

דעות שיש לילדים צעירים על צורות גיאומטריות

Young Children's Ideas about Geometric Shapes

מאת : Douglas H. Clements and Julie Sarama

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 6 , No. 8 , April 2000 , pp. 482-488

תרגום : ברכה סגליס



פעוט מכניס, לאחר מספר ניסיונות, גוף בצורת קובייה לתוך חריץ בצורת ריבוע. איזה ידע יש לו על צורות? איזה ידע נוסף בנושא זה ירכוש בגן ובבית הספר היסודי? מה הוא עשוי ללמוד?

מחנכים למדו רבות אודות הידע שיש לילדים צעירים בנושא צורות. רובו מפתיע ביותר. במאמר זה אנו מתארים מחקרים שנעשו אודות החשיבה של ילדים צעירים בנושא צורות גיאומטריות ומציינים את ההשלכות ממחקרים אלו על הוראה ועל למידה.

מה יודעים ילדים צעירים על צורות?

רמות ההבנה הגיאומטרית של ילדים

החשיבה של ילדים על צורות משתנה ככל שהם מתפתחים.

ברמה של קדם-הכרה (Prerecognition level), ילדים קולטים צורות, אך אינם מסוגלים לזהות או לעשות הבחנה בין צורות רבות. לעיתים קרובות הם מצירים את אותו קו עקום כאשר הם מעתיקים עיגולים, ריבועים או משולשים (Clements and Battista 1992b).

ברמה השנייה הוויזואלית (Visual level), ילדים מזהים צורות על פי מראן (Clements and Battista 1992b, Van Hiele 1959/1985). לדוגמא: הם עשויים להגיד על צורה ש"היא מלבן בגלל שהיא נראית כמו דלת".

ברמה התיאורית (Descriptive level), ילדים מזהים צורות ומסוגלים לאפיין אותן על פי התכונות שלהן. למשל, תלמיד יכול לחשוב על מלבן כעל צורה שיש לה שני זוגות של צלעות שוות וכל הזוויות

שלה ישירות. מכיוון שההתקדמות ברמות החשיבה של הילדים תלויה בחינוך שקיבלו, ילדים עשויים להגיע לרמה זו רק בחטיבת הביניים.. ויתכן שלא לפני שסיימו את ביה"ס התיכון!

ילדים ברמות שונות חושבים על צורות בדרכים שונות, והם מפרשים מילים כמו **ריבוע** במשמעויות שונות. הילד החושב ברמה של קדם-הכרה, יכול לפרש כריבוע רק את הצורה האב-טיפוסית המוצגת במאוזן. לילד החושב ברמה הוויזואלית, ריבועים יכולים להיות מגוון של צורות "שנראות כמו משבצת מושלמת" ללא קשר לאופן שבו מסובבים אותן. לחושב ברמה התיאורית, ריבוע צריך להיות צורה סגורה בעלת ארבע צלעות שוות וארבע זוויות ישרות. אבל גם ילד זה אינו רואה את הקשר שבין הריבוע למשפחת המרובעים, כפי שמבינים ילדים הנמצאים ברמות החשיבה הגבוהות יותר. רמות אלו יכולות לעזור לנו להבין כיצד ילדים חושבים על צורות. נוכל בעזרתן לזכור לשאול את עצמנו מה הילדים **רואים** כאשר הם מתבוננים בצורה. כאשר אנו אומרים להם "ריבוע", הם עשויים להסכים איתנו ביחס למקרים טיפוסיים רבים, ויחד עם זאת להתכוון למשהו שונה מאוד. רמות אלו יכולות גם להדריך מורים בבחירת הזדמנויות למידה מתאימות לתלמידים.

