

ההבנה של בן מהו "חצי"

Ben's Understanding of One-Half

מאת : Tad Watanabe

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 2, No. 8, April 1996, pp. 460-464

תרגום : ברכה סגליס

ילדים צעירים מתוודעים לשברים פשוטים, כגון חצי, כבר בגן הילדים, למרות שבמרבית תוכניות הלימודים היכרות פורמלית של שברים מתחילה רק בכיתה ג' או בכיתה ד'. האם ילדים צעירים מבינים שברים פשוטים כאלה? החוקרים Bigelow, Davis & Hunting (1989) טוענים שילדים אכן מבינים מהו חצי במגוון של הקשרים. מאמר זה מסביר כיצד הידע של תלמיד כיתה ב' לגבי החצי היה שונה במשימה אחת לעומת משימה אחרת.

בן הוא אחד מארבעה ילדים שהשתתפו בפרויקט מחקר שנמשך שבעה שבועות ובדק את ההתפתחות של מושגי שבר מוקדמים אצל ילדים צעירים. כל אחד מארבעת הילדים רואיין בנפרד ארבע פעמים ונצפה בזמן שעסק בפתרון בעיות עם ילד אחר. בן היה, במובנים רבים, ילד טיפוסי לגיל 7 ולכיתה ב' והמחנכת שלו תיארה אותו כתלמיד "טוב" במתמטיקה. הוא היה ילד פעיל ודיבר ללא הפסקה. מורתו למתמטיקה, שהשתמשה בגישה הממוקדת בפתרון בעיות (Wheatley 1991), הבחינה שהוא היה אחד מהתלמידים שחיפשו תמיד בן זוג, גם כאשר לא נדרשה עבודת צוות. מאמר זה מתאר את הפעילויות של בן בעת שעסק בפתרון בעיות במסגרת שלוש משימות שונות, שהוצגו לפניו במפגשים של ראיונות אישיים. משימות אלו נבחרו משום שהן משקפות שלושה גורמים שהמורים צריכים לתת עליהם את הדעת: (1) ההשפעה של ספרי הלימוד, (2) קשרים עם חיי היומיום, ו (3) סמלים מתמטיים. התגובות של בן לשאלות לא היו בלתי שגרתיות. משתתפים אחרים הגיבו לרוב באופן דומה. עם זאת, תגובותיו של בן לפעילויות שעסקו בפתרון בעיות מצביעות בבירור על האופי המורכב של הבנת שברים בקרב ילדים צעירים.

