקיים אם הילדים אינם מודעים לחלוטין לעובדה שהם עצמם גילו אותו. לא רק שעליהם לשנות את התנאים של מטלת הלמידה שתוארו לעיל,

אלא שהם צריכים גם להיות מודעים למה שהם עשו ומדוע, ובמשך הזמן עליהם להיות מסוגלים לנסח בבהירות את השימוש ביחידה, את התפקיד שהמספר ממלא, וכן הלאה.

יכולת כזו לעשות רפלקציה על הפעולות של האדם עצמו היא בדרך כלל מעבר ליכולותיהם של ילדים בכיתות א ו- ב, ועדיין הילדים צריכים להיות מסוגלים לעשות זאת על מנת להבין באמת מספרים או כל מערכת אחרת של כלים או סימנים שהם מתבקשים לעבוד איתה בבית הספר. אפשר לחשוב על רפלקציה הן כנקודת התחלה והן כתוצאה סופית של תהליך התפתחות של מושג, במקרה זה מושג המספר. בתכנית הלימודים של Davydov הדבר מתאפשר, הודות לאופי הקולקטיבי של תהליך החקר. הילדים "מאגדים את המשאבים המנטליים שלהם", בתהליך של פתרון מטלת הלמידה.במהלך הדיון הכיתתי, המורה מנחה את הילדים *לשאול אחד את השני שאלות* על תהליך גילוי המספר – "איך עשית זאת? מדוע עשית זאת? האם השיטה שלך עובדת? האם זו השיטה הטובה ביותר לפתרון המטלה?" במשך הזמן, דיאלוג זה בין התלמידים הופך להיות דיאלוג פנימי, כך שהילד הבודד מסוגל במשך הזמן לעשות רפלקציה על סמך הפעולות שלו עצמו (כלומר, חשיבה).

לפיכך, הערכה של מושג המספר צריכה לכלול דרך כלשהי להערכת התפתחות החשיבה הרפלקטיבית של הילדים – יתכן שעבור ילדים בודדים, אך אם זה אינו בר-ביצוע, אז עבור הכיתה כולה.

<u>כמה שגיאות בהקשר למושג המספר</u>

השגיאה הנפוצה ביותר בהערכת מושג המספר של הילד, היא להתייחס ליכולת הילד לספור כאל הוכחה לכך שהילד מבין מהו מספר. מהמטלות מכוונות-אובייקט שתוארו לעיל, ומהמודל (איור 10), ברור שספירה היא רק אחת מהפעולות היוצרות את פעולת המדידה המונחת ביסוד מושג המספר. להתמקד בספירה בלבד משמעותו להשמיט את הדבר החשוב ביותר – היכולת לבחור ביחידה ולהשתמש בה, כלומר, להיות מסוגלים לראות את המספר כעולה מתוך קשר של יחס בין שתי כמויות.

שגיאה נפוצה נוספת היא לתת לילד רק מטלות הכוללות קבוצה בת-מנייה של עצמים בודדים (קוביות, תמונות של דגים, דסקיות מפלסטיק וכדו'). מטלות כאלה גורמות לילד להניח שהיחידה חייבת להיות אוביקט יחיד כזה, ולא שום דבר אחר, ולמעשה "מחביאות" את עצם הנוכחות של יחידה. יתרה מזאת, מטלות המשתמשות רק באוספים של עצמים בדידים, לא בודקות האם הילד יצר הכללה – האם הוא או היא יכולים לראות מספר או קשר של יחס בתוך כל המטלות האנלוגיות האלה. בהערכת מושג המספר של הילד, יש להשתמש במספר מטלות תוך שימוש באורכים, נפחים, ואם רלבנטי, שטחים ומשקלות, בנוסף לאוספים של עצמים.

לבסוף, זו שגיאה להתייחס למטלות מכוונות –אובייקט המתוארות לעיל כקשורות לא ל"מספר" אלא לנושא של "מדידות" בתכנית הלימודים. זה כמובן נכון, שעל פי Davydov, הפעולה של מדידה תוך שימוש ביחידה היא הפעולה המונחת ביסוד מושג המספר. אך הדבר המהותי במטלות אלה הוא שהן יוצרות מחדש את עצם הופעת המספר, בהיסטוריה האנושית, ככלי הנחוץ לשכפול כמות מסוימת, כתגובה לצורך אנושי ספציפי. יתרה מזאת, היחידות ה"לא סטנדרטיות" המשמשות במטלות אלה אינן הכללה מיחידות סטנדרטיות (אינצ'ים, ליטרים) בהן הילדים השתמשו קודם לכן כשלמדו מדידות. הן נובעות מתנאי המטלה ומשינוי של התנאים האלה על ידי הילדים. ניתן לצפות במושג (במקרה זה, מושג המספר) בצורה הברורה ביותר, כאשר הוא מהווה הופעה של משהו חדש מתוך תנאים מוקדמים נתונים, ובתגובה לצורך. זיהויו של Davydov, של דרך לבצע בכיתה סימולציה של ההופעה ההיסטורית של המספר, הוא בעל משמעות גדולה ביותר לפדגוגיה המתמטית, ואין להפוך אותו לטרביאלי על ידי זיהוי שלו קרוב מידי ל"מדידה" כנושא המובחן מ"מספר".

III. ההערכות

הבחירה שלנו בהערכות עבור מושג המספר נבעה משני שיקולים עיקריים. הראשון היה קשור לשאלה כיצד לבדוק שיטת פעולה *כללית* מכוונת-אובייקט. הפרדוקס הוא שאנו רוצים לבדוק האם הילד יכול לפתור מטלה כלשהי מתוך יריעה אינסופית של מטלות קשורות. יתכן שהילד יכול לפתור מטלות a, b, ו- c, אבל אם נניח שנציג בפניו מטלה שקולה d? כיצד נוכל אי פעם להיות בטוחים שהילד באמת שולט בשיטה הכללית? זו חייבת להיחשב שאלה פתוחה. התשובה הטובה ביותר שיכולנו למצוא היתה לבחון את הילד תוך שימוש במטלות מכוונות-אובייקט רבות, ולאחר מכן, בנוסף לכך, לתת תשומת לב מיוחדת להערכה של שליטת הילד ב*מודל* (איור 10) כמשהו שיכול להחליף את כל המטלות בתוך הקבוצה האינסופית של מטלות פוטנציאליות.