דעות שיש לילדים על צורות נפוצות

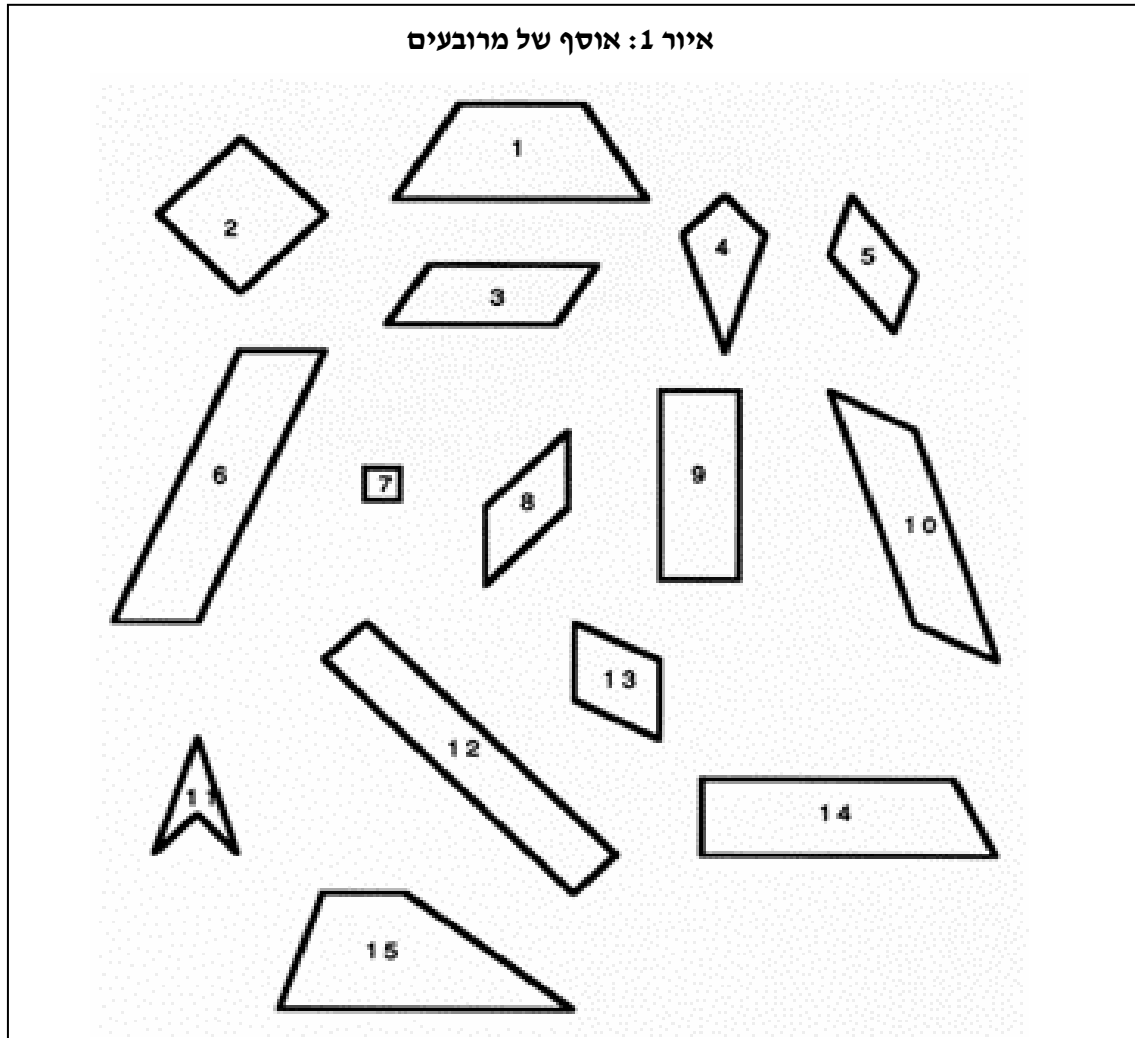
לילדים צעירים ישנן דעות רבות על צורות נפוצות. אולם ידיעת הרמות בלבד, אינה מספקת למורים את הפירוט הנדרש. לאור זאת, ערכנו מספר מחקרים אודות הדעות שיש לילדים צעירים על צורות, שיסייעו לנו להשלים את התמונה (Clements et al. 1999; Hannibal 1999). במסגרת מחקרים אלו, ראינו 128 ילדים בגילאים 3 עד 6, במהלך מספר מפגשים בני שעה. הילדים התבקשו לזהות צורות מתוך אוסף של צורות מצוירות על דף ומתוך אוסף של צורות חתוכות מעץ. הצורות הוצגו לילדים באופנים שונים. למשל, לפעמים אפשרנו לילדים לחוש את הצורות ביד, ולפעמים ביקשנו מהם לזהות את הצורות שהיו מקובעות בתנוחות שונות בתוך מסגרת מלבנית או חישוב עגול. אנו מתארים כאן את המסקנות בעקבות ראיונות אלו בנוגע לצורות הבסיסיות.

