

חוש ואי-חוש למספרים

Number Sense and Nonsense

נכתב ע"י :

Edited by: Judith Sowder and Larry Sowder, San Diego State University, U.S.A

Prepared by: Zvia Markovits, Rina Hershkowitz, and Maxim Bruckheimer,
Weizmann Institute of Science, Israel.

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 36, No. 6, February 1989 , pp. 53-55

תרגום: ברכה סגליס

ל"שכל הישר" (Common sense) ישנם אספקטים רבים והוא מתפתח באמצעות מגוון של התנסויות בביה"ס ומחוצה לו. "חוש למספרים" הינו אחד האספקטים של השכל הישר, אותו אנו מצפים, בצדק, שביה"ס ישפר. האומנם? כאשר תלמידים מתבקשים לפתור בעיה מספרית, האם הם נותנים את דעתם למשמעות של המספרים המופיעים בנתונים שלה או בפתרון שהם קיבלו? במחקר שהוקדש לבדיקת תוצאות על סמך אומדן או מידת ההגיון שלהם (reasonableness), מצאנו שאצל תלמידי כתות ו' ו-ז', או שאין עדיין חוש למספרים מפותח במידה סבירה, או, במידה ויש להם חוש כזה, הם אינם מיישמים אותו למשימות פשוטות בעלות הקשר מתמטי. תופעה זו של "אי-חוש למספרים" הופיעה גם במשימות מספריות טהורות (תרגילים) וגם במשימות שיש להן מסגרת של תוכן. המשימות מהסוג הראשון הן מופשטות ומוגבלות לביה"ס, אבל המשימות מהסוג השני מתיחסות למצבים מציאותיים שבאופן טבעי צריכים לעודד הפעלה של חוש למספרים.

התבוננו בבעיה הקלאסית הבאה :

גובהו של ילד בן 10 הוא 1.5 מטר. מה לדעתך יהיה גובהו בגיל עשרים?

כשליש מן התלמידים במחקר שלנו ענו 3 מטר! נראה שתלמידים אלה הפעילו אלגוריתם סטנדרטי מבלי לתת תשומת לב לרלבנטיות שלו או למשמעות המספר שהתקבל כתוצאה. ממצא זה מעורר חשד שהניסיון המתמטי שלהם מוגבל, באופן כמעט מוחלט, ליכולת להפעיל אלגוריתם סטנדרטי אחד בכל פעם ולקבל בכל פעם תשובה אחת ויחידה. לא נעשתה בדיקה מפורשת מצידם לגבי בחירת סוג האלגוריתם המתאים או לגבי משמעות התוצאה שהתקבלה. במילים אחרות, חוש למספרים לא התפתח בצורה מפורשת ומשמעותית.

מחקרנו בדק את הבצוע של תלמידי כתות ו' ו-ז' במגוון משימות הכרוכות באומדן והגיון של התשובות. שניהם דורשים הפעלת חוש למספרים. כמו כן בדק המחקר את ההשפעה של יחידת לימוד קצרה של פעילויות על שני נושאים אלו. למרות שהיחידה נכתבה באופן מיוחד עבור גילאים אלו, ניתן לתת את רוב המשימות גם לתלמידים בכתות נמוכות יותר, עם אפשרות לעשות התאמות לפי הנדרש.

חוש למספרים במשימות מספריות טהורות

תלמידים התבקשו למקם את הנקודה העשרונית בתשובות שניתנו לשני התרגילים הבאים:

$$\begin{array}{r} \times 5.5 \\ \underline{3.2} \\ 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 3.5 \\ \underline{4.5} \\ 1575 \end{array}$$

תלמידים עם חוש למספרים ירגישו שמשימה זו קלה, אפילו אם אינם יודעים את האלגוריתם הסטנדרטי לפתרון התרגילים. אבל מצאנו שתלמידים ספרו את מספר הספרות שאחרי הנקודה העשרונית ורשמו כתשובה 1.76 לבעיה השנייה. לא עלה כלל על דעתם לבדוק האם תשובה זו הגיונית. כנראה שהם חושבים שאלגוריתמים אינם משקרים לעולם. התנסויות עם מספרים שלמים משפיעות לעיתים על עבודת התלמידים בשברים ובמספרים עשרוניים, ומשתלטות על דרך חשיבתם כך שהחוש למספרים אינו ממלא תפקיד בעת קבלת התשובה.

לדוגמא התבוננו במשימה הבאה:

התוצאה של $0.469 : 426.5$ היא א. פחות מ- 426.5

ב. שווה ל- 426.5

ג. יותר מ- 426.5

הסבר את תשובתך.

התשובה הנכונה (ג), ניתנה על ידי 40 אחוז מ- 328 התלמידים. ההסבר למרבית התשובות השגויות היה ש"כאשר מחלקים, המספר נעשה קטן יותר". תוצאות דומות, מעט טובות יותר התקבלו עבור תרגיל דומה בכפל.