השיקול השני בבחירת ההערכות היה קשור לגיל הילדים (הכי צעירים בכיתה א, כלומר, בני 6-7). המטלות מכוונות-אובייקט חייבות להיות מובנות לילדי כיתות א ו- ב, אבל מספר שנים של ניסיון אפשרו לנו לבחור מטלות מתאימות. זה היה שונה בהתייחס להערכה שהשתמשה במודל. היה צורך לתכנן את ההערכה בתשומת לב מיוחדת במקרה של ילדי כיתה א, משום שהערכה ארוכה, במיוחד כזו עם נייר ועיפרון, עלולה להיות לא מתאימה. בנוסף לכך, מצאנו שלילדים שלנו היתה לעיתים קרובות יכולת גרפית מוגבלת והם התקשו לבצע חלק מהמטלות של תכנית הלימודים של Davydov, שהיו קשורות, למשל, בציור שטחים, כדי לבצע מדידה. לבסוף בחרנו קבוצה מאד פשוטה של מטלות כתובות, וצרפנו לה מטלות מדידה המבוצעות תוך שימוש בתוכנת מחשב שפיתחנו.

לפיכך היו לנו לבסוף שלוש הערכות שונות, והחלטנו לבדוק את הקורלציה בין התוצאות כדי ליצור שיפוט אודות רמת ההתפתחות של מושג המספר אצל הילדים.

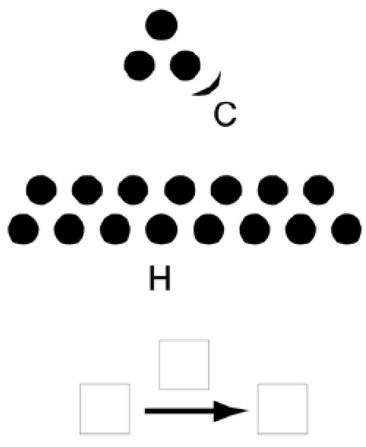
(1)מטלות מכוונות-אובייקט

בחרנו ארבע מטלות מכוונות-אובייקט הקשורות לחלק מאלה שהוצעו על ידי Davydov עצמו (Davydov, 1990, pp. 144-145). אלה הועברו על ידי מבוגר שעבד באופן פרטני עם הילד. שינינו מעט את המטלות על ידי בחירת חומרים ומצבים שילדינו יוכלו להבין בכל שכבת גיל. ארבע מטלות אלה מתוארות בפירוט בנספח 1. בקצרה, מטלה 1, עם פסי נייר ועם נפחים, קשורה לפעולה של שכפול כמות, כפי שתואר במפורט בפסקה II במאמר זה. מטלה 2, עם כוסות גדולות וקטנות, בדקה את יכולת הילד *לא* להיות מושפע על ידי מה שמובן מאליו מבחינה ויזואלית (ארבע כוסות משמעותו המספר 4), אלא לנתח את הקשר בין היחידה והכמות הנמדדת. מטלה 3 בודקת את גמישות הילד בייחוס מספר *כלשהו* לאוסף מסוים הניתן למנייה, תלוי ביחידה המוצעת באופן עקיף על ידי המבוגר. מטלה 4 בודקת את יכולת הילד לנתח אילו מספרים יתקבלו כשכמות נתונה נמדדת תוך שימוש בשתי יחידות שונות.

(2) מטלות כתובות

המטלה הראשונה משתי המטלות הכתובות מופיעה באיור 11. היא בודקת את יכולת הילד למדוד אוסף של אוביקטים תוך שימוש ביחידה נתונה ולצייר מודל של התוצאה תוך שימוש בדיאגרמת חץ. כאן חשוב מאד שהילד ישים את האות של היחידה ב*זנב* החץ, ושהמספר הנכון של יחידות יהיה כתוב מעל החץ.

1. מדדו את כמות H תוך שימוש ביחידה C. השלימו את דיאגרמת החץ.

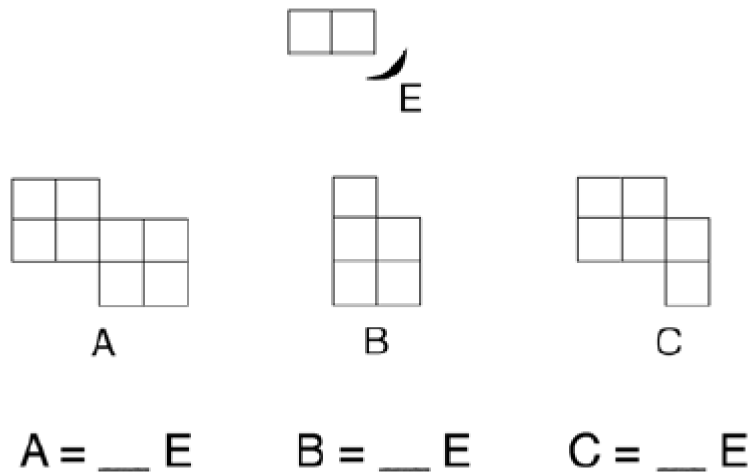


איור 11. מטלה ראשונה מבין שתי מטלות כתיבה. הקשת הקטנה היא סימן מקובל לציין את יחידת המידה

המטלה השנייה משתי המטלות הכתובות מוצגת באיור 12. היא מתוארת בספר שנכתב על ידי שני כותבי תכנית הלימודים של Davydov (Gorbov & Tabachnikova, 1995, pp. 32–34). מטלה זו בודקת את יכולת הילד לעשות רפלקציה על הבסיס של היכולת למדוד (במקרה זה שטח) תוך שימוש ביחידה. במקרה הראשון, התשובה היא פשוט A=4E. במקרה השני הילד צריך לדחות את השאלה כמלכודת, משום שמספר שלם של יחידות E לא נכנס לשטח B. Gorbov and Tabachnikova מתארים מספר תשובות מתאימות אפשריות של הילד למטלה זו). במטלה השלישית הילד צריך להבין שניתן לסובב את היחידה E, כך ששלוש יחידות E נכנסות לשטח C; בעיה זו אינה מלכודת.

