שימוש בייצוגים של כפל שברים

Using Representations of Fraction Multiplication

מאת: Corey Webel, Erin Krupa, and Jason McManus
הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 22, No. 6, February 2016

מטלות עם הקשר כמו בעיית החלב או בעיית העוגיות (המופיעות במאמר) יכולות לשפוך אור על פעולות עם שברים, אך לא כל המודלים הויזואליים מתיישרים עם הסטנדרטים.

קריאה מעמיקה של הסטנדרטים העוסקים בשברים בתכנית הסטנדרטים של ארה"ב (Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) 2010), מגלה שמושם דגש רב על **מודלים ויזואליים של שברים**, מונח בו משתמשים שמונה עשרה פעמים בחמשת העמודים המפרטים את מיומנויות השברים עבור תלמידים בכיתות ג' – ה'. מודל ויזואלי של שבר מוגדר במסמך כ"ציור של פסים, ציור של ישר מספרים, או מודל של שטח" (עמ' 87). סוגים אלה של ציורים ומודלים יכולים לשמש להדגמת תפיסות חשובות בנוגע לשברים, כגון מדוע שלם משותף הכרחי להשוואת שברים או מדוע חלקים בגודל שווה (כפי שמציין המכנה) יכולים לשמש להשוואה או לחיבור של שברים (Ortiz 2006; Bray and Abreu-Sanchez 2010; Cramer, Wyberg, and Leavit 2008).

אך האם זה משנה **כיצד** משתמשים במודלים אלה? במאמר זה אנו בוחנים את הדרכים בהן השתמשו במודלים ויזואליים להצגת כפל שברים בחמש כיתות ה'. המורים בכיתות אלה עבדו איתנו בתכנית של התפתחות מקצועית שנועדה לעזור להם ליישם את הסטנדרטים של CCSSM. במקרים רבים הם השתמשו במודלים הויזואליים של שברים בדרכים שתאמו את האופן בו כפל שברים מתואר ב- CCSSM. אולם לא תמיד זה היה המצב.

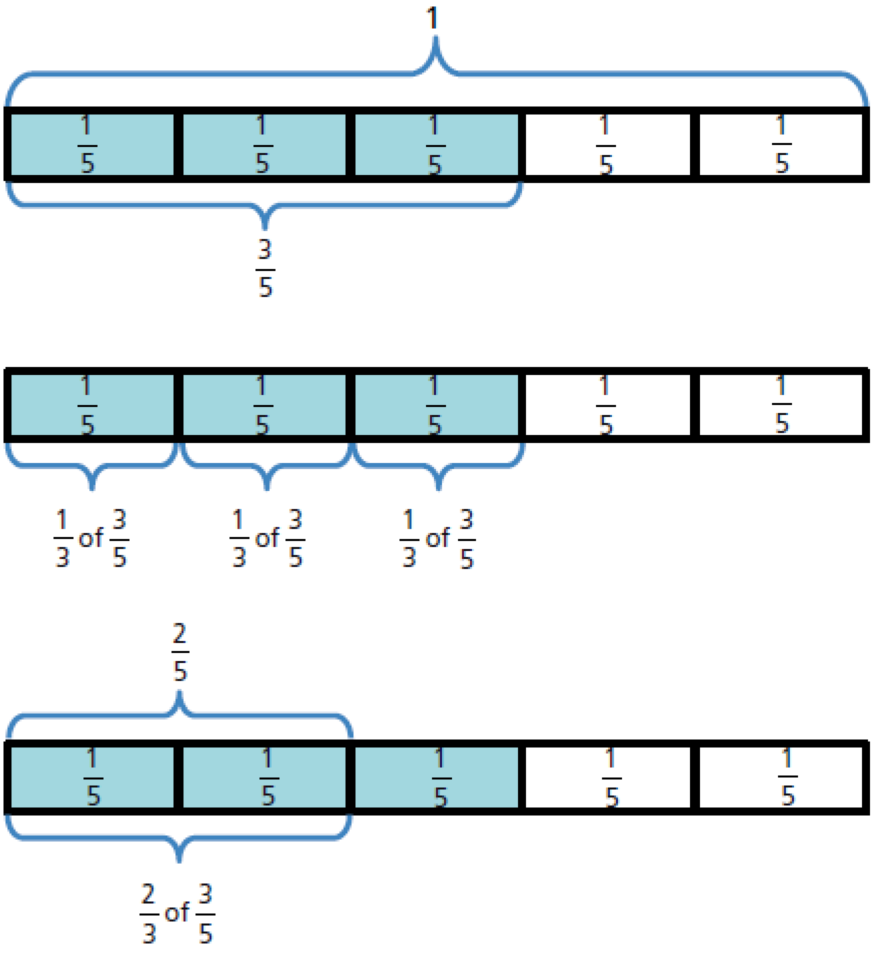
מה המשמעות של להבין כפל שברים?