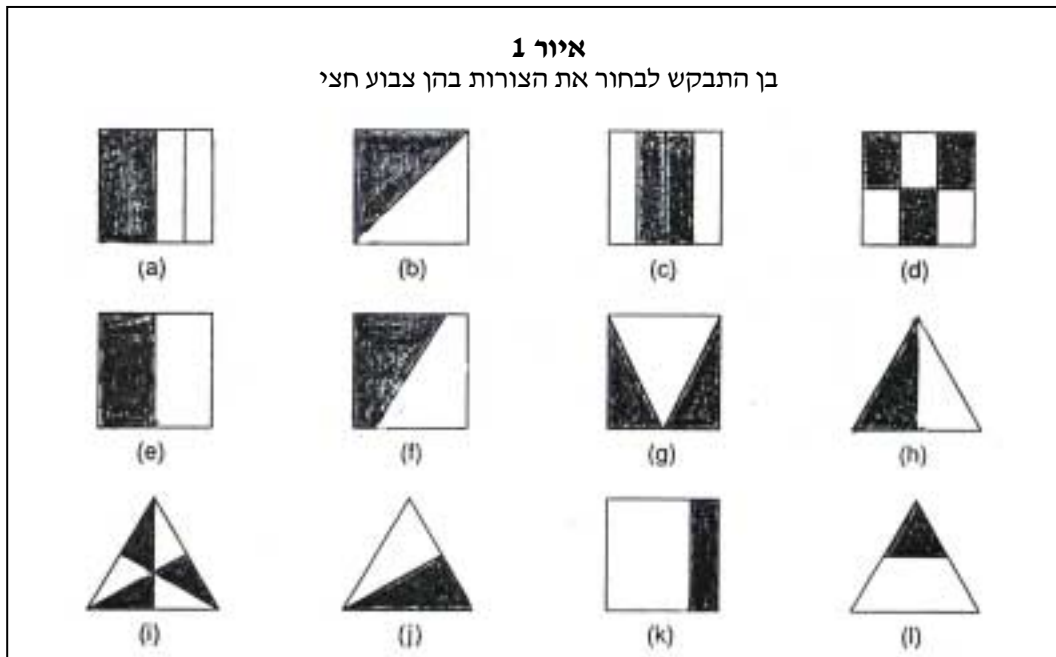
משימה 1: צורות בהן צבוע חצי

משימה זו דומה לבעיות שמופיעות בספרי לימוד טיפוסיים לבית הספר היסודי. בן התבקש להתבונן בשתיים עשרה תמונות של צורות על גבי כרטיסים שהונחו לפניו על השולחן בסדר אקראי (ראה איור 1). לאחר מכן הוא התבקש לבחור את הצורות שבהן צבוע חצי. בתחילה בחר בן את הכרטיסים (h), (e), (c), ו- (a), בסדר הזה, ואמר, "אין יותר". כאשר המראיין אמר: "אם כך, באלו צבוע חצי ו...?", בן התפרץ ובחר את (f). כאשר נשאל אם יש עוד, הוא המשיך ובחר את (d) ואת (b). לאחר מכן התבקש בן להסביר כיצד ידע שבצורות אלו צבוע חצי. הוא הסביר שב (d) צבוע חצי מכיוון ש "יש לך אחד, שניים, שלושה ריבועים [כשהוא מצביע על האזורים הצבועים], ויש לך אחד, שניים, שלושה ריבועים [כשהוא מצביע על האזורים הלבנים]. בזה צבוע חצי (h) מכיוון שאתה חותך את המשולש לחצי ומכסה את זה" [כשהוא מצביע על האזור הצבוע]. כאשר בן התחיל להסביר על (f), הוא החליט שבו לא צבוע חצי משום ש "יש יותר מדי בצד הזה" [החלק העליון של האזור הצבוע].

1

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1996 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

לאחר מכן הוא התבקש להסביר מדוע בצורות האחרות לא צבוע חצי. כאשר התחיל בן להסביר, הוא שם לב שגם ב (i) וגם ב (j) צבוע חצי. אם כך, בסך הכל, הוא הצליח לזהות שמונה מתוך עשר הצורות שבהן היה צבוע חצי.



משימה 2: בחירת ה"עוגייה" הגדולה ביותר

משימה זו ניתנה על מנת להעמיק את הבדיקה של הבנת החצי אצל בן על ידי קישור בין רעיון לבין מצב שכיח אצל ילדים צעירים - בחירת העוגיה הגדולה ביותר. לפני בן הונח ריבוע מנייר בגודל של כ- 10 ס"מ על 10 ס"מ. לאחר מכן הראו לו כל אחת מן הצורות המופיעות באיור 2, כאשר המראיין מניח שני עותקים של צורת החצי ואומר: "שני אלו ביחד יוצרים את הריבוע הזה". לאחר שהראו לו את כל שלושת הצורות, קיבל בן עותק אחד מכל צורה של חצי, שהוא החלק הצבוע של כל אחת מן הצורות שבאיור 2.



בן התבקש כעת לדמיין שהצורות החתוכות הללו הן העוגיות החביבות עליו, המופיעות בצורות שונות. המראיין שאל: "אם צורות אלו היו עוגיות ויכולת לקבל רק אחת מהן, איזו מהן היית בוחר?"

בוחר? לאחר השתהות קצרה, בחר בן את צורת המשולש, (a). כאשר המראיין שאל אותו מדוע, הוא אמר שהיא הגדולה מן השלוש. כאשר התבקש להסביר יותר, הוא הניח את צורת המשולש (a) על גבי צורת הטרפז, (c) (ראה איור 3) וציין שצורת המשולש גדולה יותר. לאחר מכן הניח את הצורות בצד. כאשר המראיין ביקש מבן להבהיר את ההסבר שלו, הוא לקח שוב את שתי הצורות והניח אחת על גבי השנייה, אך הפעם הוא כיוון את שתי הצורות באופן שונה (ראה איור 4).



