מה ילדים מבינים על הממוצע ?

What Do Children Understand about Average?

מאת: Susan Jo Russell and Jan Mokros

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol 2 , No. 6, February 1996, pp. 360-364

תרגום: ברכה סגליס

המושג הסטטיסטי בו אנו נתקלים בתכיפות הרבה ביותר הוא הממוצע (Average). ילדים בכיתה ד' ומעלה לומדים די בקלות ליישם את הפרוצדורה למציאת ממוצע חשבוני (Mean), אבל מה הם מבינים על הממוצע החשבוני כרעיון סטטיסטי?

לתלמידים רבים לא ניתנת ההזדמנות ללמוד על סוגים שונים של ממוצעים (Averages) כמושגים סטטיסטיים. הממוצע (Average) נראה להם כמספר שמוצאים אותו בעזרת פרוצדורה מסוימת ולא כמספר המייצג ומסכם קבוצה של נתונים (A set of data). יתכן שתלמידים ילמדו איך למצוא את השכיח (Mode), החציון (Median) או הממוצע החשבוני (Mean) – שבאופן טכני כולם נחשבים לממוצעים (Averages), למרות שלעיתים קרובות מתייחסים לממוצע (Average) כאל הממוצע החשבוני (Mean)– אבל הם אינם יודעים בהכרח כיצד מדדים סטטיסטיים אלו מתקשרים לנתונים שאותם הם מייצגים.

ממוצע כרעיון סטטיסטי

על מנת לחקור את ההבנה של רעיון הממוצע, אנו משתמשים במה שאנו מכנים בעיות 'בנייה'. במקום לבקש מן התלמידים למצוא את הממוצע עבור קבוצה נתונה של מספרים, אנו נותנים לתלמידים ממוצע ושואלים אותם מה יכולה להיות קבוצת הנתונים שהוא מייצג. בעיה מסוג זה דומה למצבים שבהם אנו נתקלים בחיי היומיום; אנו קוראים בעיתון על חציון או על ממוצע חשבוני, או נתקלים בו בעבודתנו וצריכים לפרש מה יכול להיות מיוצג בעזרת מספר זה. קוראים בעלי אוריינות סטטיסטית יכולים לחשוב על היגד כמו: "המחיר החציוני של בית הוא 150,000 $" או "הגודל הממוצע של משפחה הוא 3.2 נפשות" במונחים של - מה זה אומר, או לא אומר, על ההתפלגות של הנתונים.

מרבית התלמידים אינם מסוגלים להעלות בדמיונם איזה סוג של נתונים הממוצע עשוי לייצג. תלמיד אחד, שהתנסה רבות בחישובי ממוצעים חשבוניים, אמר "אני יודע איך לקבל ממוצע, אבל אני לא יודע איך מהממוצע - לעשות שהמספרים יכנסו לממוצע".

בקשה מתלמידים להעלות בדמיונם מה יכולים להיות הנתונים של ממוצע נתון, מניבה תובנות מעניינות לגבי החשיבה של תלמידים על היחסים שבין הנתונים לבין הממוצע של נתונים אלו. הם מתקשים להשתמש בפרוצדורה ששיננו על מנת לבנות מחדש את הנתונים. הם צריכים לחשוב כיצד הממוצע מייצג את הנתונים. אולי תרצו לנסות לפתור את הבעיה הבאה, זו שניתנה לתלמידים, לפני שתקראו כיצד תלמידים פתרו אותה:

ערכנו סקר של מחירי תשעה סוגים שונים של חטיפים. עבור שקיות בעלות אותו גודל, המחיר האופייני, הרגיל, הממוצע היה 1.38 $. מה יכולים להיות המחירים של תשעה הסוגים השונים?

השתמשנו בשפה 'אופייני, רגיל, ממוצע' על מנת לשמור את השיחה פתוחה לכל דרך שבה התלמידים יכולים לחשוב על ממוצע. כאשר הם מראים לנו דרך אחת, אנו שואלים אותם על דרכים אחרות, על מנת ללמוד על מרחב החשיבה שלהם. מאחר שבעיות אלו ניתנות במסגרת של ראיון, אנו יכולים להתערב, לשאול שאלות, ולבדוק את החשיבה של התלמידים.