2. מדדו את השטחים A, B, ו- C תוך שימוש ביחידת השטח E.

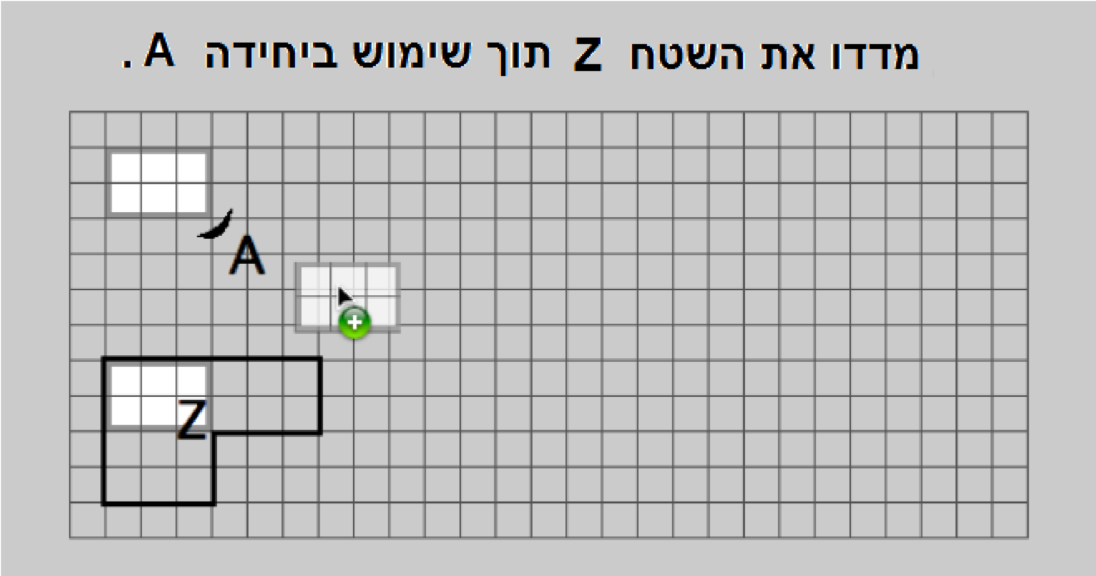
מותר להשתמש רק במספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 או 9.



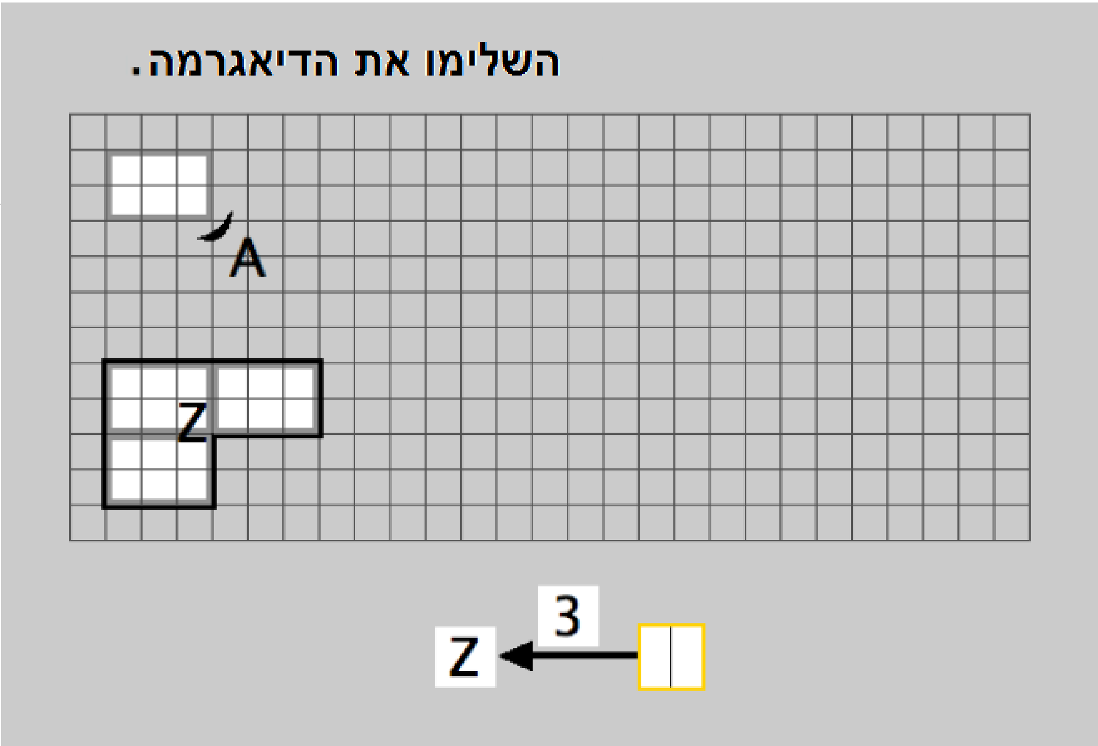
איור 12. מטלה שנייה מבין שתי מטלות כתיבה

(3) מטלות מחשב

כהשלמה לתכנית הלימודים במתמטיקה של Davydov, יצרנו סדרה של 50 תוכנות מחשב (אפליקציות ג'אווה) כדי לאפשר לילדים להתאמן בפעולות שונות מכוונות-אובייקט ושל מודלינג, כמו גם להתאמן במיומנויות של מספרים. תוכנות 1 עד 8 שייכות לשלב "הטרום-מספרי" של ההוראה, ואילותוכנות 9 ו-10 קשורות למדידה, כלומר, למושג המספר. תוכנה 9 מודגמת באיורים 13 ו- 14. תוכנה 10 (לא מודגמת) למעשה חזרה על המטלה הכתובה 2 (איור 12).