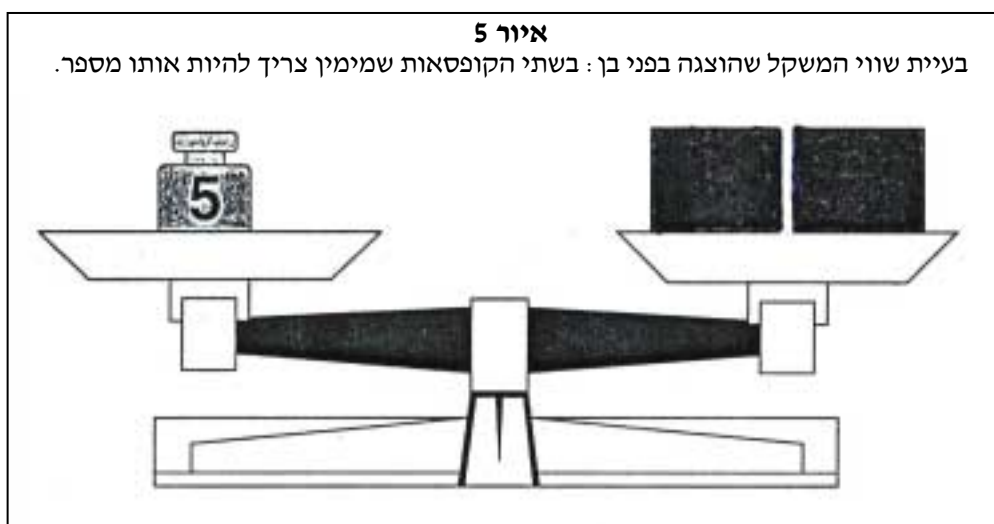
לאחר מכן הסביר בן שצורת המשולש גדולה יותר משום שחלק גדול יותר ממנה בולט מחוץ לצורת הטרפז (ראה האזור הצבוע באיור 4). כאשר המראיין ציין שלצורת הטרפז "יש יותר למטה", נראה בן נבוך, שינה את דעתו והחליט שהיה רוצה את הצורה המלבנית משום שהיא יותר "שמנה". יחד עם זאת, הוא מיד הכחיש תשובה זו כאשר אמר לעצמו: "לא, זה לא". לאחר מכן הוא דמיין שהוא אוכל את "עוגיות" האלה. תחילה הוא החזיק את הצורה המלבנית ביד והעמיד פנים כאילו הוא נוגס ממנה. לאחר ש"סיים לאכול", הוא ספר את מספר הנגיסות שלקח. הוא חזר על תהליך זה בשתי הצורות האחרות והגיע למסקנה שצורת המשולש היא הגדולה ביותר. המראיין הזכיר לבן ששני עותקים של כל צורה יוצרים ביחד אותו ריבוע בדיוק, ובן אמר שהוא זוכר זאת. יחד עם זאת, הוא דחה מידע זה וסיווג אותו כלא רלבנטי לפתרון הבעיה.

משימה 3: חקירת סמלים

משימה זו בדקה את ההשפעה של סמלים מתמטיים. בכיתתו של בן עסקו לעיתים קרובות במשימות "שיווי-משקל", שבהן היו קופסאות בעלות משקל לא ידוע, שהילדים כינו "קופסאות מסתוריות". כאשר הופיעו בבעיה יותר מקופסא אחת שגודלן וצורתן היו זהים, היה ברור שלקופסאות אלו יש משקל או מספר זהה. בן התבקש לחקור את בעיית שווי המשקל המופיעה באיור 5. מיד לאחר שהוצגה בפניו בעיה זו, נשאל בן כמה עוגיות יהיו לו אם יחלק חמש עוגיות שווה בשווה בינו ובין חברו הטוב, ג'רמי. הוא ענה: "אני אתן לו אחת, לי אחת, לי אחת, ואשבור עוגייה אחת לחצי". תגובה זו מראה שלבן היתה תפיסה די טובה לגבי החצי ככמות. יחד עם זאת, כאשר קיבל את משימת שווי המשקל התרחשה השיחה הבאה בין בן (ב) לבין המראיין (מ):