ממוצע כ- שכיח

בראיונות שערכנו בכיתה ד', תלמידים רבים קישרו בעקביות את הערך ה-'אופייני, רגיל, ממוצע' עם השכיח. בבעיות ה-'בנייה' הם יצרו את קבוצת הנתונים כך שכל או רוב הנתונים היו זהים לערך הממוצע. אם לחצו עליהם, יתכן שעשו כמה התאמות לנתונים, אבל למרות שניסינו לבדוק גישות אחרות, תלמידים אלו דבקו בדעה שהממוצע הוא הנתון המופיע בשכיחות הגבוהה ביותר. כפי שהסביר תלמיד אחד מכיתה ד': "טוב, קודם כל, לא כל החטיפים הם אותו דבר, כפי שאמרתם לי, אבל המחיר הנמוך ביותר לחטיף שאני בעצמי ראיתי היה 1.30 $, אז מאחר שהמחיר האופייני הוא 1.38 $, שמתי את רובם במחיר 1.38 $, רק כדי שהוא יהיה אופייני, והעליתי את המחיר לשניים מהם, רק כדי שזה יהיה מציאותי."

ממוצע כ- חציון

קבוצה אחרת של תלמידים הסתמכה יותר על הגיון בבניית הנתונים מהממוצע. הם הסתמכו על מה שהיה מציאותי בחיים שלהם אבל גם דאגו להגיון המתמטי. תלמידים אלו על פי רוב חשבו על הממוצע כעל הערך האמצעי ובנו את קבוצות הנתונים כך שערכים גבוהים יאוזנו על ידי ערכים נמוכים. הם לא בהכרח מצאו אמצע מדויק, אלא מיקמו את הערך המרכזי שלהם באופן גס במרכז הנתונים שלהם. תלמידים אחדים הראו הבנה חזקה יותר של 'אמצע'. תלמידים אלו פיתחו על פי רוב התפלגויות סימטריות בצורה מושלמת סביב הערך הממוצע. למשל, בבעיית החטיפים הם שמו מחיר אחד ב 1.38 $, לאחר מכן אחד ב 1.37 $ ואחד ב 1.39 $, לאחר מכן אחד ב 1.36 $ ואחד ב 1.40 $, ואז אולי אחד ב 1.30 $ ואחד ב 1.46 $ וכך הלאה. אם הזזנו אחת מנקודות הנתונים בהתפלגות שלהם לערך חדש, הם היו מסוגלים בקלות להתאים את קבוצת הנתונים שלהם כך שיישאר אותו ממוצע. לעומת זאת, אם הכנסנו אילוץ שלא הרשה להם ליצור התפלגות סימטרית מושלמת, הם היו לעתים קרובות 'כבדי תנועה'. כאשר ביקשנו מתלמידים לקבוע מחירים לבעיית החטיפים מבלי להשתמש בערך 1.38 $, רובם אמרו שלא ניתן לבצע את המשימה. אחרים עשו התאמות מזעריות להתפלגות הסימטרית שלהם, כמו לשנות את הערך 1.38 $ ל 1.37 $ ולטעון ששינוי זה הוא כל מה שהם יכולים לעשות.