עיגולים. ילדים מזהים עיגולים באופן מדויק, אם כי ילדים מתחת לגיל 6 נוטים יותר להצביע על אליפסות כמייצגות עיגולים. פרט לאותם מקרים לא שכיחים (רק 4 אחוז טעויות במשימה שלנו שניתנה על דף), יכולות המורות לגיל הרך להניח שמרבית הילדים יודעים משהו אודות עיגולים.

ריבועים. ילדים צעירים מדייקים בזיהוי ריבועים כמעט באותה מידה שהם מזהים עיגולים (87 אחוז תשובות נכונות במשימה שניתנה על דף), אם כי ילדי גן נוטים לכנות בשם "ריבוע" גם מעוינים שאינם ריבועים. יחד עם זאת, ילדים אלו דייקו באותה מידה כמו ילדים גדולים יותר בכינוי ריבועים שהיו "מוטים".

משולשים. ילדים צעירים מדייקים פחות בזיהוי משולשים (60 אחוז תשובות נכונות). הם עשויים לקבל צורות שנראות כמשולש גם אם הצלעות קמורות ולדחות משולשים שהם יותר מדי "ארוכים", "כפופים" או "אין להם חוד למעלה". ישנם ילדים בני שלוש שמתייחסים לכל צורה שיש לה "חוד" כאל משולש.

מלבנים. גם כאן מידת הדיוק של ילדים הינה נמוכה (54 אחוז). ילדים נוטים לקבל מקביליות "ארוכות" או טרפזים ישרי זווית כמלבנים (ראה איור 1: צורות 3, 6, 10 ו-14). כתוצאה מכך נראה שהדימוי שיש לילדים על מלבן הוא, שזאת צורה בעלת ארבע צלעות עם שני צדדים מקבילים ארוכים ופינות "קרובות" לזווית ישרה. נראה שרק למספר מועט של בני שלוש וארבע אין כלל דעות או דימויים של מלבנים או של משולשים.



המחשבות המפתיעות שיש לילדים אודות צורות

התרשמנו מאוד מהדברים הרבים שילדים בגיל הרך ידעו על צורות, אך יחד עם זאת היו ממצאים שהפתיעו אותנו.

מעט מאוד שינויים

הופתענו לגלות כמה מעט לומדים ילדים על צורות מתקופת הגיל הרך ועד תקופת סוף בית הספר היסודי. למשל, ילדי הגיל הרך במחקרנו זיהו נכון כ- 60 אחוז מן המשולשים. במחקר נרחב שנערך בקרב תלמידי בתי ספר יסודיים לגבי ביצוע אותה משימה, נעו הציונים מ- 64 אחוז אצל ילדי גן

ל- 81 אחוז אצל ילדי כיתה ו' (Clements and Battista 1992a). באופן דומה, אחוז התשובות הנכונות בנוגע למלבנים אצל ילדי הגיל הרך היה 54, ואילו אצל תלמידי בית הספר היסודי הוא נע בין 63 ל- 68. למרות שכמעט שמונה שנים הפרידו בין קבוצות אלו, הציונים **באותן משימות** עלו במידה מזערית. היינו מצפים מעצמנו "לעשות עבודה טובה יותר" בהוראת הגיאומטריה בכל שנה.

שינויים אינדיבידואליים יכולים להיות בולטים ביותר

אחד מהילדים בני השש במחקר שלנו, בחר מלבנים באופן אקראי ותאר אותם כ"מחודדים". לעומת זאת, אחד מהילדים בני השלוש גבר על כל בני השש במשימה של המלבנים. הזדמנויות טובות ללמידה הינן חשובות יותר מרמה התפתחותית כאשר מדובר בלימוד צורות בקרב ילדים.

בהנתן להם הזדמנויות טובות, ילדים מעלים בעיות ופותרים אותן באופן מעניין אחת המורות במחקר שלנו הציעה לילדי הגן שלה ליצור צורות שונות בעזרת הגוף שלהם. שני ילדים ניסו ליצור מעוין. הם התיישבו על הרצפה זה מול זה ופישקו את רגליהם. כאשר הצמידו את כפות רגליהם זה לזה הם יצרו מעוין נכון. אחד הילדים שצפה בהם אמר ש"אם נשים עוד ילד באמצע, נעשה מזה שני משולשים". הילדים בחרו מיד בריי, משום שהיה הילד הקטן ביותר, וביקשו ממנו לשכב במכוון באמצע הצורה שיצרו. הילדים הציעו בעצמם בעיות של פירוק צורות ותכננו בעצמם את הפתרונות לבעיות.