אחד הסטנדרטים של ה- CCSSM (5.NF.4a) מציין שתלמידים צריכים "לפרש את המכפלה (a / b) x q כ- a חלקים של חלוקה של q ל- b חלקים שווים". לדוגמה, אם צריך לייצג את 3/5 x 2/3, אפשר לצייר 3/5, לחלק אותם לשלושה חלקים שווים (כל חלק יהיה

1/5), ואז לבחור שניים מחלקים אלה – וכך להראות 2/3 של 3/5 (ראו **איור 1**). שני חלקים אלה ביחד מהווים 2/5 מהשלם המקורי. למעשה, ניתן לחשוב על 3/5 x 2/3 כמתייחס לכמות שהיא **גדולה פי שני שליש משלוש חמישיות.** זה מתאים להגדרה הכללית של כפל כ"תהליך סקלרי (scalar) הכולל שתי כמויות, כשכמות אחת – **הכופל** (multiplier) משמשת כגורם השינוי (scaling) ומציינת כיצד הפעולה משנה את גודלה (rescales), והכמות האחרת היא **היחידה הכפלית** (multiplicative unit)" (Lannin, Chval, and Jones 2013, p. 11). במקרה זה, 3/5 הוא היחידה הכפלית שמשנים את גודלה, ו- 2/3 הוא הכופל, המציין את הגורם שעל פיו משנים את הגודל של 3/5.

איור 1

ציור של פסים עבור 2/3 × 3/5 = 2/5 מראה כיצד
אנו יכולים לחשוב על 2/3 של 3/5 ככמות הגדולה פי 2/3 מ-3/5.



בדיקת מודלים ויזואליים בהם השתמשו בכיתות

בחמש כיתות ה' בהן צפינו, כל המורים השתמשו באותו אוסף של שש מטלות בשיעור שפותח על ידי המחוז שלהם כדי לתמוך בסטנדרט 5.NF.4a. אנו צפינו בכל ביצועי המטלות, ואחר כך ניתחנו את שלושים וחמישה המודלים הויזואליים שנחשבו כמייצגים פתרונות סופיים לגיטימיים על ידי משתתפי השיעור. במקרים רבים, הן המורה והן התלמידים תרמו לגרסה הסופית של הייצוג. המטלות כללו את הבעיות הבאות, אליהן אנו מתייחסים במאמר זה כבעיית החלב ובעיית העוגיות:

לקלי נשאר 1/4 גלון של חלב במקרר. היא שתתה 1/4 ממנו. איזה חלק מגלון החלב נשאר במקרר?

ניקול אפתה הרבה עוגיות, אך הבת שלה אכלה חצי. החברים שלה באו ואכלו 3/4 ממה שנשאר. איזה חלק מהעוגיות נשאר לה?

(**הערה:** אין בכוונתנו להמליץ על אלה כעל בעיות אידאליות לסטנדרט 5.NF.4a. בפרט, מפריע לנו שהשאלה בסוף בעיית העוגיות לא מזהה בבירור את השלם עבור "חלק מהעוגיות" שנשארו לניקול.)