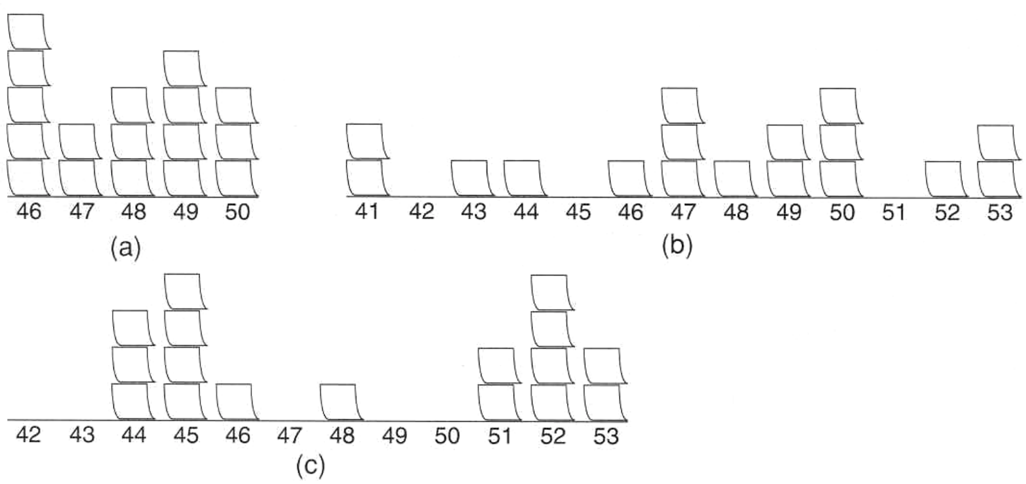
על מנת לעזור לילדים ללמוד עוד על ממוצעים, מן ההגיון הוא לבנות על ההבנה המתפתחת שלהם. תלמידים ממציאים לעיתים קרובות את הרעיון של התבוננות באמצע הנתונים כדרך להשוות קבוצות של נתונים. החציון – הערך של הפריט המרכזי של הנתונים – מתקשר בברור להבנות לא פורמליות אלו ונעשה במידה הולכת וגוברת המדד הסטטיסטי הנבחר בקונטקסטים אמיתיים של ניתוח נתונים, משום שלערכים חריגים גבוהים או נמוכים בתוך הנתונים יש השפעה מועטה עליו. למרות שפיתוח הבנה כיצד

החציון מייצג את הנתונים הוא מורכב (ראה Russel and Corwin[1989, 54]), זהו מקום טוב לתלמידי כתות היסוד הגבוהות להתחיל ממנו את הלימוד על ממוצעים.

במציאת חציון, אנו יכולים למעשה להצביע על ערך בתוך קבוצת הנתונים – הערך המרכזי או נקודת האמצע בין שני ערכים מרכזיים. מציאת הערך המרכזי קלה אם מסדרים את כל הנתונים לפי הסדר. למשל, למציאת החציון של הגובה של תלמידי הכיתה, התלמידים יכולים לעמוד בשורה מסודרת לפי הגובה שלהם. הגובה של האדם האמצעי, או נקודת האמצע בין הגבהים של שני האנשים האמצעיים, הינו הערך החציוני. מחצית מן הנתונים הם מתחת לחציון, ומחצית מן הנתונים הם מעליו.

בעזרת התנסויות, תלמידים יכולים להתחיל לדמיין את המגוון של קבוצות הנתונים שניתן לייצג באמצעות הערך החציוני של, למשל, 48 אינץ'. איור 1 מתאר שלוש קבוצות כאלו : (a) היא קבוצה די סימטרית סביב 48 עם טווח קטן ; (b) גם כן די סימטרית אבל עם טווח גדול ; ו- (c) היא התפלגות של שני שיאים, עם מעט נתונים ליד החציון עצמו.

איור 1: שלוש קבוצות נתונים, עם חציון של 48



ממוצע כפרוצדורה

תלמידי כיתה ד' שניסו להשתמש באלגוריתם של הממוצע החשבוני על מנת לפתור את בעיית החטיפים נתקעו בדרך כלל והיו מתוסכלים. תלמידה אחת חילקה 1.38 $ ב- 9, וקיבלה מחיר הקרוב ל 0.15 $. שאלנו אותה אם קביעת מחיר של 0.15 $ לשקיות יביא למחיר אופייני של 1.38 $ והיא ענתה, "כן, זה מספיק קרוב". תלמידה אחרת בחרה עבור המחירים שלה זוגות של מספרים שהסתכמו ב 2.38 $, כמו למשל 1.08 $ ו 1.30 $. היא חשבה ששיטה זו מביאה לתוצאה של ממוצע של 1.38 $. תלמידים אחרים עשו חישובים אחרים חסרי משמעות, כמו למשל בחירת מחיר אחד ולאחר מכן מציאת המחיר הבא באמצעות הפחתה של 0.38 $.