- (ב) "זוהי קופסה מסתורית?"
- (מ) "אהה" (הנהון בראש). "והצד הזה הוא 5".
- (ב) "א... כן, אחד וחמש הם שש". (הפסקה) "רגע. אני לא תופס את זה". (הפסקה) "איך זאת יכולה להיות קופסא מסתורית?"
- (מ) "למה לא?"
- (ב) "אין כזה... אין כזה מספר שיהיה קופסא מסתורית".
- (מ) "בסדר. אבל אם נחזור לכאן" (מצביע על דף הנייר שבן השתמש בו על מנת לפתור את בעיית החלוקה), "כשהיו לך חמש עוגיות וחילקת אותן בינד ובין ג'רמי, כמה כל אחד קיבל?"
- (ב) "א..."
- (מ) "כמה אמרת שכל אחד מכם יקבל?"
- (ב) "אני חושב... זה יהיה שש".
- (מ) "למה אתה מתכוון, שש?"
- (ב) "משום שחמש ואחד הם שש".

בן מבין שאפשר לשבור עוגייה לשני חצאים, אבל לא את המספר 5. כמו כן ברור, בהסתמך על תצפיות במשימות אחרות, שבן מסוגל לשבור 5 ל-2 ו-3 או ל-1 ו-4, אבל לא לשני מספרים שווים.



דיון ויישום לעבודה בכיתה

מה מגלות לנו תצפיות אלו על הבנה של ילדים את השבר חצי? ראשית, כבר צוין על ידי חוקרים אחרים שילדים מבינים שברים בדרכים מגוונות. יחד עם זאת, גם אותו ילד יכול להבין שברים כמו חצי בדרכים מגוונות. ההבנה של בן לגבי צורות שבהן צבוע חצי והאופן בו חילק חמש עוגיות מעידים על כך שהמחשבה שלו קונקרטית ותלויה הקשר. יחד עם זאת, חצי בהקשר אחד אינו בהכרח קשור לחצי בהקשר אחר, כפי שמעידות תגובותיו במשימה 2.

שנית, נראה שההבנה הראשונית של ילדים את החצי מבוססת על פעילויותיהם הפיזיות. לאורך כל הראיונות, בן השתמש במילה "חצי" ביחד עם מילות פעולה כמו "לשבור אחד לחצי", "לחלק את זה

לחציי" וכך הלאה. לעיתים קרובות הוא השתמש בתנועות ידיים כדי להמחיש את ביצוע הפעולות שחשב עליהן. למרות שהבנה כזאת אולי אינה מספקת מנקודת המבט של שברים כמספרים, הרי שחיוני לאפשר לילדים לפתח ולהתנסות במשמעויות של השבר חצי, המבוססות על פעולות שהם עושים.

שלישית, התצפית מאשרת את הצורך בריבוי משימות כאשר אנו מעריכים את ההבנה המתמטית של ילדים (NCTM 1989). כאשר אנו מתבוננים בתגובות של בן למשימה 1 ולבעיית העוגייה, אנו מתפתים להסיק שבן **מבין** את החצי. תצפיות אלו נעשו על בסיס של ראיונות אישיים, שהינם דרך אלטרנטיבית מומלצת להערכה. יחד עם זאת, התוצאה של ראיון כזה עדיין מוגבלת, אלא אם כן משתמשים במגוון של משימות במהלך הראיון. לא רק הדרך שבה נעשית ההערכה, אלא גם התכנים הינם בעלי חשיבות. שיטת הערכה טובה היא חסרת תועלת, אלא אם כן המשימות הולמות. יתר על כן, המטרה של הערכה כזו איננה לשפוט האם התלמידים מבינים את מושגי השבר. במקום זה, היא צריכה להסביר **איך** ילדים מבינים שברים. ידע על שברים איננו דבר שילדים רוכשים, אלא הוא בסיס מידע המשתנה כל הזמן ומתבגר עם הניסיון. ילדים משכללים ללא הרף את הבנת השברים שלהם.

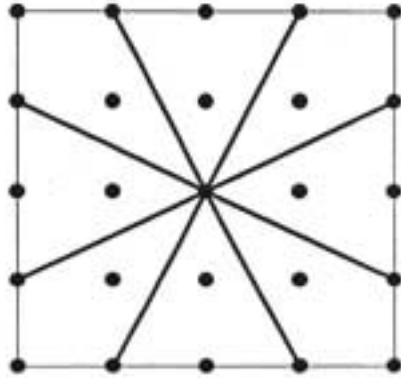
רביעית, בן היה מסוגל לפתח את הבנתו לגבי החצי ללא הסמלה פורמלית. למעשה, לא נראה שההסמלה הפורמלית היתה עוזרת לו לפתח הבנות מופשטות יותר של החצי. להיפך, ממצאי המחקר הקיימים (למשל, Carey 1992) גורסים שהצגה בטרם עת של סמלים פורמליים מפריעה להתפתחות המושגית של הילדים. הידיעה על שברים כמספרים הינה מאוד מופשטת ומאוד מורכבת, וההתפתחות שלה אורכת זמן. הסמלים הפורמליים של השברים אינם כלים מועילים בתהליך זה.