מחשבים יכולים להסיר מגבלות המקשות על ילדים ליצור בעזרת צורות. למשל, ילדת גן בשם תמי, הפעילה תוכנת מחשב שהכילה אוסף צורות קבוע. היא הניחה שני משולשים חופפים על ריבוע אחד וצבעה חלקים מן הציור שהתקבל. כתוצאה ממהלך זה נוצר בציור משולש שלישי מסוג שלא היה קיים בתוכנה!

מחשבים יכולים גם להיות עזרי למידה רבי עוצמה וגמישות (Clements and McMillen 1996). למשל, הילד מיכאל רצה ליצור משולשים בעזרת המשולשים של מערכת "צורות הפלא". הוא התחיל במשימתו מבלי להסתייע במחשב ועבד בשיטה של ניסוי וטעייה, כשהוא מונה את הצלעות ובודק לאחר שהוא מוסיף כל משולש. לעומת זאת, כאשר השתמש בתוכנת המחשב "צורות" הוא **התחיל** בתכנון (Sarama, Clements, and Vukelic 1996). תחילה הוא הניח שני משולשים, תוך גרירה וסיבוב בעזרת כלי התוכנה. לאחר מכן הוא מנה בעזרת האצבע סביב מרכז המשושה הלא גמור, כשהוא מדמיינ את המשולשים האחרים. "עוד ארבעה!" הוא הכריז בפליאה. לאחר שהניח את המשולש הבא, אמר: "עוד שלושה!" בעוד שללא המחשב, מיכאל היה צריך לבדוק כל משולש שהניח ביחס למשושה מוכן, הרי שפעולותיו המתוכננות והמכוונות על המחשב הובילו אותו ליצירת דימויים מנטליים. כלומר הוא פירק את המשושה בדמיונו ושיער היכן יהיה מקומו של כל משולש.

מה יוצר קשיים אצל ילדים?

סידורים שונים, החלטות שונות

סידורים מיוחדים של הצורות משפיעים על החלטות הילדים. בסידור הראשון שלנו כללנו "לא-דוגמאות" ברורות, כמו עיגולים, ביחד עם קבוצה של צורות משולשים. הילדים הסכימו לקבל יותר סוגים של משולשים ויותר צורות "מחודדות" שלא היו משולשים. באופן דומה, ילדים נטו לקבל יותר צורות סגולות (אובליות) כעיגולים כאשר הצורות היו מצוירות אחת בתוך השנייה. לפיכך, מה שילדים בוחרים מושפע במידה רבה מהצורות שאותן הם משווים. בסידור השני שלנו הנחנו את צורות העץ בתוך חישוק. במצב זה ילדים נטו פחות להבחין או להיות מוטרדים מכך שהצורות "ארוכות" או "הפוכות". כלומר אי קיומה של מסגרת התייחסות מלבנית השפיעה על הצורות שהילדים בחרו. בסידור השלישי ביקשנו מהילדים להצדיק את הבחירות שלהם. זה גרם להם לשנות לעיתים קרובות את החלטותיהם ולרוב גרם להם לבחור בתשובה הנכונה. למשל, ילדה אחת בת חמש העלתה את הציון שלה ב-26 אחוז כאשר נתבקשה להסביר את הבחירות שלה.

הבנה מוגבלת של התכונות

למרות ששיחה על הצורות לעיתים קרובות עזרה, הרי שלידע של ילדים יש על פי רוב גבולות. ילדים בני ארבע ציינו הרבה פעמים שלמשולשים יש "שלושה חודים" או "שלוש צלעות". יחד עם זאת, מחציתם לא היו בטוחים מה זה "חוד" או "צלע" (Clements 1987). למשל, תלמידה התבקשה לעמוד על ציור של משולש מתוך אוסף של צורות שקווי המתאר שלהן צוירו בעזרת סרטי הדבקה על הרצפה. התלמידה נעמדה מיד על המשולש והסבירה ש"יש לו שלוש צלעות ושלוש זוויות". כאשר נשאלה למה התכוונה כשאמרה שלוש זוויות, ענתה: "אני לא יודעת".

מה המורים יכולים לעשות על מנת לעזור?