על מנת לשפר חוש למספרים, יש לתת לתלמידים במהלך כל שנות לימודיהם בביה"ס, משימות רבות ומגוונות שבהן החישוב הנדרש הוא מועט או לא קיים בכלל. להלן כמה דוגמאות למשימות שמגבירות את החוש למספרים:

1. מה גדול יותר - $9 + 8$ או $13 + 11$?

$46 - 17$ או $46 - 19$?

$1\frac{1}{2}$ או $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

תלמידים רבים יעשו חישובים מדויקים לפני שיענו, אבל המורה יכולה להשתמש באסטרטגיות שונות על מנת להניא אותם מלעשות זאת. למשל על ידי הצגת השאלות בע"פ והקצבת זמן למתן התשובה.

2. התוצאה של 46×91 תהיה בתחום ה -

1. מאות

2. אלפים

3. עשרות אלפים

האם 46×91 גדול יותר או קטן יותר מ- 5000 ? גדול יותר או קטן יותר מ- 3600 ?

3. אם מותר לך לעגל רק את אחד המספרים בתרגיל 32×83 , איזה גורם כדאי לעגל על מנת לקבל תוצאה קרובה יותר לתשובה המדויקת?

4. א. $[] \times 127$ מסתיים בספרה 3. מה תוכל להגיד על המספר השלם החסר?

אם ידוע לך גם שהתוצאה קטנה מ-4000, מה תוכל כעת לאמר על זה?

אם ידוע גם שהתוצאה גדולה מ-3000, מהו המספר החסר?

ב. סכום חמישה מספרים דו-ספרתיים הוא פחות מ-100. עליך להחליט לגבי כל אחד מההגדים הבאים האם הוא חייב להיות נכון, חייב להיות לא נכון, או יתכן שיהיה נכון. הסבר את תשובותיך.

1. כל אחד מן המספרים קטן מ-20.
2. אחד המספרים גדול מ-60.
3. ארבעה מספרים גדולים מ-20 ומספר אחד קטן מ-20.
4. אם שני מספרים קטנים מ-20, אזי לפחות אחד המספרים גדול מ-20.
5. אם כל חמשת המספרים שונים זה מזה, אזי הסכום שלהם גדול או שווה ל-60.

5. מבלי לחשב, הסבר מדוע כל אחד מהחישובים הבאים אינו נכון.

0.46	ג.	119	ב.	310	א.
1.93		46		520	
+ 2.46		+ 137		+ 630	
0.99		940		150	
<u>0.87</u>		<u>300</u>		<u>470</u>	
627		602		2081	

ד. $27 \times 3 = 621$ ה. $36 : 0.5 = 18$

חוש למספרים בתוך הקשר

שאלה נוספת שבה השתמשנו במחקר שלנו היתה כלהלן:

לאמבטיה יש שני פתחים. הפתח הראשון מרוקן את האמבטיה כולה ב-10 דקות. הפתח השני מרוקן את האמבטיה כולה ב-4 דקות. אם שני הפתחים פתוחים, בכמה זמן תתרוקן האמבטיה כולה?

בחר את התשובה המתאימה ביותר מבין התשובות הבאות והסבר את בחירתך.

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| א. 40 דקות | ב. 14 דקות |
| ג. פחות מ-14 אבל יותר מ-7 דקות | ד. 7 דקות |
| ה. 6 דקות | ו. 4 דקות |
| ז. בערך 3 דקות | ח. בערך $\frac{1}{2}$ דקה. |

הילדים לא למדו פתרון בעיות כאלו באמצעות אלגברה, אבל חוש למספרים הוא כל מה שנחוץ: אם פתח אחד מרוקן את האמבטיה ב-4 דקות, אז שני הפתחים ביחד ירוקנו את האמבטיה בפחות מ-4 דקות, אבל לא בזמן קצר כמו $\frac{1}{2}$ דקה.

שוב גילינו שתלמידים נוטים להפעיל אלגוריתם שיעשה חישוב עם המספרים שבבעיה מבלי להשקיע מחשבה. הם חיברו, כפלו, חישובו ממוצע וכו'. גם אם נקבל את התוצאה $\frac{1}{2}$ דקה כאפשרות סבירה, מאחר שהיא פחות מ-4 דקות, רק 36 אחוז מהתלמידים, שלא קיבלו את יחידת הלימוד המיוחדת, נתנו תשובה הגיונית. לאחר קבלת לימוד מיוחד קצר, נתנו 85 אחוז מן התלמידים תשובה הגיונית לשאלה בעלת תוכן דומה.

במשימה זו, האלגוריתם – גם אם הוא ידוע – אינו רלבנטי, אבל התשובה המתקבלת משמוש באלגוריתם לא נכון לבעיה זו איננה מגוחכת באופן מהותי. על מנת לדעת אם התשובה שקיבל נכונה או לא, על התלמיד ליחס אותה לנתונים שבבעיה. יכולת זו דורשת חוש למספרים מתוחכם יותר מזה הנדרש לשם פתרון בעיית הגובה שהוצגה בתחילת המאמר. 3 מטר הינה תשובה מגוחכת ביחס לגובה של אדם.