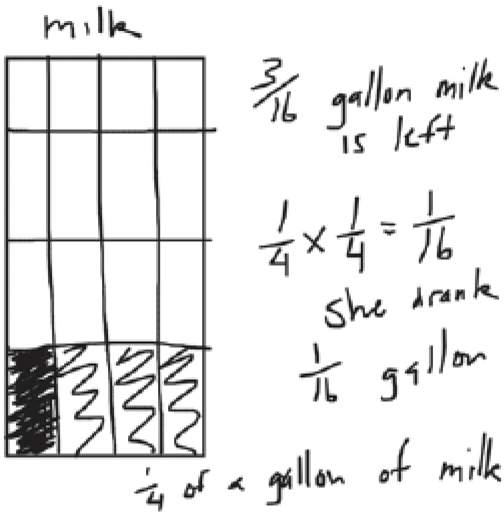
מודלים ויזואליים של שברים שנצפו

איורים 2 ו- 3 מראים שני מודלים שונים של שברים המוצגים כפתרונות לבעיית החלב.

איור 2

מודל ויזואלי המראה פתרון לבעית החלב משתמש בשטח המלבן כדי לייצג את גלון החלב השלם.
שלושה קווים אופקיים מחלקים את השלם לארבעה חלקים. הצביעה מייצגת את רבע גלון החלב בתחילת הבעיה.

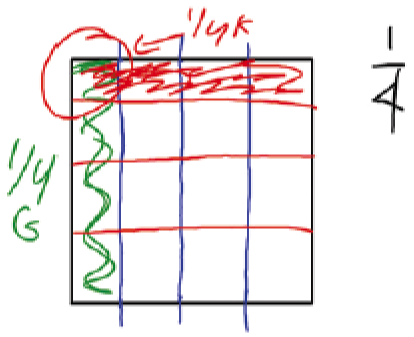
הערה: ייצוג זה צוייר על הלוח ושוחזר מתעוד במחברת.



איור 3

מודל ויזואלי זה מראה פתרון ל- 1/4 × 1/4, אך אינו עונה על השאלה המוצגת בבעית החלב משום שהוא מייצג את הכפל בצורה שגויה.

הערה: ייצוג זה נוצר ונשמר בעזרת הטכנולוגיה של הלוח החכם.



בשני המודלים השתמשו בשטח של מלבן כדי לייצג את גלון החלב השלם. **באיור 2** השתמשו בשלושה קווים אופקיים כדי לחלק את הגלון השלם לארבעה חלקים, והשתמשו בצביעה כדי לייצג את העובדה שהיה רבע גלון חלב בתחילת הבעיה (מסומן באיור כ- "1/4 of a gallon of milk"). לאחר מכן נוספו קווים אנכיים כדי לחלק כל רבע לארבעה חלקים. אחד מארבעת החלקים שכבר נצבעו, נצבע בצביעה כהה יותר, והתרגיל 1/16 = 1/4 x 1/4 נכתב על הלוח, יחד עם המשפט "היא שתתה 1/16 גלון." לבסוף נכתב על הלוח המשפט "נשארו 3/16 גלון". בכיתה אחרת, תהליך דומה יצר את **איור 3**, עם הבדלים משמעותיים. כשעשו את הצביעה השנייה (באדום), הצביעה לא היתה מוגבלת לרבע מהחלק שנצבע קודם (בירוק), אלא נמשכה בצורה אופקית לרוחב המלבן כולו. הסימונים היו פחות אינפורמטיביים ("1/4 G " ו- "1/4 K "). למרות שלא רואים זאת בציור, הכיתה הסכימה שהתשובה היתה 1/16, כי 1/16 מסך כל הגלון היה צבוע פעמיים. הייצוג ב**איור 3** הוא מעט בעייתי. ראשית, למרות שהוא כן נותן את הפתרון ל- 1/4 x 1/4, הכיתה לא השתמשה בו כדי לענות על השאלה שנשאלה בבעיית החלב (כמה **נשאר** במיכל). התשובה הנכונה היא 3/16 גלון, לא 1/16 גלון. שנית, ויותר קריטי, מהעובדה שהצביעה האדומה נמשכה בצורה אופקית מעבר למיכל החלב כולו נובע שהשלם עבור שני הרבעים היה אותו הדבר – גלון החלב כולו. אולם בבעיה צויין שהרבע הראשון התייחס לגלון החלב והרבע השני התייחס לכמות החלב שנשארה במיכל (ראו **במסגרת שבעמוד 10**