לתשובות התלמידים המתוארות כאן יש השלכות רבות על הוראת הגיאומטריה. המשך המאמר כולל הצעות המבוססות על מחקרים, לשיפור ההוראה של צורות בסיסיות ולקידום ההבנה של ילדים לגבי צורות אלו.

שקלו מחדש הוראת "צורות בסיסיות" רק באמצעות דוגמאות

כאשר אנו חוזרים ומציגים לילדים ריבועים ומלבנים להשוואה, האם אנחנו מצליחים לשכנע אותם בהפרדה ביניהם? האם הצגת דוגמאות של צורות כדרך הוראה עיקרית, אינה גורמת לעיתים להיווצרות רעיונות נוקשים מיותרים?

באחד המחקרים (Kay 1987), מורה של כיתה א' התחילה בהצגת הקבוצה הכוללת: מרובעים, או צורות עם ארבע צלעות. לאחר מכן היא הציגה את המלבנים כמרובעים מיוחדים ואת הריבועים

כמלבנים מיוחדים. כלומר היא שוחחה על התכונות של כל קבוצת צורות ועל היחסים ביניהם - למשל, המלבן הוא סוג מיוחד של מרובע. היא השתמשה בביטויים לא פורמליים ששיקפו יחסים אלו - למשל, ש"זה מלבן ריבועי". בסיום ההוראה מרבית תלמידיה ידעו לזהות תכונות של מרובעים, מלבנים וריבועים וכמחצית מהם זיהו את היחסים ההיררכיים שבין קבוצות אלו, למרות שאיש מהם לא עשה זאת קודם. מורה זו הגיעה למסקנה שהדרך המקובלת של הוראה בעזרת דוגמאות מתאימה רק לצורות שיש להן מעט דוגמאות, כמו עיגולים ואולי גם ריבועים. לגבי צורות אחרות, במיוחד לגבי קבוצות היררכיות כמו משולשים ומרובעים, גישה זו בלבד אינה מתאימה. ניתן לשאול מה היתה מידת הבנתם של ילדי כיתה א' זו את היחסים ההיררכיים (Clements and Battista 1992b). מאידך, באותה מידה נוכל לשאול מה התועלת בגישה המסורתית המסתמכת על הצגת דוגמאות, אם היא עלולה ליצור תשתית שנצטרך בהמשך להפריך כשנרצה לפתח חשיבה גיאומטרית היררכית המבוססת על יחסים מופשטים.

תנו לילדים אשראי על מה שהם יודעים

למרבות הילדים יש דעות רבות על צורות בהגיעם לגן. למרות זאת המורות אינן מבקשות מן הילדים להרחיב את הרעיונות שלהם. באחד המחקרים (Thomas 1982) כמעט שני שלישי מהאינטראקציה בזמן ההוראה של המורות עסקה בדרישה מהילדים לחזור כמו תוכים על מה שהם כבר יודעים, בסגנון הוראה החוזר על עצמו, כמו זה שלהלן:

מורה: "האם תוכלו לומר לנו איזו צורה זו?"

ילדים: "ריבוע"

מורה: "נכון, זה ריבוע".

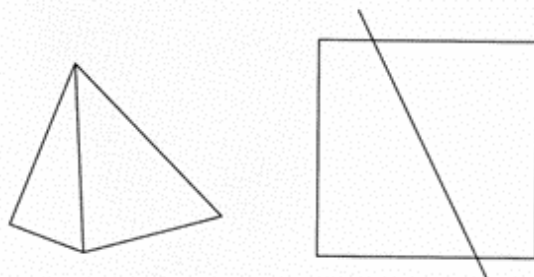
רוב השאלות שהמורות שאלו היו שאלות סגורות ועסקו רק בזכירה. ילדים מעטים שאלו שאלות, אך כשעשו זאת, המורה הגיבה בשתיקה. במקום זאת, המורות צריכות לבנות את ההוראה שלהן על מה שהילדים יודעים ולפתח דיונים עשירים.

הימנעו מהבנות שגויות נפוצות

במחקר של Thomas (1982) רוב המורות לא הוסיפו תוכן חדש. אולם כאשר הן כן עשו זאת, ההיגדים שנתנו היו לעיתים קרובות שגויים, כמו לומר: "כל המעוינים הם ריבועים" או כמו לומר לילד שבוחר מלבן שהוא ריבוע: "לא! מצא צורה שהיא מלבן". היגדים בלתי מועילים אחרים היו ש"כאשר מחברים שני משולשים תמיד מקבלים ריבוע" וש"ריבוע שחותכים אותו לחצי תמיד נותן שני משולשים". (באיור 2 תמצאו דוגמאות נגדיות לכך).