לבסוף, הידיעה של בן על שטח, הנמצאת עדיין בשלבי התפתחות, השפיעה על הבנתו את החצי. שתי הצורות שהתקשה לזהות כחצי צבועות במשימה 1, (f) ו (g) באיור 1, הכילו חלוקה לא שגרתית שאינה מופיעה על פי רוב בספרי הלימוד. על מנת לקבוע אם בצורות אלו צבוע חצי, נדרשת הבנה מורכבת יותר של שטח מזו שהיתה לבן באותה העת. יחד עם זאת, בן היה מסוגל לזהות את (c), (d), ו (i) באיור 1 על ידי צמצומן לבעיות של ספירת חלקים, ובכך להימנע מהצורך בידע מורכב של שטח. הבנתו המוגבלת לגבי שטח באה גם לידי ביטוי כאשר ניסה לזהות את החתיכה הגדולה ביותר במשימה 2. כאשר העמיד פנים שהוא נוגס מן החתיכות, הוא לא קלט שהגודל של הנגיסות אינו אחיד. ההבנה השגויה שלו אינה מפתיעה, מאחר שבמרבית ספרי הלימוד הטיפוסיים משתמשים בשרטוטים שבהם השלם מחולק לחלקים שווים, גישה שאינה דורשת מן התלמידים לשים לב לשטח של כל חלק.

המודלים המשמשים להוראת שברים צריכים להביא בחשבון את הידע המתפתח של הילדים על שטח. לדוגמא: ילדים צעירים רבים אינם מאמינים שהשטח נשאר קבוע כאשר חותכים צורה ומסדרים אותה מחדש כך שמתקבלת צורה אחרת. השקפה כזו נכונה במיוחד בקרב ילדים צעירים, אבל גם תלמידים מבוגרים יותר אינם מחוסנים מפני קושי כזה. מספר גדול של מורים שהשתתפו בקורס למתודיקה של הוראת המתמטיקה ביסודי, האמינו שהחלוקה המופיעה באיור 6 אינה מראה שמיניות, מכיוון שהם האמינו שהחלקים אינם זהים בגודלם. אולם למעשה, השטח של כל אחד משמונה החלקים הינו 2 יחידות ריבועיות.

איור 6

מספר רב של פרחי הוראה אמרו שלוח המסמרים אינו מחולק לשמיניות משום שהם חשבו שהחלקים אינם שווים בגודלם.



מסקנה

ילדים צעירים חווים את השבר חצי בדרכים מגוונות בחיי היומיום שלהם. מבוגרים משתמשים במילה **חצי** לעיתים מזומנות כאשר הם מתקשרים עם ילדים. באמצעות חוויות כאלו, מפתחים ילדים את המשמעות האישית שלהם ל-חצי. עם זאת, מכיוון שהמושג והמילה מופיעים לעיתים קרובות בחיי היומיום של הילדים, נדרשת תשומת לב זהירה ושיטתית כאשר באים להעריך את המושגים שלהם על חצי. הערכות נמהרות לגבי הבנתם של ילדים את השבר, עלולות להוביל לקשיים משמעותיים בשלבים מאוחרים יותר של הלמידה המתמטית שלהם.

ביבליוגרפיה

- Bigelow, John Christopher, Gary Ernest Davis, and Robert Paul Hunting. "Some Remarks on the Homology and Dynamics of Rational Number Learning." Paper presented at the Research Pre-session of the Sixth-Seventh Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics. Orlando, April, 1989.
- Carey, Deborah A. "Students' Use of Symbols". *Arithmetic Teacher* 40 (November 1992): 184-186.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: The Council, 1989.
- Wheatley, Grayson H. "Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning". *Science Education* 75 (January 1991): 9-21.