דוגמאות של מורים המדגישים הבחנה זו במהלך יצירת **איור 2**). זה עשוי להיראות כהבדל טריוויאלי, אך ייצוג שגוי זה למעשה מתעלם מהיבט בסיסי של כפל. למרבית בעיות הכפל, בניגוד לחיבור או חיסור, יש **שתי** יחידות. במקרה הנוכחי, יחידה אחת היא גלון החלב, אליה מתייחס הרבע הראשון. הרבע השני לא משתמש בגלון אחד כשלם שלו; הוא משתמש ברבע הראשון (קלי לא שותה 1/4 גלון; היא שותה 1/4 מ- 1/4 הגלון).
זה אינו רעיון חדש; כפי שציינו, כפל באופן כללי עוסק במציאת כמות הגדולה פי כמה מכמות אחרת. זה אומר שאפילו כפל במספרים שלמים כולל שתי יחידות שונות, כשכמות אחת (הכופל) משתמשת בכמות הראשונה כיחידת ההתייחסות (הנכפל) שלה. לדוגמה, ראו את המצב הכפלי שבו בשלוש חבילות של סופגניות יש ארבע סופגניות בכל אחת. היחידות של 3 ו- 4 הן שונות: ה- 4 מתייחס למספר ה**סופגניות**; ה- 3 מתייחס למספר ה**חבילות** (של 4 סופגניות). הצביעה המופיעה ב**איור 3** מייצגת באופן שגוי את המצב הכפלי בכך שרומזת ששני השברים מתייחסים לאותה יחידה (גלון החלב). כתוצאה מכך, המודל לא מתייחס לכפל שברים כאל הרחבה של כפל של מספרים שלמים, אלא במקום זאת, כאל פעולה חדשה לגמרי שתלמידים צריכים ללמוד מההתחלה.
ראינו וריאציות מסוג זה מופיעות במודלים ויזואליים של בעיות אחרות, כולל בעיית העוגיות. ב**איור 4**, הן ה- 1/2 (הצביעה בכחול) והן ה- 3/4 (הצביעה באדום) מתייחסים למלבן כולו (כל העוגיות שניקול אפתה). ציור זה אינו הגיוני בהקשר של הבעיה; אם הכחול מייצג את מה

איור 4

המודל רומז שהחברים אכלו את אותן העוגיות. צביעת כל העוגיות אינה הגיונית בהקשר של הבעיה.

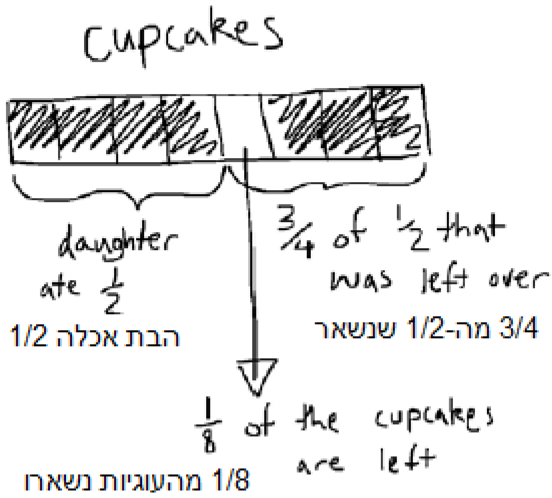
הערה: מודל שטח זה עבור בעיית העוגיות נוצר ונשמר בעזרת הטכנולוגיה של הלוח החכם.

שהבת של ניקול אכלה (1/2 מכל העוגיות), והאדום מייצג את מה שחבריה אכלו (3/4 מכל העוגיות), הצביעה החופפת גורמת לכך שייראה כאילו הבת של ניקול וחבריה אכלו את אותן העוגיות. **איור 5** הוא יותר הגיוני; ה- 3/4 מתייחס רק ל" 1/2 שנשאר", לאחר שהבת של ניקול אכלה את החלק שלה.

איור 5

מודל של פסים עבור בעיית העוגיות הגיוני יותר מאשר מודל השטח כי ה- 3/4 מתייחס רק ל-"1/2" שנשאר לאחר שהבת של ניקול אכלה את חלק העוגיות שלה.