איור 13. תוכנת מחשב 9: מדידת שטח תוך שימוש ביחידה



איור 14. תוכנת מחשב 9: השלמת המודל

התוכנות הוצגו בהדרגה במהלך תכנית הלימודים. תלמידים יכלו להשתמש בתוכנות על בסיס שבועי בזמן שהוקצב ל"מעבדת מחשב". תלמידים נדרשו לעבוד על התוכנות לפי הסדר, לדוגמה, הם לא הורשו לעבור לתוכנה 9 עד שלא סיימו בהצלחה את תוכנה 8.

תלמיד נחשב כמצליח בתוכנה נתונה אם הוא ביצע 20 בעיות עם 80% מהפעולות המתאימות שהיו נכונות.

(4) מבחן Zak של רמות של חשיבה תאורטית

בנוסף לשלוש הערכות מוצעות אלה של מושג המספר, החלטנו שחשוב להעריך את הופעתה של חשיבה רפלקטיבית אצל הילדים. הרי כפי שתואר לעיל, רפלקציה היא תנאי מוקדם כמו גם תוצאה של שימוש בתכנית הלימודים של Davydov, והיא גם מרכיב של חשיבה מושגית.

על מנת להעריך את חשיבת הילדים, באופן בלתי תלוי בחומר של תכנית הלימודים במתמטיקה, השתמשנו במבחן (Atakhanov, 2000, pp. 126-128) שתוכנן במקור על ידי A.Z. Zak (Zak, 1984). מבחן זה עוסק ביכולתם של הילדים לבצע סדרה של דדוקציות מילוליות, כגון:

1. מייק רועש יותר מג'ים. ליזה שקטה יותר מג'ים.
   מי הכי שקט מכולם?

2. הופן ארדק מדמלן. בקפט ארדק מהופן.
   מי הכי ארדק מכולם?

3. הסוס נמוך יותר מהזבוב.
   הסוס גבוה יותר מהפיל.
   מי הכי גבוה מכולם?

כדי למנוע תפיסה שגויה, הבעיה כאן אינה האם הילדים מצליחים לנסות דדוקציות כאלה – אין הכוונה לבחון את החשיבה הדדוקטיבית שלהם, שמצאנו שנמצאת בטווח היכולות של ילדים בגיל זה, אלא לבדוק האם הילדים יכולים לראות שכל שלושת המקרים המופיעים למעלה (כמו גם מקרים אחרים, כולל מסובכים יותר, 12 בסך הכל) הם למעשה אותו הדבר. מצאנו שגרסה זו של המבחן של Zak, לחלוטין מתאימה לילדים בסוף כיתה ב, כאשר מרבית הילדים מתחילים לקרוא ולכתוב בצורה טובה למדי. (הבעיות הוקראו בקול פעם אחת או פעמיים על ידי המורה בזמן שהילדים קראו אותן בשקט). לא היה לנו כל קושי בשימוש במבחן של Zak עם ילדים שאנגלית אינה שפת אם שלהם, באוכלוסיה המסוימת בבית ספר Presumpscot.

הגרסה של המבחן של Zak בה השתמשנו (אחת מתוך כמה גרסאות) מוצגת בנספח 2. אם הילדים הצליחו לבצע נכון את כל הבעיות 1 עד 8, הנחנו שיש להם את פעולת החשיבה של

ניתוח התוכן. אם הם גם הצליחו לבצע את בעיות 9, 10 ו-11 הרב-שלביות, הנחנו שיש להם את פעולת החשיבה של תכנון. אם, בנוסף, הם הצליחו לפתור את בעיה 12:

12. תום חזק מזק. ברד חלש מתום.
מי הכי חלש מכולם?

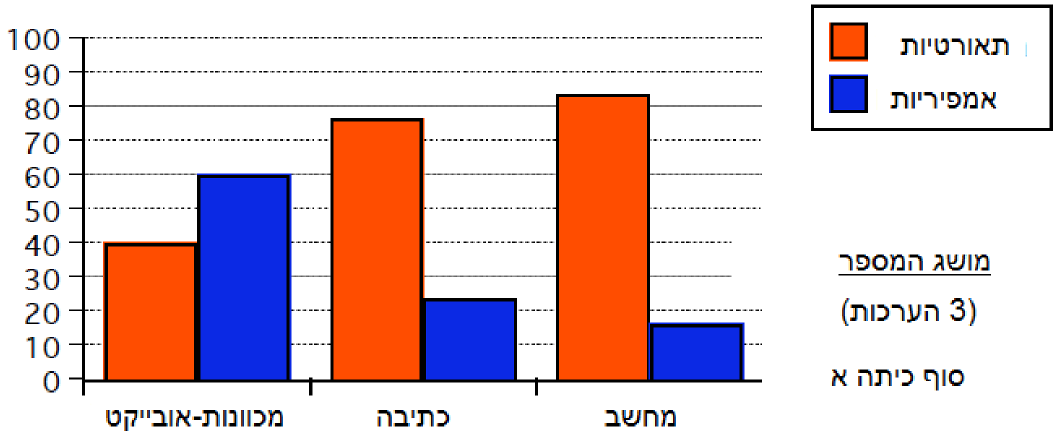
ולהסיק שלבעיה זו אין תשובה חד משמעית, הנחנו שיש להם את פעולת החשיבה של רפלקציה. שוב, ציפינו שלמעט מאד תלמידים בכיתה ב תהיה חשיבה רפלקטיבית, אך שהתוצאות המשותפות מהכיתה כולה יוכלו להעיד על התפתחות מוקדמת של חשיבה תיאורטית עבור הכיתה בשלמותה.