דרך ראיונות רבים, מצאנו שהידע של מרבית התלמידים לגבי הפרוצדורה של מציאת ממוצע חשבוני אינו מקושר כלל להבנה מה הממוצע החשבוני מייצג. יחד עם זאת, מצאנו גם שתלמידי כיתות ד' – ו' מפתחים הבנות חשובות על טבעו של הממוצע, כולל הבנות אלו :

- ערך הנמצא במרכז הנתונים יכול לייצג את קבוצת הנתונים.

- הממוצע ממוקם בתוך הנתונים באופן כזה שערכים הגבוהים ממנו מאוזנים על ידי ערכים הנמוכים ממנו.
- הממוצע עבור קבוצה נתונה של נתונים מציג תמונה הגיונית של ערכי הנתונים.
- הצורה של הנתונים המיוצגים על ידי הממוצע צריכה לשקף במידה הגיונית מה שאנו יודעים על הקונטקסט שממנו הופקו ערכים אלו, למשל, גבהים או גודל של משפחה.

למידה על הממוצע החשבוני

תלמידים צריכים לצבור התנסויות רבות בקבוצות של נתונים ובמציאת חציון לפני שהם יכולים להבין כיצד הממוצע החשבוני מייצג את הנתונים. בשונה מן החציון, הממוצע החשבוני הוא הפשטה מתמטית. אנו מסוגלים 'לראות' היכן נמצא החציון בתוך סדרת הנתונים. לממוצע החשבוני אין זהות ברורה כזאת בתוך הנתונים עצמם; הערך שלו עשוי לא להופיע בכלל בתוך קבוצת הנתונים. הגודל הממוצע של משפחה יכול להיות מספר, כמו למשל 3.6, מספר שאיננו הגודל של משפחה כלשהיא. הממוצע החשבוני הוא מבנה מתמטי המייצג יחסים מסוימים בתוך הנתונים – סוג של הפשטה, שעלול להיות חדש לתלמידים רבים של כיתות היסוד הגבוהות.

אנשי החינוך המתמטי ניסו במשך השנים לפתח מודלים התומכים בתלמידים בשעה שהם בונים את הבנתם על הממוצע החשבוני. בשנים הראשונות שבהן עבדנו עם תלמידי כיתות ו', הנחנו שתלמידים ילמדו בצורה היעילה ביותר על הקשר הזה אם ניתן להם הזדמנות להפוך קבוצה של נתונים למצב של 'מנות שוות'. אם לכל אחד יש מספר מסוים של חיות מחמד, הדרך למצוא את הממוצע היא לרכז את כל חיות המחמד ולאחר מכן לחלק אותן באופן שווה בין הילדים שהשתתפו בריכוז החיות שלהם. מודל זה משקף בדיוק מה שקורה כאשר משתמשים באלגוריתם של הממוצע: הנתונים מרוכזים ולאחר מכן מחולקים באופן שווה, כאילו שלכל חלק של הנתונים יש אותו ערך. הערך הזה הוא הממוצע החשבוני. גילינו שלמרות שמודל זה יעיל ללמד ילדים על חילוק, הוא פשוט לא עוזר להם לחשוב על הקשר הסטטיסטי שבין הנתונים לבין הממוצע החשבוני. הבעיה עם מודל זה היא שבתהליך החלוקה מחדש של הכמויות, כך שלכל נקודה בנתונים יהיה אותו ערך, הקשר בין הנתונים המקוריים לבין הממוצע החשבוני מיטשטש לחלוטין.