הערה: ייצוג זה צויר על הלוח ושוחזר מתעוד במחברת.



אנו רואים את **איורים 2 ו- 5** כדוגמאות טובות לסטנדרטים, כשהן מראות בצורה נכונה כמות המשתנה (rescaled) בגורם מסוים. שניהם כוללים מה שאנו מכנים "**תוויות קונטקסטואליות**", המזהות את משמעות ההקשר של כל שבר: "1/4 גלון של חלב", "הבת אכלה 1/2", "1/8 מהעוגיות נשארו." תוויות קונטקסטואליות אלה מראות שניתנה תשומת לב, בכל שלב של הפתרון, למשמעות של כל אחד מחלקי הציור בהקשר של סיפור הבעיה. במילים אחרות, הכיתה עסקה **בחשיבה כמותית** (קישרה בין התמונה והסימנים בחזרה לייחוס שלהם בהקשר). מצאנו שכללית, ייצוגים שכללו תוויות קונטקסטואליות נטו פחות לייצג באופן שגוי כפל שברים (39 אחוז) מאשר אלה שלא כללו תוויות קונטקסטואליות (83 אחוז).

מקור הייצוגים השגויים

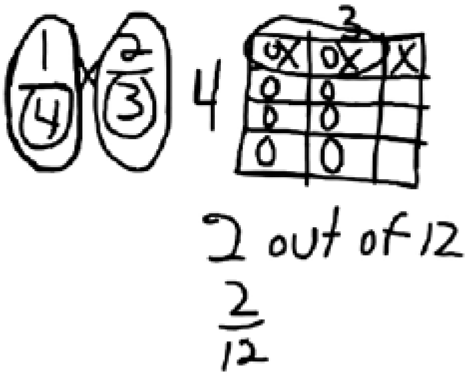
כחלק מההתפתחות המקצועית, עבדנו מוקדם יותר עם המורים על מודלים ויזואליים לכפל שברים, ולא הצגנו את הייצוגים השגויים שראינו בכיתות אלה. בשיחות עם המורים מצאנו שהם השתמשו לעיתים קרובות באינטרנט כדי למצוא חומרים על ידי חיפוש הסטנדרט

הספציפי בתכנית הלימודים. אנו חושדים שמורים רבים ראו את הגרסה הזו של כפל שברים בחומרים אחרים (לדוגמה, Blackwell 2012). באחד המפגשים של ההשתלמות, מורה הציגה ציור עבור הפתרון של 2/3 x 1/4 (ראו **איור 6**).

איור 6

שימוש בשינון של מורה עבור 2/3 × 1/4 מייצג בצורה שגוייה את השלמים, ולמרות שהתשובה נכונה במקרה זה - יכול להוביל לתשובות שגויות.

הערה: ציור זה הוא חלק מצילום מסך שנשמר מסרט וידאו שצולם במהלך מפגש בהשתלמות.



המורה התחילה על ידי ציור של מלבן, כשהיא מציינת שהמכנים היו 4 ו- 3. היא כתבה 4 ו- 3 ליד הצד השמאלי והעליון של המלבן, בהתאמה. היא המשיכה לסרטט קווים כדי לחלק את המסגרת לארבעה חלקים אופקיים ושלושה חלקים אנכיים, ואמרה "אנחנו תמיד מתחילים בצורה אופקית, ואחר כך עוברים לאנכית." אחר כך היא כיוונה את תשומת ליבה ל- 1/4, הקיפה את השבר ואמרה "אני הולכת לצבוע רבע מהמשבצות." היא השתמשה ב- X-ים, מילאה את השורה העליונה של משבצות והסבירה, "אני עושה זאת לכל הרוחב כי זה רבע מהמשבצות." אחר כך היא כיוונה את תשומת ליבה ל- 2/3, הקיפה את השבר ואמרה "עכשיו אני רוצה לצבוע שני שלישים מהמשבצות." תוך שימוש בעיגולים, היא מילאה את כל הטור הראשון. "זהו קו שלם אחד. זה שליש; זה שני שלישים," היא המשיכה, כשהיא ממלאת את הטור השני בעיגולים." "עכשיו המשבצות שיש בהן שתי צורות הן התשובה. אז עכשיו התשובה שלי היא שתיים מתוך שתים עשרה, או שתי שתים-עשריות, שזה שווה לשישית." היא סיימה באומרה "וזה יעבוד כל פעם."