IV. תוצאות

ההערכות הועברו ל- 36 תלמידי כיתה א בסוף שנת הלימודים 2006 – 2007 ול- 38 תלמידי כיתה ב בסוף 2007 – 2008. בכל שנה, היו שתי כיתות המונות כל אחת כ- 20 תלמידים; חלק מהתלמידים הושמטו מהנתונים משום שעזבו את בית הספר באחת משנות הלימוד. היתה תחלופה של כ- 12% בין שתי שנות הלימודים, אולם לילדים שהשתתפו בכל כיתה ב מבלי להשתתף בכיתה א לא חוו קושי בהסתגלות לתכנית הלימודים, כך שכללנו אותם בנתונים של כיתה ב.

כל הנתונים מוצגים במונחים של אחוז המטלות שנפתרו נכון על ידי הילדים בכיתה המתאימה. כמוסכמה עקבית להתיחסות לתוצאות בגרפים, הציונים הנכונים נקראים "תאורטיים" והשגויים "אמפיריים". זה הגיוני, משום שכל הילדים, אפילו בכיתה א, היו מסוגלים למנות אוסף של עצמים ולומר נכון את המספר, ולכן היה להם לפחות מושג אמפירי של מספר.

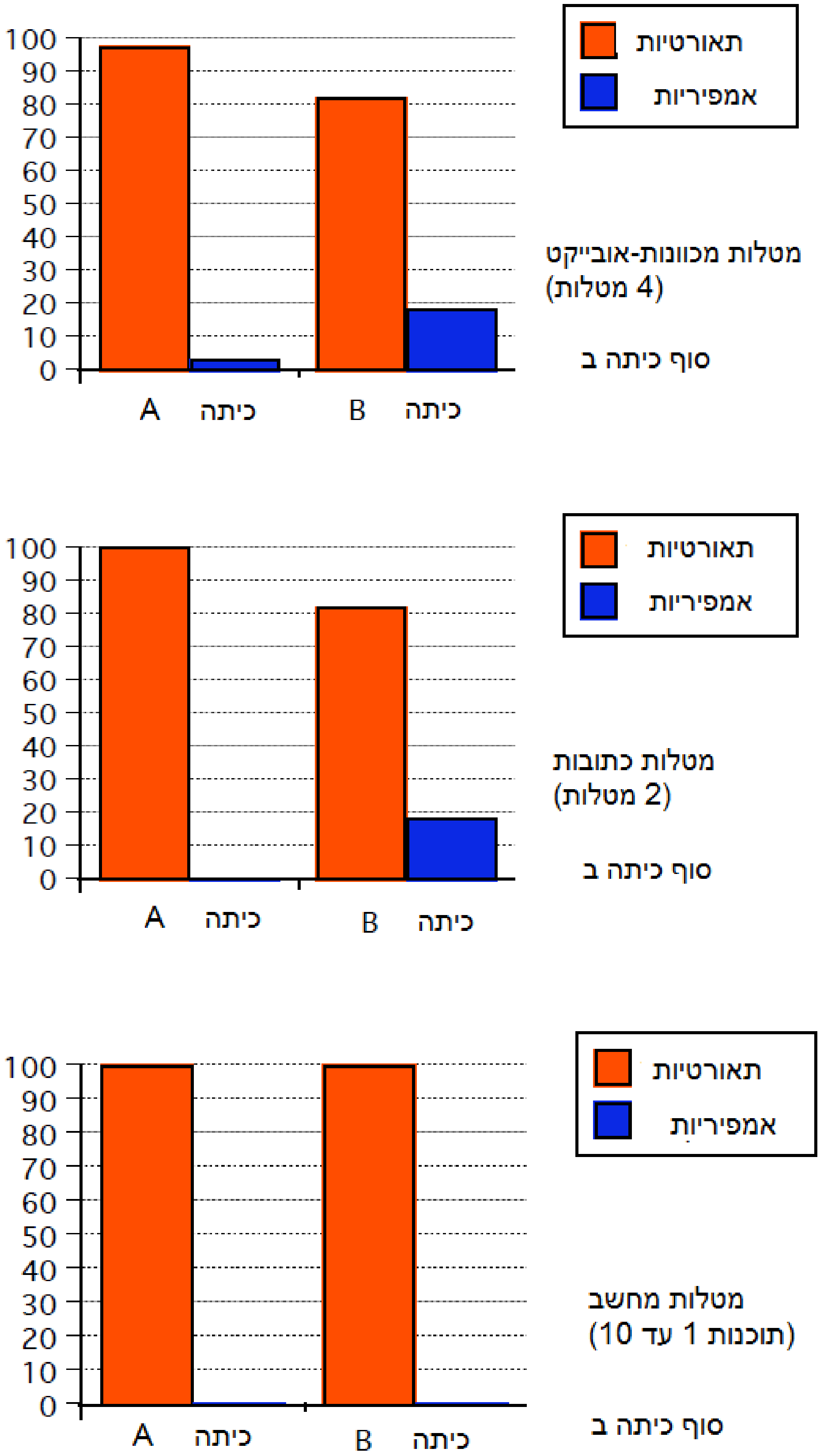
איור 15 מציג את תוצאותינו בסוף כיתה א. הערכות אלה התבצעו במאי 2007 בבית ספר Presumpscot בפורטלנד, מיין. הנתונים משתי הכיתות צורפו יחד משום שלתלמידים היתה אותה מורה למתמטיקה ומשום שלא היה הבדל משמעותי בין הכיתות מבחינת קבלה של חומרי תכנית הלימודים וסוג ההוראה.



