בעיות המעודדות חוש לפרופורציה

Problems That Encourage Proportion Sense

מאת: Esther M. H. Billings

הופיע ב: Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 7, No. 1, September 2001, pp.10-14

תרגום: ברכה סגליס

לפני מספר שנים, תלמידה שלי לשעבר, אותה אכנה בשם קרול, ביקשה ממני לעזור לה להתכונן למבחן במתמטיקה. היא פתרה בעצמה מספר בעיות פרופורציה ורצתה שאבדוק את עבודתה. אחת הבעיות היתה כזו:

"ג'ון נסע 60 מייל ב- 2 שעות. אם הוא ימשיך לנסוע באותה מהירות, כמה זמן יקח לו לנסוע עוד 40 מייל?"

כדי לפתור את הבעיה, הציבה קרול את הנתונים בשני יחסים עם נעלם, כשהיא משתמשת ביישום של הפרוצדורה המקובלת לפתרון בעיות פרופורציה, וקבעה שנסיעה של 40 מייל נוספים תארך לג'ון 3 שעות (ראה **איור 1**)

איור 1: אסטרטגיית הפיתרון של קרול

$$\frac{60}{40}=\frac{x}{2}$$
$$40x=120$$
$$x=3$$

הצעתי לקרול לשכוח מן החישובים לרגע ולחשוב ישירות על הבעיה. שאלתי אותה האם נסיעה של 40 מייל תארך לג'ון יותר או פחות זמן מהנסיעה הראשונית של 60 מייל. היא ענתה מיד שמכיון שהמרחק של 40 מייל קצר יותר מן המרחק של 60 מייל, אז נסיעה למרחק של 40 מייל תארך פחות זמן, באופן ספציפי, פחות מ- 2 שעות. היא גם העירה שמאחר ש- 40 מייל הם קצת יותר מחצי של 60 מייל, אז נסיעה למרחק זה תארך קצת יותר משעה אחת שהיא חצי משתי השעות הנדרשות לנסיעה של 60 מייל. כשקרול השתמשה בחוש לפרופורציה שלה, או כפי שאחרים מכנים זאת, **חשיבה איכותית**, היא קבעה שתשובתה צריכה להיות בין 1 ל- 2 שעות והגיעה למסקנה שתשובתה הקודמת של 3 שעות אינה הגיונית ולכן שגויה. קרול הציבה את משוואת הפרופורציה שוב ומצאה שג'ון יזדקק לזמן של 1 שעה ו- 20 דקות כדי לנסוע 40 מייל. היא היתה בטוחה כעת שתשובתה נכונה. השימוש של קרול בחוש לפרופורציה היה הכרחי להבנת הסיטואציה הפרופורציונלית של הזמן הדרוש לג'ון לנסוע למרחק מסוים.

" העקרונות והסטנדרטים למתמטיקה בביה"ס" של ה- NCTM (2000) מדגישים את החשיבות של פיתוח וטיפוח יכולות החשיבה הפרופורציונלית של תלמידי כיתות הביניים (ה' – ח'). אחת הדרכים

לעשות זאת היא לעזור לתלמידים להבין כיצד לקשר בין הכמויות השונות שביחסים המושווים כך שניתן יהיה לחקור ולהרחיב את הקשרים שבין כמויות אלו. היכולת לחשוב על כמויות ועל הקשרים השונים שביניהם במצבים של פרופורציה היא מה שאני מכנה **חוש לפרופורציה.**

מאמר זה מתאר ארבע בעיות המעודדות את השימוש ואת הפיתוח של חוש לפרופורציה. בעיות אלו נכתבו במהלך מחקר עם פרחי הוראה לביה״ס היסודי (Billings 1998). כחלק מן המחקר, המשתתפים פתרו מגוון של בעיות פרופורציה. קטעים מאסטרטגיות הפיתרון שלהם יוצגו להלן על מנת להראות כיצד בעיות אלו יצרו סביבה עשירה שהביאה להופעה והתפתחות של חוש לפרופורציה. המשתתפים במחקר מוצגים בשמות בדויים.