איור 2: משולשים וריבועים

כאשר מחברים שני משולשים לא תמיד מקבלים ריבוע וניתן לחתוך ריבוע לחצי בדרכים שונות



הרחיבו את המושגים המצומצמים שלעיתים קרובות מדי "מלמדים" בכל מקום, כך נראה, אנו מוקפים ברעיונות גיאומטריים לא מוצלחים! כחלק מהמחקר שלנו, בדקנו מקרוב חנויות צעצועים, חנויות של עזרי הוראה וקטלוגים של חומרים על "צורות". למעט כמה יוצאים מן הכלל, חומרים אלו מציגים לילדים רק את "הדוגמאות הטובות ביותר" של משולשים, מלבנים וריבועים. מרבית המשולשים הם שווי-שוקיים או שווי-צלעות בעלי בסיס מאוזן. מרבית המלבנים הם מאוזנים או מאונכים בעלי אורך הגדול פי שניים או פי שלושה מן הרחב. למרבית הריבועים יש בסיסים מאוזנים.

גם חומרי הלמידה מוגבלים בדרך כלל. לדוגמא: לאה עסקה בתוכנת מחשב שבה נתבקשה לבחור דגים מצורות מסוימות. כאשר נתבקשה לבחור דג ריבועי, היא בחרה דג שגופו הריבועי היה נטוי ב-45 מעלות. התוכנה הודיעה לה שהיא טועה וקבעה שזהו "דג מעויך"!
עזרו לילדים להשתחרר ממגבלות אלו על ידי שימוש במגוון רחב של דוגמאות טובות ו"לא-דוגמאות". על מנת לעשות זאת, נסו את הרעיונות הבאים:

- שנו את הגודל, את סוג החומר ואת הצבע של הדוגמאות. לגבי מלבנים ומשולשים, שנו את זווית ההטיה שלהם ואת הממדים, כמו המלבנים המופיעים באיור 1. לגבי משולשים: שנו גם את הסוג, וכללו גם משולשים שוני-צלעות (כל צלע שונה באורכה מן האחרות) ומשולשים קהי זווית (אחת הזוויות גדולה מ-90 מעלות).
 - השוו דוגמאות עם "לא-דוגמאות" על מנת למקד את תשומת לבם של הילדים למרכיבים החיוניים של הצורה (ראו איור 3).
 - עודדו את הילדים לשנות את הצורות באופן דינמי. למשל, ישנן תוכנות מחשב המאפשרות לילדים לפעול על הצורה, כמו למשל משולש שווה-שוקיים, בדרכים שונות, ויחד עם זאת הצורה תמיד נשארת משולש שווה-שוקיים. (ראו איורים 4א, 4ב, ו-4ג).
- (הערת המתרגמת: הלומדה "המשער הגיאומטרי" בהוצאת מט"ח, בגרסתה החדשה, מאפשרת לעשות שנויים דינמיים בצורות, בדומה למתואר כאן).

התאמת פעילויות לרמות החשיבה של ילדים על צורות

ילדים ברמה הקדם-הכרתית יעבדו טוב ביותר עם צורות בעולם סביבם. עזרו לילדים אלה להבין מה מתוך תכונות הצורה הוא רלבנטי ומה לא רלבנטי (כמו למשל, הטיה, גודל וצבע), בעזרת פעילויות כדוגמת הבאות:

- זיהוי צורות בחדר הכיתה, בבית הספר ובקהילה.
- מיון צורות ומתן הסבר מדוע לדעתם הצורה שייכת לקבוצה מסוימת.
- העתקה ובנייה של צורות תוך שימוש במגוון רחב של חומרים.