נראה שמורה זו משתמשת במודלים ויזואליים בצורה מכנית, כשהיא מתארת את יצירת הציור כסדרה של שלבים שיש לבצע. לא רק שהיא מייצגת בצורה שגויה את השלמים עבור

השברים כפי שראינו בביקורינו בכיתה (צביעת 2/3 מהמלבן השלם במקום 2/3 מ- 1/4), היא גם לא מצליחה להסביר כיצד פרוצדורה זו מתאימה להמשגות אחרות של כפל (לדוגמה, מציאת כמות הגדולה פי 2/3 מ- 1/4). היא מתארת כיצד ליצור 1/4 וכיצד ליצור 2/3 אך לא מסבירה מדוע התשובה נמצאת בחלק בו יש חפיפה של שני הסימנים. אפשר לשאול, "מה רע בזה? אחרי הכל, זה עובד!" אולם ראינו בבעיית החלב שיישום עיוור של סוג זה של פרוצדורה יכול להוביל לתשובות שגויות (1/16 במקום 3/16), משום שאם מתחילים להשתמש באלגוריתם מהזיכרון, קל לבצע אותו בהיסח הדעת, מבלי לזכור לוודא שהתשובה המתקבלת מתאימה לשאלה שנשאלה. תהינו גם כיצד פרוצדורה זו תעבוד עם שברים גדולים מ- 1 או מספרים מעורבים. (האם יהיה דרוש אוסף שונה של כללים כדי לצייר את 1/4 x 4/3 או את 1/4 1 x 2/3 2 ?) חשוב יותר, אנו יכולים להגיב לטענת המורה ש"זה יעבוד כל פעם" על ידי ציון העובדה שכבר קיים אלגוריתם לכפל שברים שיעבוד בכל פעם – אחד הרבה יותר יעיל: a/b x c/d = ac/bd. אם המטרה הסופית של ה- CCSSM היתה ללמד את התלמידים למצוא את התשובה תוך שימוש בשיטות שתמיד עובדות, היא לא היתה מדגישה את המודלים של שברים. מטרת המודלים הויזואליים היא לייצג **מהי המשמעות** של כפל בשבר, לא ללמד דרכים חדשות (והרבה יותר מסובכות!) לקבלת התשובה. הצגה של מודלים ויזואליים כפרוצדורות בלבד אותן יש לבצע יכולה אפילו להעלות התנגדות מובנת של התלמידים וההורים: למה לשנן את התהליך המורכב הזה כשקיים אלגוריתם הרבה יותר יעיל? מנקודת מבט של למידה, הפיכת מודלים ויזואליים לאלגוריתמים של שלב-אחרי-שלב מעודדת את התלמידים **לא** לחשוב על מה קורה במצב כפלי אלא במקום זאת לעקוב אחר תהליך מכני – בדיוק ממה שה- CCSSM מעודד אותנו להימנע. כפי ש- Thompson and Saldanha מנסחים זאת,

> פעולות מושגיות הן אודות מה שרואים, לא מה שעושים, ואודות חשיבה המעוגנת במשמעות. (2003).

אם כפל משמעותו מציאת כמות הגדולה פי מספר פעמים מכמות אחרת, אזי מודלים ויזואליים צריכים לתת לתלמידים הזדמנות לייצג את הקשר הכמותי הזה ולראות את כפל השברים כהרחבה של רעיונות כפליים שהם כבר מבינים.