שימוש בבעיות ללא מספרים לעידוד חוש לפרופורציה

בבואם לפתור בעיות פרופורציה עם מספרים, תלמידים רבים כל כך עסוקים בנסיון להגיע לתשובה, עד שהם לא לוקחים בחשבון את ההגיון של תשובותיהם. רבים מנסים להפעיל את הפרוצדורה המקובלת או פרוצדורה כמותית אחרת מבלי להבין באמת מדוע הפרוצדורה מתאימה (Cramer and Post 1993). כמורים, אנו עומדים מול האתגר להפוך את הפרופורציות לבעלות משמעות עבור תלמידינו. מאחר שתלמידים נוטים לעשות ״שימוש לא נכון״ במספרים, כאשר הם מציבים אותם בנוסחה, עלינו לעזור להם להתמקד על יחסי הפרופורציה שביסוד הבעיה וליצור אוירה המטפחת חוש לפרופורציה. אחת הדרכים שבהן נוכל לעזור לתלמידים לטפח חוש לפרופורציה היא להסיר מבעיות הפרופורציה את המספרים, כלומר, לספק בעיות פרופורציה ללא מספרים שתאלצנה את התלמידים לבחון את היחסים שבין המשתנים בצורה ישירה.

בעיית הרכיבה על אופניים (ללא מספרים)

חישבו על בעיית הפרופורציה ללא מספרים הבאה העוסקת בשתי ילדות הרוכבות על אופניים בשביל:

קרן ורחל אוהבות לרכב על האופניים שלהן בשביל המיועד לרוכבי אופניים שבפארק העירוני. היום, שתיהן התחילו לרכב מתחילת השביל. כל אחת מהן רכבה במהירות קבועה, ללא הפסקה, עד שהגיעה לסוף השביל. לרחל לקח זמן רב יותר להגיע לסוף השביל. איזו מן הילדות רכבה מהר יותר? הסבר את תשובתך.

בעיה זו דומה בתוכנה לבעיות סטנדרטיות הנמצאות בספרי הלימוד של כיתות הביניים בפרק העוסק בפרופורציות. עם זאת, בנוסח של הבעיה כפי שהוא מוצג כאן, מתבקשים התלמידים להסיק מסקנות אודות היחס – איזו ילדה רכבה מהר יותר- במקום לעשות חישוב ולקבל תשובה מספרית – המהירות או המרחק של אחת הילדות או של שתיהן.

כל ארבעה עשר פרחי ההוראה שהשתתפו במחקר השתמשו בחוש לפרופורציה שלהם כדי להסביר שקרן רכבה על אופניה מהר יותר מאשר רחל. הם הסיקו שמאחר ושתי הרוכבות לא עשו הפסקות בעת

הרכיבה ורכבו לאותו מרחק, לקח להן בודאי משכי זמן שונים כדי להגיע לסוף השביל. כתוצאה מכך, מובן שהבנות רכבו במהירויות שונות. לדוגמה, גרייס הסבירה את הבעיה באופן הבא:

"קרן הגיע לסוף ראשונה, אז היא היתה צריכה לנסוע מהר יותר...היא היתה מסוגלת להגיע לסוף השביל ראשונה. רחל נסעה ככל הנראה לאט יותר, אחרת היא היתה מגיעה באותו זמן או לפני קרן".

מכיון שהבעיה היא בעיה פתוחה, היא מאפשרת, עם זאת, לתלמידים להמשיך ולנתח הנחות שלא צוינו בטקסט ואשר יכלו להשפיע על יחסי הפרופורציה. לדוגמה, ביל טען שקרן רכבה מהר יותר, "בהנחה שהיא לא עשתה קיצור דרך". הוא ציין שהפחתה באורך הדרך שקרן רכבה היתה משפיעה על כמות הזמן הנדרשת כדי להגיע לסוף הדרך. בדיון בכיתה, ההערה של ביל סיפקה הזדמנות לדון אודות התפקיד של המרחק בבעיה זו. התלמידים יכלו לראות שאם הבנות רכבו למרחקים שונים, אזי אורך הזמן הנדרש להגיע לסוף הדרך אינו נתון מספיק על מנת לקבוע איזו מהן רכבה מהר יותר. מרי מצאה דוגמה נוספת של הנחה שלא צוינה בבעיה. היא הבחינה ש"שתיהן התחילו לרכב מתחילת השביל אבל לא נאמר ששתיהן התחילו באותו הזמן, כך שיתכן שאחת מהן התחילה לרכב לפני השניה". היא הבינה שאם כמות הזמן בבעיה אינה מתייחסת רק לזמן שנדרש לרכיבה, אזי גם בה לא ניתן להשתמש כאמצעי להשוואה.