הבעיה העיקרית ביכולת ללמוד לשפוט את מידת ההגיון של תשובה בתוך הקשר נתון הינה שלשם כך נדרש חוש למספרים. למרות שניתן לעודד תלמידים לבדוק את תשובותיהם, הם יעשו זאת על פי רוב רק בסיטואציות מתמטיות טהורות, שבהם הופעל אלגוריתם סטנדרטי כלשהוא, והבדיקה שלהם תהיה מכוונת רק לדיוק הבצוע של אותו אלגוריתם. לפעילות עם המספרים עצמם אין תוכן מציאותי. מצב זה גורם לתלמידים לנתק לחלוטין את התשובה המתמטית מהיישום שלה להקשר. התשובה, לדעתם, נכונה מתמטית גם אם איננה הגיונית בהתייחס להקשר. תופעה זו מומחשת שוב בעזרת המשימה הבאה שהופיעה במחקר שלנו:

סוכנות ספרים עשתה משלוח של 188 ספרים ל-6 ספריות. כמה ספרים אתה חושב שכל ספריה קבלה?

שאלה זו לא ניתנת לפתרון באופן אלגוריתמי. בכל זאת, תלמידים רבים השתמשו באלגוריתם

החילוק. תשובות בשברים $(\frac{1}{3} \cdot 31.3)$ ספרים, ניתנו ע"י 34 אחוז מן התלמידים לפני

שקבלו את יחידת הלימוד המיוחדת, אבל רק 3 אחוז נתנו תשובות כאלו אחרי יחידת הלימוד. כאשר שאלנו האם זה יתכן שגובהו של אדם יהיה 3 מטר, או האם ספריה יכולה לקבל 31 ושליש ספרים, התשובה היתה באופן מוחלט "לא!". אבל אם תשובות אלו מתקבלות באלגוריתמים, אז התלמידים מניחים שהן נכונות!

מחקרנו מצא גם שתלמידים יודעים מעט מאוד על מידות שונות מחיי היום-יום, אשר יכולות לשמש כנתוני התייחסות לחוש למספרים בבעיות הקשר. למשל, מהירות המכונית, הגובה של בנין בן 80 קומות, או מספר הליטרים של מים בתוך דלי. כאשר שאלנו על מהירותו של מטוס הטס מלונדון לניו-יורק, ניתנה תשובה הגיונית (הטווח שקבלנו כסביר היה מ 500 עד 1500 קמ"ש) על ידי 29 אחוז מהתלמידים שלא קיבלו את יחידת הלימוד המיוחדת. כמו כן מצאנו שאם שאלנו על המידות של עצמים שונים מאותו סוג (למשל: רוחב מכונית, משאית, כביש ראשי וכו') אזי לעיתים קרובות לא היתה עקביות פנימית בין התשובות. (למשל: רוחב המכונית גדול יותר מרוחב הכביש). משום כך, אנו ממליצים לבקש מהתלמידים לדרג תחילה את העצמים מבחינה כמותית ורק אח"כ להתאים להם את המידות הספציפיות. למשל: דרגו את העצמים הבאים מן הכבד אל הקל ואמדו את משקלו של כל אחד מהם: מכונית, אופניים, משאית, כלב, כסא, פיל, חתלתול.

מספר התשובות הנכונות שכמעט הוכפל בעקבות יחידת הלימוד המיוחדת, מצביע על כך שיש להרחיב או לשפר סוג כזה של הוראה בכתה. אנו מרגישים שסוג כזה של חוש למספרים לא נרכש בקלות ויש צורך כנראה לפתח אותו באופן הדרגתי על פני מספר שנים בתקופת הלימודים בביה"ס.

מסקנות

חוש למספרים אינו נושא בודד בתוכנית הלימודים, אלא יש לו אספקטים רבים. התפתחות של החוש למספרים איננה דבר הקורה באופן טבעי אצל מרבית התלמידים הלומדים בתוכנית הלימודים הרגילה, כפי שנוכחנו במחקר שלנו. יחד עם זאת, הממצאים מצביעים בברור על כך שניתן לפתח חוש למספרים באמצעות פעילויות מתאימות. יחידת הלימוד הקצרה שנתנו לתלמידי כתות ו' ו-ז' שיפרה באופן משמעותי ביותר את החוש שלהם למספרים בכמה אספקטים. הם גם למדו להתבונן בדרך שונה בכל התשובות שקיבלו: למספרים שבתשובה היתה משמעות שדרשה בדיקה בקורתית. אנו מציעים שפעילויות מן הסוגים שתוארו כאן ישולבו בתוכנית הלימודים, גם לפני כתות ו' ו-ז'. יש להתחיל כבר בכתה א' בפעילויות מתאימות המזמינות חוש למספרים ולתת לתלמידים מבט פחות מכני של המתמטיקה.