איור 15. אחוז המטלות שבוצעו נכון (תאורטיות) ולא נכון (אמפיריות) על ידי 36 תלמידים בסוף כיתה א

ניתן לומר שהתוצאה העיקרית כאן היא שלאחר שנה אחת של הוראה תוך שימוש בתכנית הלימודים של Davydov, במקרה הטוב 40% מהתלמידים הגיעו למושג מספר מדעי או תאורטי. לעומת זאת, הגרפים עבור ההערכות של המחשב ושל המשימות הכתובות הראו שהתלמידים הצליחו מעט יותר בהטמעת המודל של תהליך הלמידה. כללית ממצאים אלה הגיוניים, משום שלמידה של המודל (שהוא סימן) צריכה להיות קודמת להטמעה מוכללת של הפעולות מכוונות-אובייקט – המודל צריך להיות כלי ליצירת ההכללה המתאימה.

איור 16 מציג את התוצאות של הערכת 38 תלמידים בסוף כיתה ב, במהלך מאי 2008. במקרה זה, אני מציג את הנתונים של שתי הכיתות, שנקרא להן כיתה A וכיתה B בנפרד. הסיבה לכך היא שהכיתות היו שונות למדי מבחינת התנהגות התלמידים ולכן התקבלו תוצאות שונות.

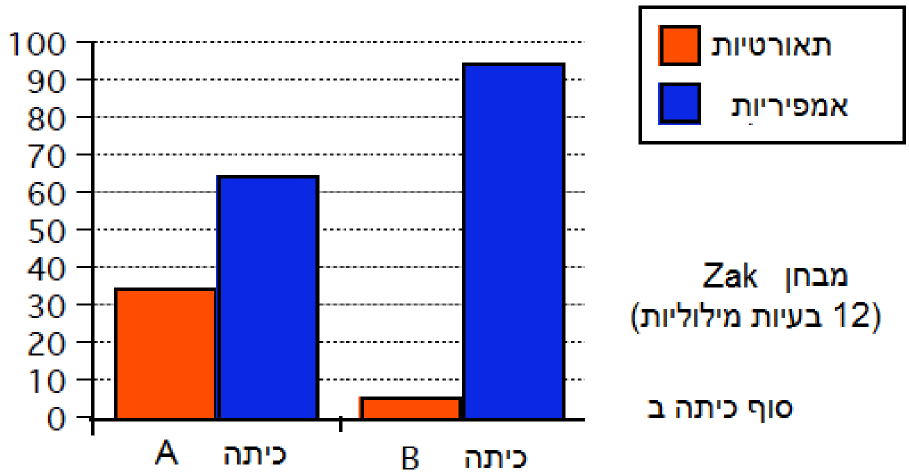


איור 16. אחוז המטלות מכוונות-אוביקט שבוצעו נכון (תאורטיות) ולא נכון (אמפיריות)
על ידי 38 תלמידים בסוף כיתה ב

שתי הכיתות השתמשו בתכנית הלימודים של Davydov, כשמרבית הילדים בשתי הכיתות למדו בתכנית בכיתה א. אולם בכיתה B ההתנהגות של מספר ילדים הקשתה מאד על המורה ליישם את סוג החקירה הנדרש על ידי תכנית הלימודים, ולכן ניתן להתייחס לכיתה זו כאל סוג של קבוצת בקורת שבה יושם ה*תוכן* אך לא *צורת* ההוראה. למעשה, התלמידים בכיתה B דחו את סגנון החקירה של Davydov, שבו המורה פועלת בעיקר כמנחה של האינטראקציות בין התלמידים. זאת למרות העובדה שהמורות בשתי הכיתות כבר עבדו היטב עם תכנית הלימודים במשך ארבע או חמש שנים, ולהערכתי שלטו בגישה בצורה טובה באותה מידה. לעומת זאת, בכיתה A הן התוכן והן הצורה של ההוראה יושמו בהצלחה רבה.

אנו יכולים להסיק מסקנה זמנית (בהינתן האופי הזמני של אוסף ההערכות שלנו), שמושג מדעי של מספר נוצר בהצלחה אצל כמעט 100% מהתלמידים בכיתה A, אך זה לא קרה בכיתה B.

בסוף כיתה ב, בדקנו לא רק את התפתחות המספר אצל תלמידי כיתה ב, אלא גם את החשיבה התאורטית (רפלקטיבית) הבלתי תלויה בנושא, תוך שימוש במבחן של Zak. למען הפשטות, הגרפים לא מבחינים בין שלוש רמות החשיבה התיאורטית של Zak. התוצאות מופיעות באיור 17.



איור 17. אחוז התלמידים הנמצאים ברמה ה"תאורטיות" וה"אמפירית", מתוך 38 תלמידים בסוף כיתה ב, במבחן חשיבה תאורטית של Zak. בכיתה B תלמיד אחד בלבד הגיע לרמה התאורטית (תכנון)

המבחן של Zak הראה הבחנה ברורה בין רמות החשיבה בשתי הכיתות. יתכן שזו אינדיקציה להשפעה ההתפתחותית של תכנית הלימודים של Davydov בכיתה A, שבה צורת ההוראה באמת "תפסה", אך מסקנה כזו דורשת מחקר מפורט יותר של התפתחות חשיבת הילדים מתחילת כיתה א. חוסר ההתפתחות של החשיבה התאורטית הבלתי תלויה בנושא (רפלקציה) אצל הילדים בכיתה B, מטילה ספק, לדעתי, ביכולת שלנו בכלל לומר שלילדים אלה יש מושג מדעי של מספר, על אף הביצוע הנכון שלהם בהערכות שהשתמשו בחומר מתמטי.