בעיה זו לא מתמקדת רק ביחסים שבין זמן ומהירות , אלא מאפשרת לתלמידים לנתח גורמים אחרים, כמו מרחק וזמן התחלה, העשויים להשפיע על היחסים ולקבוע האם יש פה באמת מצב של פרופורציה. בכך אפשרה בעיה זו, הנראית פשוטה, הזדמנות לחשוב על היחסים שבין המשתנים היכולים להשפיע באופן ישיר או עקיף על מהירות הרוכבות.

בעיית תנודות מיתרי הפסנתר (ללא מספרים)

דוגמה נוספת לבעיה המקדמת חוש לפרופורציה עובדה מתוך ספר לימוד סטנדרטי ועוסקת במיתרי פסנתר:

תדירות התנודות של מיתר פסנתר גדלה ככל שמקצרים את אורכו. באיזה ממיתרי הפסנתר הבאים תהיה תדירות התנודות איטית יותר, במיתר של 36 אינץ' או במיתר של 24 אינץ'? הסבר את תשובתך.

בבעיה זו יש אמנם נתונים מספריים אך הם אינם מספיקים כדי להגיע לתשובה מספרית מדויקת. כתוצאה מכך על התלמיד לנתח את היחסים שבין אורך המיתר לבין תדירות התנודות שלו.
שוב, כל פרחי ההוראה חשבו שבמיתר של ה- 36 אינץ' תדירות התנודות תהיה איטית יותר. תגובתה של ג'ואן טיפוסית לצורת חשיבה זו:

"המיתר של ה- 36 אינץ' יהיה בעל תדירות תנודות איטית יותר משום שככל שהמיתר קצר יותר כך תדירות התנודות שלו רבה יותר. לכן המיתר של 36 אינץ' יהיה בעל תדירות תנודות איטית יותר. ככל שהאורך קצר יותר, תדירות התנודות רבה יותר. ככל שהאורך גדול יותר, תדירות התנודות מעטה יותר".

בבעיה זו התלמידים צריכים להתמקד על יחסי הפרופורציה המקשרים את הכמויות השונות ולקבוע כיצד הגדלה או הקטנה של אחת הכמויות, במקרה זה - אורך המיתר, משפיעה באופן ישיר על התנהגות הכמות השניה - תדירות התנודות.

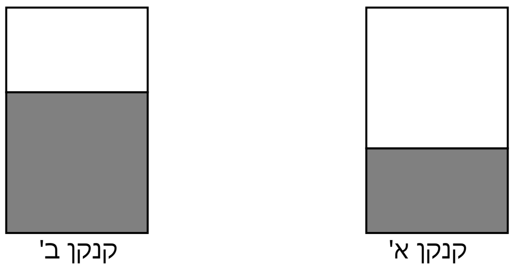
בעיית חוזק טעמו של הקפה (ללא מספרים)

בנוסף לעיבוד בעיות פרופורציה המופיעות בספרי הלימוד הסטנדרטיים, פיתחתי גם סדרה של בעיות ללא מספרים. בבעיות אלו מוצגת תמונה של שני קנקני קפה ומצוין באיזה קנקן טעמו של הקפה חזק יותר. בנוסף, מציינת הבעיה שינוי מסוים הקורה לקנקנים, כמו הוספת כוס מים או הוספת כפית גדושה של קפה נמס. המטרה היא לזהות, אם אפשר, באיזה מקנקני הקפה טעם הקפה חזק יותר לאחר ביצוע השינוי. גם כאן, הבעיות מאלצות את התלמידים לחשוב על היחסים שבין כמויות המים או כמויות הקפה לבין טעמו של הקפה, ובכך מטפחות את החוש לפרופורציה אצל התלמידים בקונטקסט שונה. ראה **איור 2** לדוגמה של בעיה מסוג זה.