לדוגמא, חישבו על בעיה שבה שמונה ילדים שאלו מן הספרייה את כמויות הספרים הבאות: 5, 4, 3, 2, 1, 4, 5, ו 2. מהו המספר הממוצע של ספרים שכל ילד שאל מן הספרייה? במודל המנות השוות כל הספרים מקובצים ביחד ואחר כך עשרים וארבעה הספרים מחולקים מחדש לשמונה קבוצות (כלומר מחולקים ל-8) כך שיש שלושה ספרים בכל קבוצה. מתקבלת תמונה של שמונה ילדים שלכל אחד מהם שלושה ספרים. הממוצע החשבוני הוא 3. אבל מה הקשר של ה '3' הזה לקבוצת הנתונים המקורית? בתהליך החלוקה מחדש של הנתונים, איבדנו את הקבוצה המקורית של הנתונים. זה לא מפליא, אם כך, שהילדים אינם מסוגלים לראות את הקשר שבין הנתונים לבין הממוצע החשבוני כאשר הם משתמשים במודל זה. אין להם הזדמנות לראות אותם ביחד! ברגע שמחשבים את הסכום הכללי, הנתונים האינדיבידואליים נעלמים. זה איננו התסריט שקורה בחיי היומיום, שבו מציאת ממוצע לעיתים נדירות כרוך בעשיית מנות שוות. בחיים, ובמצבים סטטיסטיים אמיתיים, הנתונים ממשיכים להתקיים במתכונת המקורית שלהם. מצאנו שלמידת המודל של מנות שוות לחישוב הממוצע החשבוני לא הביא

להבנה טובה יותר של הקשר שבין הממוצע החשבוני לנתונים. תלמידים עדיין לא היו מסוגלים לפתור בעיות 'בנייה', כמו זו של החטיפים שתוארה בתחילת המאמר, שבה הם נתבקשו ליצור התפלגות של נתונים (A data distribution) בעלת ערך ממוצע מסוים.

מודל נוסף מדגיש את הממוצע החשבוני כערך שבו כל הנתונים 'מתאזנים'. במקום שיהיה אותו מספר של נתונים מכל צד שלו, כמו שזה קורה בחציון, אנו רוצים שסכום ההפרשים מן הממוצע החשבוני בכל צד יהיה שווה. טבלה 1 מראה שתי התפלגויות שבהן הערך של הממוצע החשבוני הוא 1.38 $. בשתי ההתפלגויות, סכום ההפרשים מן הממוצע החשבוני הוא 0. במחקר שלנו, תלמידים מועטים בלבד – ואיש מהם אינו צעיר מכיתה ו' – פיתחו מושגים על הממוצע החשבוני כנקודת איזון.

טבלה 1: שתי התפלגויות שבהן הערך של הממוצע החשבוני הוא 1.38 $

מקרה 1

מחיר	מחיר – 1.38 $
$ 1.40	+ 0.02
$ 1.39	+ 0.01
$ 1.38	0.00
$ 1.37	- 0.01
$ 1.36	- 0.02

מקרה 2

מחיר	מחיר – 1.38 $
$ 1.50	+ 0.12
$ 1.49	+ 0.11
$ 1.39	+ 0.01
$ 1.34	– 0.04
$ 1.18	- 0.20

מודלים של איזון אינם חדשים (Pollatsek, Lima, and Well 1981) אבל יכולים להיות בעייתיים משום שהם מסתמכים על ההבנה של הקשר שבין משקל לבין מרחק על זרוע של מאזניים. שימוש באוסף של רעיונות קשים להבנה - היחסים הפיסיקליים שבין משקל למרחק – עלול לא לעזור לתלמידים להבין אוסף אחר של רעיונות קשים להבנה – היחסים המספריים שבין הממוצע החשבוני לבין הנתונים.