אות אזהרה

הנושא שהועלה במאמר זה עשוי להיראות קטן, והפתרון, מובן מאליו – רק אל תצבעו לרוחב המלבן כולו. אך אנו רואים תצפיות אלה כאות אזהרה לגבי הדרך שבה מפרשים ומיישמים את ה- CCSSM במחוזות השונים ברחבי הארץ. האם הדגש על מודלים ויזואליים ישמש כדי

לשפוך אור על המשמעות של פעולות, או האם ישתמשו במודלים ויזואליים כעוד אסטרטגיה לקבלת תשובה? בהקשר לכפל שברים, אנו מציעים שמורים יזכרו את הדברים הבאים:

- **בכל מודל ויזואלי בו תשתמשו, וודאו שתלמידים מבינים ששני השברים מתייחסים לגדלים שונים של יחידות.**

  קיימים מספר מקורות שיכולים לעזור לתלמידים לקשר בין הבנתם את הכפל במספרים שלמים לכפל שברים על ידי מתן תשומת לב מיוחדת לשני השלמים השונים המעורבים (Son 2012; Tsankova and Pjanic 2009 – 2010; Wyberg et al.2011 – 2012). לדוגמה, Wyberg ועמיתיו (2012) מראים כיצד פעילות של קיפול נייר משתמשת בגישה של מערך לכפל שברים ועדיין שמה לב לשלם אליו מתייחסים עבור כל שבר.

- **הדגישו קישורים בחזרה להקשר**

  שמנו לב שציורים נטו יותר להיות נכונים כשתוויות קונטקסטואליות הופיעו (כמו אלה **באיורים 2 ו- 5**). שימת דגש על כך שתלמידים ישתמשו בתוויות קונטקסטואליות כאשר הם בונים מודלים ויזואליים לכפל שברים עשויה לעזור להם לטפל במשמעות של כל שבר, ובמיוחד ליחידת הייחוס של כל אחד.

- **אל תצמצמו את המודלים הויזואליים לסדרה של שלבים**

  במקום זאת, הדגישו את המטרה של מודלים ויזואליים: יצירת תמונה של הקשר בין שתי יחידות בבעיה. מה יהיה הגודל של כמות שהיא גדולה פי 2/3 מ-3/5? תלמידים צריכים לתפוס את המודל ככלי מסייע לקביעת הערך של כמות זו ובסופו של דבר בניית המשגה מוצקה יותר של כפל.

ה- CCSSM לא רק מפרט נושאים שיש לכסות ופרוצדורות שיש ללמוד; הסטנדרטים מדגישים קישורים בין רעיונות גדולים מעבר לכיתות ולתחומי תוכן. אנו מקווים שהרעיונות שתיארנו כאן יעזרו למורים להשתמש במודלים ויזואליים בדרכים המאפשרות לתלמידים לבנות על הרעיונות שלהם אודות כפל ולהרחיב רעיונות אלה כך שיכללו כפל בשברים.

מיקוד על חשיבת התלמידים

להלן מספר ציטוטים מהדיון שהתקיים סביב יצירת הציור המופיע **באיור 2**. שימו לב לקשיי התלמידים בזיהוי השלם עבור כל רבע ואת התמדת המורה כשהיא עוזרת להם לראות לאיזו יחידה מתייחסים.

מורה: יש רק רבע אפילו כדי להתחיל. ואז היא שותה רבע מזה. אז האם היא שתתה כל מה שנשאר?

תלמידים שונים: לא! כן! לא!

מורה: היא שתתה רבע מ...

תלמידים שונים: הגלון!

החלב!

החלב בכוס!

הגלון!

רבע מגלון החלב!

מורה: זה מה שנשאר, זה רבע מגלון של חלב. ואז היא שותה רבע **מזה**.

תלמיד 1: האם היא לא שתתה את הכל?

תלמיד 2: לא!

מורה: בסדר, אז בואו נצייר מלבן כדי לייצג את גלון החלב שלנו. הנה גלון החלב שלנו [מציירת מלבן]. כמה יש בו?

תלמיד: רבע.

מורה: רבע; האם תוכל להראות לי רבע? [תלמיד מחלק את המלבן לארבעה חלקים אופקיים וצובע את התחתון].

מורה: אנו צריכים לסמן זאת כ**חלב**. אנו צריכים לסמן רבע גלון של חלב, נכון? אוקיי, זה מה שיש במקרר. בסדר, סטוארט [שם בדוי], כתוב שעכשיו היא הולכת לשתות רבע מהחלב הזה. לא רבע של גלון; רבע מהחלב שיש שם. אם ארצה שתמצאו רבע מהחלב ששם, מה תצטרכו לעשות לחלב ששם? קחו שנייה לחשוב על כך. אני רוצה לדעת מהו רבע של מה שיש שם.[סטוארט מצייר תמונה של רבע של רבע, ראו **איור 2.** לאחר מספר דקות של דיון בתשובה, תלמיד אחר לא מסכים ומתחיל לדבר].