איור 2: בעיית חוזק טעמו של הקפה (א)

לפניך 2 קנקני קפה. אחד מהם (כפי שיצוין בהמשך) מכיל קפה בטעם חזק יותר. עליך לקבוע איזה מן הקנקנים יכיל קפה בטעם חזק יותר אחרי שיערך בהם שינוי (כפי שיצוין בהמשך). הסבר כיצד הגעת לתשובתך.

קנקן ב' מכיל קפה בטעם חלש יותר. הוסף כפית אחת של קפה נמס לקנקן א' וכוס אחת של מים לקנקן ב'.



פרחי ההוראה ענו נכון גם על בעיה זו על ידי חשיבה על ההשפעות של הוספת עוד קפה ועוד מים לתערובות הקפה שבקנקנים. הם הבינו שככל שגדלה כמות הקפה, גדל גם הריכוז של התערובת. באותו האופן, ככל שכמות המים שנוספה לתערובת גדלה, מידת הריכוז של התערובת פחתה. לדוגמה, לוסי הסבירה את הקשר כך:

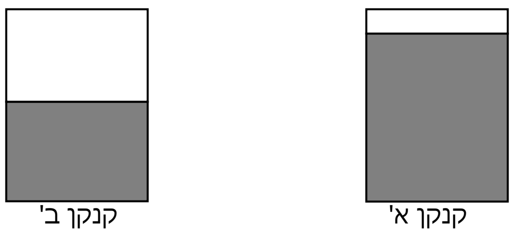
"הקפה בקנקן ב' מלכתחילה חלש יותר ואחרי זה מוסיפים לו עוד מים ולא מוסיפים לו קפה בכלל, ואילו הקפה בקנקן א' כבר חזק יותר ועוד מוסיפים לו קפה וזה יעשה אותו חזק יותר".

עריכת השוואה משמעותית מבחינה מתמטית בין קנקני קפה במצב שונה ומעט מסובך יותר (ראה **איור 3**), הוכיחה עצמה כמאתגרת יותר למשתתפי המחקר.

איור 3: בעיית חוזק טעמו של הקפה (ב)

לפניך 2 קנקני קפה. אחד מהם (כפי שיצוין בהמשך) מכיל קפה בטעם חזק יותר. עליך לקבוע איזה מן הקנקנים יכיל קפה בטעם חזק יותר אחרי שיערך בהם שינוי (כפי שיצוין בהמשך). הסבר כיצד הגעת לתשובתך.

קנקן א' וקנקן ב' מכילים קפה באותו טעם . הוסף כפית אחת של קפה נמס לקנקן א' וגם לקנקן ב'.



רוב פרחי ההוראה זיהו בהצלחה שהנפח הראשוני של הנוזל הינו מרכיב הכרחי בקביעת הקשר שבין הוספת קפה לבין חוזק טעמו של הקפה. ביל הסביר זאת כך :

"אם לשניהם יש אותו הטעם, אני מניח שלשניהם יש אותו יחס של מים לקפה. ואם מוסיפים כפית קפה לכל אחד, אז בקנקן א' זה יהיה דליל יותר. בקנקן ב' יש פחות מים לדלל את הקפה ולכן הוא יהיה חזק יותר".

יחד עם זאת הופיעו גם הבנות שגויות אודות יחסי הפרופורציה. כמה מפרחי ההוראה הגיבו בצורה שגויה, כפי שקרה לגרייס כשאמרה :

"לקפה יש אותו הטעם. אם נוסיף קפה לשניהם אז זה תמיד יהיה אותו הדבר, כי מוסיפים אותה כמות לכל אחד מהם ובהתחלה שניהם היו אותו דבר".