המודל של 'פריקה'

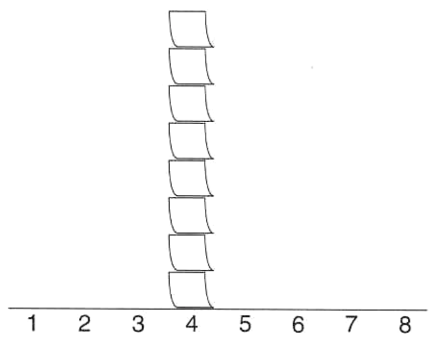
בעבודתנו עם תלמידי כיתה ו', השתמשנו במודל חדש שבו חושבים על הממוצע ללא שימוש ב-'מנות שוות' או ב-'איזונים'. אנו משתמשים במשימות של 'פריקה'. כמו בעיות ה'בנייה', משימות ה'פריקה' מתחילות עם הממוצע החשבוני ופועלות בהליכה לאחור אל הנתונים. למשל, אם גודל הממוצע החשבוני של משפחה הוא 4 נפשות, כיצד עשויים להיראות הנתונים? התלמידים עובדים עם תרשים של ציר ופתקיות נדבקות, כשהם מתחילים בכך שכל הפתקיות מודבקות מעל הערך 4 (ראה איור 2). למרות שהתפלגות הנתונים בהחלט יכולה להיראות כמו ייצוג זה, הרי קרוב לודאי שאין זה כך. התלמידים יודעים מהניסיון שלהם שחלק מן המשפחות הן בגודל של הערך הממוצע, אבל יש הרבה משפחות שהן גדולות יותר והרבה שהן קטנות יותר. אנו מבקשים מן התלמידים ליצור התפלגות יותר מציאותית בכך שאנו שואלים, "אילו ידענו שלמשפחה אחת יש באמת שלושה אנשים במקום ארבעה, מה היינו יכולים לעשות על מנת שהממוצע יצא 4?" תלמידים בדרך כלל מציעים להזיז את אחת מנקודות הנתונים, המיוצגת בעזרת פתקית מודבקת, מ- 4 ל- 5 על מנת לאזן את ה- 3. התערבות ההוראה ממשיכה בבקשה מן התלמידים להזיז עוד נקודות של נתונים עד שהם שבעי רצון מכך שהנתונים נראים "כמו בחיים

האמיתיים" ושהממוצע הוא עדיין 4. אנו מקפידים על עבודה במספרים קטנים, כדי שהתלמידים יוכלו לחשב בקלות האם הממוצע החשבוני הוא עדיין 4.

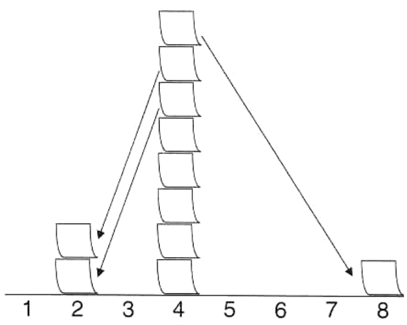
כאשר הם פותרים בעיה זו, תלמידים רבים נצמדים להתפלגות סימטרית שבה כל נקודה מעל הממוצע מותאמת לנקודה במרחק שווה מתחת לממוצע. ברגע שהם מרגישים נוח עם גישה זו, אנו מציגים להם את הרעיון של איזון לא סימטרי בכך שאנו שואלים מה היה קורה אם במשפחה אחת היו 8 נפשות. במצב זה, התזוזה מ- 4 ל- 8 אינה יכולה להיות מאוזנת על יד תזוזה תואמת בצד השמאלי של הממוצע החשבוני משום ששום משפחה לא יכולה להיות בעלת אפס נפשות. בעבודתנו בכיתות, תלמידים תמיד העלו את הרעיון של הזזת שתי פתקיות נדבקות שונות כלפי מטה בסך כולל של 4 יחידות על מנת לאזן את התזוזה כלפי מעלה של 4 (ראה איור 3).

כאשר התלמידים עובדים על רעיון מורכב זה תוך שימוש במגוון של קונטקסטים של בעיות, חשוב מאוד להתקדם באיטיות ולתת להם לחלוק עם עמיתיהם את הרעיונות שלהם ואת האסטרטגיות שלהם בזמן שהם מפתחים את הרעיונות שלהם אודות איזון ומרחק (ראה [1992] Friel, Mokros, and Russell).