תלמיד 3: תראו, אני אראה לכם. אני ציירתי את מה שהוא צייר, וחתכתי אותו לארבע חתיכות. ואז כתוב שלקלי נשאר רבע גלון של חלב במקרר שלה, כלומר ששלושה רבעים, היא שתתה לפני 5 או 6 שבועות. זה לא שם, יש רק רבע. עכשיו תסתכלו, נכון? היא שתתה רבע, אותה כמות כמו זו שנשאר לה – לא יישאר שום דבר!

מורה: אבל לא כתוב שהיא שתתה רבע גלון. כתוב שהיא שתתה רבע **ממנו**, כלומר, רבע מהרבע שהיה שם.

תלמיד 3: כן, זה אומר שלא נשאר שום דבר.

מורה: רבע מרבע. היא לא שתתה רבע גלון, היא שתתה רבע מהכמות שהיתה שם. אז הוא חילק זאת לארבעה חלקים וצבע את זה. זה כל מה שהיא שתתה.

תלמיד: אה! אז זאת אומרת.... מה זה שלושה רבעים?

מורה: אז החתיכות הקטנות האלה נשארו; זה מה שהשאלה שואלת. [הדיון ממשיך כשלבסוף מגיעה המסקנה ששלושת החתיכות הקטנות הם שלוש שש-עשריות של גלון החלב המקורי.]

REFERENCES

Blackwell, Michelle. 2012. "Multiply a Fraction by a Fraction Using Area Models (1)." *LearnZillion*. http://learnzillion.com/lessons /1549-multiply-a-fraction-by-a-fraction-using-area-models-1

Bray, Wendy S., and Laura Abreu-Sanchez. 2010. "Using Number Sense to Compare Fractions." *Teaching Children Mathematics* 17 (September): 90–97.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). 2010. Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards .org/assets/ccssi-introduction.pdf

Cramer, Kathleen, Terry Wyberg, and Seth Leavitt. 2008. "The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction." *Mathematics Teaching in the Middle School* 13 (April): 490–96.

Lannin, John, Kathryn Chval, and Dusty Jones. 2013. *Putting Essential Understanding of Multiplication and Division into Practice in Grades 3–5*. Edited by Barbara Dougherty. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ortiz, Enrique. 2006. "The Rollout Fractions Game: Comparing Fractions." *Teaching Children Mathematics* 13 (August): 56–62.

Son, Ji-Won. 2012. "Fraction Multiplication from a Korean Perspective." *Mathematics Teaching in the Middle School* 17 (March): 388–93.

Thompson, Patrick W., and Luis A. Saldanha. 2003. "Fractions and Multiplicative Reasoning." In *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, edited by Jeremy Kilpatrick, W. Gary Martin, and Deborah Schifter, pp. 95–113. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tsankova, Jenny K., and Karmen Pjanic. 2009–2010. "The Area Model of Multiplication of Fractions." *Mathematics Teaching in the Middle School* 15 (December–January): 281–85.

Wyberg, Terry, Stephanie R. Whitney, Kathleen A. Cramer, Debra S. Monson, and Seth Leavitt. 2011–2012. "Unfolding Fraction Multiplication." *Mathematics Teaching in the Middle School* 17 (December–January): 288–94.

Corey Webel, **webelcm@missouri.edu**, an assistant professor of mathematics education at the University of Missouri in Columbia, is interested in helping mathematics teachers learn from their own practice. **Erin Krupa**, **krupae@mail.montclair.edu**, is an assistant professor of mathematics education at Montclair State University in New Jersey. Her research interests include curricular implementation and the impact of professional development on teachers' instructional practice, content knowledge, and beliefs. **Jason McManus**, **mcmanusj3@mail.montclair.edu**, is a doctoral student at Montclair State University. He is interested in adults' learning and understanding of mathematics.