ילדים המצויים ברמה הוויזואלית יכולים גם למדוד, לצבוע, לקפל ולגזור צורות על מנת לזהות את התכונות שלהן. לדוגמא, הם יכולים, למשל, לעסוק בפעילויות הבאות:

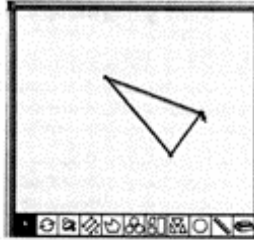
- מתן הסבר מדוע הצורה שייכת או לא שייכת לקטגוריה מסוימת של צורות.
- קיפול ריבוע או מעוין בדרכים שונות על מנת לקבוע את הסימטריות שלו ואת השוויון של זוויותיו ושל צלעותיו.
- יצירת צורות בעזרת תוכנת לוגו (גיאומטרית "הצב"), שעוזרת לילדים להגיע לצורות מתוך עשייה באמצעות פקודות מתמטיות מדויקות ומדידות או מאפשרת להם לתת פקודות ל"ילד-צב", שהולך לאורך המסלול כפי שהתבקש ויוצר באופן כזה את הצורה.
- שימוש ב"בודק זוויות ישרות" למציאת זוויות בחדר הכיתה השוות לזווית ישרה, גדולות ממנה או קטנות ממנה.
- שימוש במחשבים למציאת דרכים חדשות לפעול על צורות (איור 5א) וליצור צורות (איור 5ב),

(Clements and Meredith 1998).

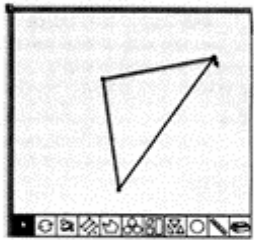
- עריכת דיונים על קבוצות כלליות כמו מרובעים או "צורות בעלות ארבע צלעות" או משולשים, מניית מספר הצלעות של צורות שונות על מנת להחליט לאיזו קבוצה הן שייכות.

**איור 4 – פעילות על צורה מסוג מסוים
בתוכנה Math Van**

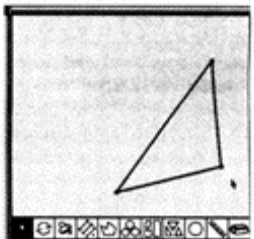
תוכנה זו מאפשרת לילדים לצייר ולפעול על צורה מסוג מסוים. כאן הם הגדירו משולש שווה-שוקיים. ילדים יכולים להזיז, לסובב, להפוך ואפילו לעוות את המשולש, אך בכל מקרה הוא יישאר משולש שווה-שוקיים.



(a)



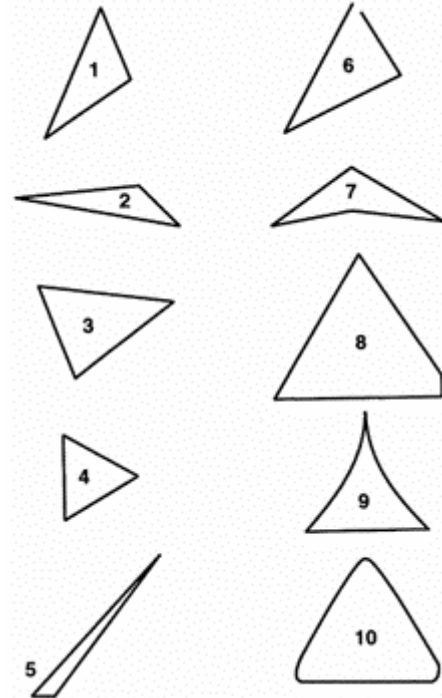
(b)



(c)

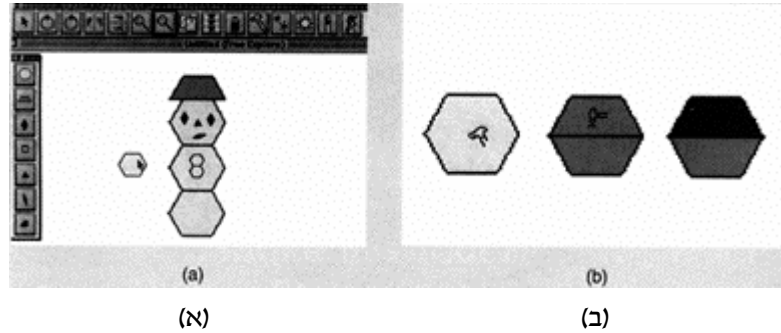
איור 3 – משולשים מטעים

דף המשולשים המטעים מכיל משולשים (1-5) ולא-משולשים (6-10), המופיעים בזוגות על מנת להדגיש את הניגודים. דוגמאות: צורה 1 הינה משולש, אבל צורה 6 איננה משולש משום שאינה סגורה. לצורה 2 אין בסיס מאוזן והיא אינה סימטרית, אבל בכל זאת היא משולש. לעומתה צורות 7 ו-8 אינן משולשים, משום שיש להן ארבע צלעות.