איור 2: תרשים ציר שבו כל הפתקיות מודבקות על הערך 4



איור 3: התפלגות בפעולה שבה הערך 8 מאוזן על ידי שתי פתקיות המודבקות על הערך 2



מסקנות

הבנת ממוצעים צריכה להיות מעוגנת בהתנסויות רבות עם מגוון של קבוצות של נתונים. בשעה שתלמידים מתארים, מסכמים, ומשווים קבוצות של נתונים, הם מתחילים באופן טבעי לדבר על מה שאופייני לכל קבוצת נתונים מסוימת. הם מפתחים תיאורים משלהם לתכונות של מספר המסכם קבוצה שלמה של נתונים. לדוגמא, במהלך דיון בכיתה ד' על תוכניות להשוות את הגבהים של תלמידי כיתה א' שבבית ספרם לגבהים שלהם, תלמיד אחד תיאר את הרעיון שלו באומרו: "אנחנו יכולים למצוא את המספר האחד שהוא כאילו באמצע או שהמספרים האחרים מצטופפים סביבו, ואחר כך לעשות אותו דבר לכיתה א'" (Russell and Corwin [1989]).

ברגע שהתלמידים מפתחים רעיונות אחדים בדבר החשיבות של האמצע של קבוצת נתונים, ניתן להציג בפניהם את ההגדרה ואת השימוש של החציון כמדד סטטיסטי. כאשר משתמשים בו בצירוף עם הטווח

(Range) של הנתונים, החציון מספק אינפורמציה מרובה על קבוצת הנתונים. אנו ממליצים שעבודה עם החציון תתחיל בערך בכיתה ד׳ ותמשיך במהלך הכיתות הגבוהות של היסודי וחטיבת הביניים.

למרות שקל ללמד את הפרוצדורה למציאת ממוצע חשבוני, אנו ממליצים לדחות את ההוראה של פרוצדורה זו עד כיתה ו׳ לפחות, ורק אחרי שתלמידים פיתחו רעיונות משלהם אודות איזון. הוראה מוקדמת מדי של האלגוריתם למציאת ממוצע חשבוני אינה מסייעת לתלמידים לפתח הבנה מבוססת אודות הקשר שבין הממוצע החשבוני לבין הנתונים שהוא מייצג, ועלולה למעשה להפריע להתפתחות הבנה זו (ראה Mokros and Russell [1995]). על מנת להבין מה מייצג הממוצע החשבוני וכיצד הוא מתקשר לנתונים, המושג של מרחק מהממוצע החשבוני הוא הכרחי.

כמה שאלות שכדאי למורים לשאול את עצמם לפני שהם מציגים את האלגוריתם הן : מה עושים התלמידים שלי אם אני נותן להם ממוצע ומבקש מהם להמציא את קבוצת הנתונים שמשקפת מדד זה? האם יש להם איזה שהוא מושג על הממוצע כסוג של אמצע? האם הם חשים שהממוצע ממוקם בתוך קבוצת הנתונים כך שערכים גבוהים מאוזנים על ידי ערכים נמוכים? האם הם מסוגלים להתחיל לחשוב על המשמעות של המרחקים של הערכים מן הממוצע?

אם תלמידים לא פיתחו רעיונות אלו, שיתכן ולא יהיו מובנים עד סוף כיתות חטיבת הביניים, אזי הוראת האלגוריתם היא חסרת תועלת. תלמידים צריכים יותר התנסויות בתיאורים ובהשוואות של קבוצות של נתונים. האלגוריתם הוא קיצור דרך שימושי, אבל אינו מדגים את מורכבות פעולת האיזון הסטטיסטית הכרוכה במציאת הממוצע החשבוני. הרבה יותר חשוב הוא הקשר שבין הנתונים והממוצע המסכם נתונים אלו. מיקוד על קשר זה צריך להיות בעדיפות העליונה של החינוך הסטטיסטי.

רעיונות למחקר פעולה

רעיון מס׳ 1 למחקר פעולה

בקשו מן התלמידים שלכם לפתור את בעיית החטיפים כפי שהיא מנוסחת במאמר.