V. מסקנות

ראשית, ברצוני להדגיש שבצענו ניסיון ראשון בלבד בהרכבת הערכה יישומית למושג המספר. קורלציה סבירה בין שלושת סוגי ההערכה שלנו מראה שאנחנו לא רחוקים מידי. יתרה מזאת, ההערכות מתבססות על ניתוח תאורטי מעמיק וניסיון אמפירי רחב של V. V. Davydov ועמיתיו. אולם ברור שיש צורך במחקר נוסף, ואברך כל בקורת של הערכות אלה, והצעות לאחרות, אפקטיביות יותר, וניסוי של ההערכות שלנו עם אוכלוסיות תלמידים אחרות.

אם הערכות אלה אכן נכונות, אזי תוצאותינו עבור התלמידים בסוף כיתה א הן די דרמטיות, למרות גודל המדגם הקטן. באוכלוסיית בית הספר איתה עסקנו, אנו יכולים לומר שהיה בלתי אפשרי לפתח מושג מדעי של מספר במלואו בכיתה א – אפילו עם ילדי כיתה א המשתמשים בתכנית הלימודים במתמטיקה המצוינת של Davydov, ועם מורה מנוסה ומוכנה היטב. אם זה בכלל מאפיין את האוכלוסייה הכללית של ילדים בני 6-7, המסקנה היא שלא סביר להניח שתלמידים בכיתה א "באמת מבינים מספרים", ואין להכריח אותם לשנן עובדות חיבור וחיסור וגישות מלאכותיות אחרות ללימוד מתמטיקה. זה רומז לכך שכל תכנית הלימודים במתמטיקה הקיימת לכיתה א דוחפת את הילדים הרבה מעבר למה שהם מסוגלים להבין לעומק.

עם זאת, היה אפשרי לפתח מושג מדעי של מספר בסוף כיתה ב. אולם אחוז ההצלחה היה קרוב ל- 100% רק בכיתה שבה הילדים הסכימו עם צורת ההוראה של Davydov. בכיתה שבה נראה כי נושאים התנהגותיים פגעו בסוג הוראה בלתי מסורתי זה, התפתחות אמיתית כלשהי של מושג המספר מוטלת בספק על פי תוצאות ההערכה שלנו.

אם חלק מהילדים לא מפתחים מושג מספר אמיתי עד סוף כיתה ב, אזי מתי הוא מתפתח? ההערכה שלנו עשויה לעזור לענות על שאלה זו, אם משתמשים בה בכיתה ג והלאה. כמובן,

מספר אינו נגמר במספרים שלמים. "התערבויות" דומות לזו של Davydov עשויות לעזור לתלמידים בוגרים יותר לפתח את המושג של מספרים רציונליים (שברים ועשרוניים), אולם חשיפה של התלמידים לפעילויות כיתתיות המבוססות על מדידה אינה מספקת. התערבויות כאלה צריכות להיות מוערכות על ידי השאלות האם לתלמידים יש באמת שיטות *כלליות ומכוונות-אובייקט* לפעולה עם שברים, והאם החשיבה ה*רפלקטיבית* שלהם מפותחת דיה. אם אחד משלושת היבטים אלה של חשיבה מושגית חסר, יש סיכון גבוה לכך שידע התלמידים יצומצם לרמה אמפירית מלאכותית.

נספח 1: ההערכות מכוונות-אובייקט

<u>מטלה 1</u>. *נוסח 1*. בשולחן אחד: פס של סרט נייר, עיפרון וקוביית עץ. קוביית העץ מתאימה למספר שלם כלשהו של פעמים (6, 7, או 8) לאורך פס הנייר. (אל תגידו זאת לילדים!). בשולחן אחר: גליל של סרט נייר, מספריים, עט. אימרו לילד שהבעיה היא ללכת לשולחן האחר ולגזור חתיכת סרט נייר "בדיוק כמו זו", אבל הכלל הוא שהדבר היחיד אותו מותר להעביר מהשולחן הזה לשולחן האחר הוא קוביית העץ. המטלה נחשבת כמבוצעת בהצלחה אם הילד משתמש בקוביית העץ כיחידת אורך, מודד את פס הנייר (על ידי סימון כל יחידה תוך שימוש בעיפרון), מעביר את קוביית העץ לשולחן האחר, ומשתמש בקוביית העץ כדי ליצור את מספר היחידות הדרוש.

נוסח 2. מטלה דומה, שבה הכמות אותה יש לשכפל בצד השני של החדר היא נפח של מים, והיחידה אותה מספקים היא כוס קטנה. הילד צריך לעבור את שני הנוסחים כדי שייחשב כמי שעבר את מטלה 1.

<u>מטלה 2</u>. שמים כוסות קטנות, כוסות גדולות, וקנקן של מים צבועים. מבקשים מהילד לבדוק כמה פעמים עלינו למזוג מהכוס הקטנה לכוס הגדולה כדי למלא אותה. (יוצא שפעמיים). אחר כך מראים לילד שורה של כוסות: 2 גדולות ו- 2 קטנות. שואלים את הילד כמה פעמים צריך למזוג מהכוס הקטנה כדי למלא את כל שורת הכוסות. הילד צריך לתת את המספר הנכון (במקרה זה 6) מבלי לבצע ממש את המזיגה. (אפשר לשנות את מספר הכוסות עבור ילדים שונים: 2 גדולות ו- 3 קטנות, או 3 גדולות ו- 2 קטנות.)

<u>מטלה 3</u>. שימו אוסף של 12 צורות (לדוגמה, עיגולים אדומים או משולשים ירוקים) על השולחן לפני הילד. אחר כך החזיקו קבוצה של 3 צורות. אימרו, "כמה כאלה (מצביעים על הקבוצה של 3) יש לך?" (מצביעים על הקבוצה של 12). אחר כך הראו את הקבוצה של 2, ואחר כך את הקבוצה של 4. בכל פעם הילד צריך לומר את המספר הנכון (4, 6, 3). אם הילד מבין מה שואלים רק בקבוצה השנייה של משולשים – תשובתו מתקבלת – אך אל תשנו את ניסוח המילים של הבעיה. המטלה נחשבת *כלא* פתורה, אם הילד כל פעם אומר שיש 12 צורות.