איור 5 – פעילות על צורות בתוכנת הצורות

תוכנת הצורות מאפשרת לילדים לפעול על צורות בדרכים בהן צורות הפלא הרגילות אינן מאפשרות, כמו למשל להגדיר יחידות חדשות שיכולות להכפיל את עצמן. ניתן גם להגדיל או לכווץ את הצורות, כפי שלא עשתה כאשר יצרה את איש השלג שלה (א). ניתן גם לשבור צורות על מנת לפרק אותן לחלקים (ב).



מסקנות

יכולתו של המבוגר "לראות" כהרף עין צורות בעולם הינה התוצאה, לא המקור, של ידע גיאומטרי. המקור של ידע זה הינו הפעילויות על העולם שאנו עושים בראשית התפתחותנו. ילדים צעירים לומדים הרבה על צורות, ולכן הוראת הגיאומטריה צריכה להתחיל מוקדם. המחקרים שלנו ושל Gagatsis and Patronis (1990) מראים שהמושגים של ילדים צעירים על צורות מתייצבים בגיל שש, אך גם שמושגים אלו אינם בהכרח מדויקים. אנו כמורים יכולים לעשות רבות כדי להוסיף לתוכניות הלימודים, אשר לעיתים קרובות מהוות חלק מן הבעיה במקום להיות הפתרון.

ביבליוגרפיה

- Clements, Douglas H. "Longitudinal Study of the Effects of Logo Programming on Cognitive Abilities and Achievement". *Journal of Educational Computing Research* 3 (1987) 73-94.
- Clements, Douglas H., and Michael T. Battista. *The Development of a Logo-Based Elementary School Geometry Curriculum*. Final Report: NSF Grant No.MDR-8651668. Buffalo, N.Y./Kent, Ohio: State University of New York at Buffalo/Kent State University, 1992a.
- Clements, Douglas H., and Michael T. Battista "Geometry and Spatial Reasoning". In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws, 420-64. New York: Macmillan, 1992b.

- Clements, Douglas H., and Sue McMillen. "Rethinking 'Concrete' Manipulatives". *Teaching Children Mathematics* 2 (January 1996): 270-79.
- Clements, Douglas H., and Julie Sarama Meredith. *Shapes- Making Shapes*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publications, 1998.
- Clements, Douglas H., Sudha Swaminathan, Mary Anne Zeitler Hannibal, and Julie Sarama. "Young Children's Concepts of Shape". *Journal for Research in Mathematics Education* 30 (March 1999): 192-212.
- Gagatsis, A., and T. Patronis. "Using Geometrical Models in a Process of Reflective Thinking in Learning and Teaching Mathematics". *Educational Studies in Mathematics* 21 (1990): 29-54.
- Hannibal, Mary Anne. "Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes." *Teaching Children Mathematics* 2 (February 1999): 353-57.
- Kay, Cynthia S. "Is a Square a Rectangle? The Development of First-Grade Students' Understanding of Quadrilaterals with Implications for the van Hiele Theory of the Development Geometric Thought". *Dissertation Abstracts International* 47 (1987): 2934A. University Microfilms No. DA8626590.
- Mc-Graw-Hill School Division. Math Van. New York: Mc-Graw-Hill, 1997. Software.
- Sarama, Julie, Douglas H. Clements, and Elaine Bruno Vukelic. "The Role of Computer Manipulative in Fostering Specific Psychological/Mathematical Processes." In *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, edited by E. Jakubowski, D. Watkins, and H. Biske, 567-72. Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1996.
- Thomas, Betsy. "An Abstract of Kindergarten Teaching's Elicitation and Utilization of Children's Prior Knowledge in the Teaching of Shape Concepts." Unpublished manuscript' School of Education, Health, Nursing and Art Professions, New York University, 1982.
- van Hiele, Pierre M. "The Child's Thought and Geometry." in *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, edited by D. Fuys, D. Geddes, and R. Tischler, 243-52. Brooklyn, N.Y.: Brooklyn College, School of Education , 1959/1985. ERIC Document Reproduction Service No. 289 697.