1. הבחינו אילו תלמידים חושבים על ׳אופייני, רגיל, ממוצע׳, כשכיח, אילו כחציון, ואילו כממוצע חשבוני, על ידי כך שתשאלו אותם מהם המספרים שבחרו ומהם הנימוקים לבחירת מספרים אלה.
2. קִבעו אילו תלמידים מסוגלים להסביר את הבחירה שלהם. האם ישנם תלמידים שמשנים את דעתם כתוצאה מהסברים אילו?
3. מספר תלמידים עשויים לדעת את האלגוריתם למציאת ממוצע חשבוני. קִבעו מי מהם מסוגל להסביר מדוע הפרוצדורה שלהם היא דרך טובה למצוא את הערך שהוא ׳אופייני, רגיל, ממוצע׳.
4. המחברים מציינים שרבים מתלמידי כיתה ד׳ השתמשו בעקביות בשכיח כערך שהוא ׳אופייני, רגיל, ממוצע׳. האם ממצא זה נכון גם בכיתתך.

רעיון מס׳ 2 למחקר פעולה

אִמרו לתלמידים שלכם שהערך ה׳אופייני, רגיל, ממוצע׳ לגודל של משפחה עבור שמונה משפחות הוא 4 נפשות. שאלו אותם איך צריכים להיראות הנתונים.

1. אם התלמידים מתקשים להתחיל, תוכלו להראות להם את ההתפלגות שבאיור 2 ולשאול אותם אם היא מתאימה. אחרי זה שאלו אותם אילו קבוצות נתונים נוספות יכולות להתאים.
2. שאלו: "אילו ידענו שלמשפחה אחת יש באמת שלושה אנשים במקום ארבעה, מה היינו יכולים לעשות על מנת שהממוצע יצא 4 נפשות?" המחברים מציינים שתלמידים בדרך כלל מציעים להזיז נקודת נתונים אחת, פתקית המודבקת על הגרף, מ- 4 ל- 5 כדי לאזן את ה- 3. האם החלטה זו התקבלה בכיתתכם? קבעו האם התלמידים רוצים להזיז נקודות נתונים נוספות כדי לעשות את הנתונים יותר מציאותיים. אחרי כל תזוזה של נקודה, שאלו, "האם הממוצע עדיין 4 נפשות?"
3. עִרכו לתלמידים היכרות עם איזון אֲסימטרי (Asymmetric) על ידי השאלה: "מה היה קורה אם במשפחה אחת היו 8 נפשות?" המחברים מציינים שתלמידים תמיד מעלים את הרעיון של הזזת שתי נקודות נתונים מ- 4 ל- 2. האם בכיתתכם עלתה הצעה כזו? האם ניתן לעשות זאת בדרך אחרת?
4. האם יש לתלמידים מושג כל שהוא על הממוצע כסוג של אמצע? לאילו תלמידים?
5. האם יש לתלמידים תחושה שהממוצע ממוקם בתוך הנתונים כך שהערכים הגבוהים מאוזנים על ידי הערכים הנמוכים? אילו תלמידים?
6. האם התלמידים מסוגלים להתחיל לחשוב על המשמעות של המרחקים של הערכים מן הממוצע? אילו תלמידים?

המשיכו להציג לתלמידים משימות 'פריקה' כאלו במהלך שנת הלימודים. רִשמו לעצמכם כיצד מתפתחת ההבנה של כל תלמיד לגבי המושגים הבסיסיים של הממוצע.

ביבליוגרפיה

Friel, S.N., J.R. Mokros, and S.J. Russell. *Used Numbers: Middles, Means, and In-Betweens.* Palo Alto, Calif. : Dale Seymour Publications, 1992.

Mokros, J.R., and S.J.Russell. “Children’s Concepts of Average and Representativeness.” *Journal for Research in Mathematics Education* 26 (January 1995): 20-39.

Pollatsek, A., S.D. Lima, and A.D. Well. “Concept of Computation: Students’ Understanding of the Mean.” *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981): 191-204.

Russell, S.J., and R.B. Corwin. *Used Numbers: The Shape of the Data*. Palo Alto, Calif. : Dale Seymour Publications, 1989.