<u>מטלה 4</u>. *נוסח 1*. הראו לילד חוט ברזל מגולגל (אל תיישרו אותו). אימרו שמישהו מתח את חוט הברזל ומדד אותו כשהוא משתמש קודם באחד מפסי הקרטון ואחר כך בשני (הראו את הפסים האדום והכתום). אימרו שבמקרה הראשון האיש קיבל את המספר 7 ובמקרה השני את המספר 5. בקשו מהילד למצוא איזה מספר התקבל עם איזה פס קרטון שבו השתמשו כדי למדוד את החוט. (הילד צריך לומר ש-7 התקבל עם הפס הכתום, הקצר יותר, ו-5 התקבל עם הפס האדום, הארוך יותר).

נוסח 2. הראו את הגליל השקוף מלא (עד הסימן) במים צבועים. אימרו שמישהו מדד את המים כשהוא משתמש קודם באחד מהמיכלים הקטנים ואחר כך בשני (הראו את הכוסות הסגולה והירוקה). אימרו שבמקרה הראשון האיש קיבל את המספר 4 ובמקרה השני את המספר 10. בקשו מהילד למצוא איזה מספר התקבל עם איזה מיכל קטן שבו השתמשו כדי למדוד את המים. (הילד צריך לומר ש- 4 התקבל עם המיכל הסגול, הגדול יותר, ו- 10 התקבל עם המיכל הירוק, הקטן יותר). הילד צריך לעבור את שני הנוסחים כדי שייחשב כמי שעבר את מטלה 4.

נספח 2: המבחן של ZAK ל- 3 רמות של חשיבה תיאורטית

1. מייק רועש יותר מג'ים. ליזה שקטה יותר מג'ים.
   מי הכי שקט מכולם? _______________

2. ואל רץ מעט מהר יותר מפאט. אלה רצה הרבה יותר לאט מפאט.
   מי רץ הכי מהר מכולם? ________________

3. אנדי הוא גבדת מסאם. בוב הוא גבדת מאנדי.
   מי הכי גבדת מכולם? _________________________

4. ספטב עצוב יותר מלדבק. ספטב מאושר יותר ממנפר.
   מי הכי עצוב מכולם? __________________________

5. הופן ארדק מדמלן. בקפט ארדק מהופן.
   מי הכי ארדק מכולם? ______________________

6. דן מבוגר יותר מאלין. אלין מבוגרת יותר ממג.
   מי הכי צעיר מכולם? ______________________

7. קאלי קלה יותר מדרו. ג'יין קלה יותר מקאלי.
   מי הכי כבדה מכולם? ___________________

8. הסוס נמוך יותר מהזבוב.
   הסוס גבוה יותר מהפיל.
   מי הכי גבוה מכולם? __________________

* * * * *

9. סאם צעיר יותר מריק. בוב קל יותר מסאם. ריק צעיר יותר מבוב. סאם שקט יותר מבוב. ריק כבד יותר מסאם. ריק רועש יותר מבוב.
   מי הכי כבד? _____________
   מי הכי מבוגר? ____________
   מי הכי שקט? _____________

10. אנה נמוכה יותר ממרי וחזקה יותר מנינה. אנה גבוהה יותר מנינה, אבל מרי חזקה יותר מאנה.

מי הכי נמוכה מכולן? ____________

מי הכי חזקה? _________________

11. סאלי מאושרת יותר ומבוגרת יותר מלוסי. לוסי כבדה יותר מסאלי, אבל ריטה מבוגרת יותר מסאלי. ריטה קלה יותר מסאלי ועצובה יותר מלוסי.

מי הכי צעירה? ___________________

מי הכי קלה? ____________________

מי הכי מאושרת? _________________

*   *   *   *   *

12. תום חזק יותר מזאק. בראד חלש יותר מתום.

מי הכי חלש מכולם? __________________

שאלות 1 - 8 נכונות מצביעות על רמת אנליזה של חשיבה תיאורטית (הכי נמוכה)

שאלות 1 - 11 נכונות מצביעות על רמת תכנון של חשיבה תיאורטית (בינונית)

שאלות 1 - 12 נכונות מצביעות על רמת רפלקציה של חשיבה תיאורטית (הכי גבוהה)

שאלה כלשהי מתוך 1 – 8 שגויה מצביעה על רמת חשיבה אמפירית בלבד.

ביבליוגרפיה

Atakhanov, R. (2000). *Matematicheskoe myshlenie i metodiki opredeleniya urovnya ego razvitiya [Mathematical thinking and techniques for determining the level of its development]*. Riga: Eksperiment.

Davydov, V. V. (1990). *Forms of generalization in instruction*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction*, Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.

Gorbov, S. F. Mikulina, G. G., & Savel'eva, O. V. (2001). *Obuchenie matematike 1 klass: posobie dlya uchitelya chetyrekhletnei nachal'noi shkoly [Mathematics instruction grade 1: teacher's manual for four-year primary school]*. Moscow: Vita-Press.

Gorbov, S. F., & Tabachnikova, N. L. (1995). *Paket psikhologicheskioi i predmetnoi diagnostiki po matematike 1 klass [Packet of psychological and object-related diagnostics for grade 1 mathematics]*. Tomsk: Peleng.

Moxhay, P. (2003). Vygotsky and Davydov in elementary mathematics instruction: an experiment in American public schools. In International conference on creativity and imagination in education and methods of mastery, Moscow, November 17-20, 2003.

Zak, A. Z. (1984). *Razvitie teoretichesckogo myshleniya u mladshikh shkol'nikov [Development of theoretical thinking in primary school children]*. Moscow: Pedagogika.