גרייס, כמו אחרים, פעלה תחת ההנחה שבהוספת אותה כמות של קפה לשני הקנקנים, הקשר היחסי של הטעם ישאר גם הוא אותו דבר. סטודנטים אלו התעלמו מהכמות הראשונית של הנוזל בכל קנקן, ולא הבינו שמשתנה זה הינו מהותי בניתוח הסיטואציה. הם הבינו שעליה בכמות הקפה משפיעה על החוזק הכולל של הקפה בכל קנקן, אבל הם לא חשבו שצריך להשוות את החוזק הכולל של הקפה **בין** שני הקנקנים, שהוא מרכיב חשוב במצב פרופורציה זה. החשיבה שלהם מתמקדת בכך ש"אותו דבר" נעשה בשני הקנקנים. חשיבה זו ממחישה את ההבנה השגויה של הרעיון שהגדלה סימולטנית של אחת הכמויות בזוג של יחסים תואמים יכול להשפיע על הקשר שבין שני יחסים אלו. ניתן לסכם את החשיבה שלהם באופן הבא :

אם $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (c ,d ≠0) אז $\frac{a+1}{c}=\frac{b+1}{d}$ (c ,d ≠0) . כאשר הערכים של a,b,c,d אינם ידועים.

אבל, כאשר משנים בהתאמה ערכים במצב של יחס, זה משנה לא רק את היחס עצמו אלא גם את הקשר שבין היחסים.

הבעיה ללא מספרים הזאת חשפה הנחות מסוימות שפרחי ההוראה הניחו אודות הקשרים הקיימים בין כמויות במצב של פרופורציה. אם הבעייה היתה מכילה גם מספרים ופרחי ההוראה היו נדרשים לחשב ולהגיע לתשובה מספרית במקום לחשוב ישירות על הקשר שבין הכמויות ביחסים שבבעייה, יתכן והבנה שגויה בסיסית זו לא היתה מתגלה. כאשר מתגלות הבנות שגויות כאלו, בשעה שתלמידים פותרים סוג כזה של בעיה ללא מספרים, עולה ההזדמנות לדון בחשיבות של עריכת השוואה גם בין הקשר שבין שני היחסים, כמו למשל, במקרה זה, השוואה בין קנקני הקפה לאחר השינוי. דיון כזה יסייע לתלמידים לחזק את חוש הפרופורציה שלהם.

טיפוח חוש למספרים במגוון של מצבי פרופורציה

כל ארבע הבעיות ללא מספרים שהוצגו במאמר זה תוכננו במטרה להעמיק את ההבנה של התלמידים במושגים הבסיסיים המשפיעים על הקשרים במצבי פרופורציה. מכיון שבעיות ללא מספרים מאלצות את התלמידים לבחון את הקשרים, בקשה מתלמידים לפתור בעיות מסוג זה, במיוחד כאשר הם עורכים הכרות עם מושג הפרופורציה, יכולה להביא תועלת. ניתן לשנות רבות מבעיות הפרופורציה המסורתיות כך שהמיקוד שלהן יהיה בעיקר על קשרי הפרופורציה הבסיסיים, כמו שנעשה בבעיות האופניים ומיתרי הפסנתר. פשוט שנו את בעיית הפרופורציה באופן כזה שחלק או כל הכמויות

המספריות לא יופיעו, אבל הקשרים שבין המשתנים יהיו עדיין ברורים. לאחר מכן שאלו שאלה הדורשת מן התלמידים להתמקד על קשרי הפרופורציה הטבועים בבעיה.
בעיות ללא מספרים מציעות קונטקסט מסוג אחר שבו ניתן לבחון את הקשרים הבסיסיים המקשרים בין המשתנים במצבי פרופורציה. אם התלמידים שלכם לא מרגישים נוח עם קנקני קפה, שנו את הקונטקסט לתוכן שהוא משמעותי להם, כמו כדים של שוקו חם או לימונדה. בעיות אלו ניתנות גם להרחבה כך שיכילו תסריטים נוספים שבהם התלמידים מתבקשים להשוות את התוצאות של הוספת כמויות של משתנה מסוג מסוים לסוגים שונים של תערובות, ולקבוע את מידת הריכוז שלהם.
כאשר אנו מציגים לתלמידים בעיות פרופורציה ללא מספרים מסוגים שונים, במיוחד כאשר הם עורכים הכרות עם מושג הפרופורציה, אנו מסייעים להם להתמקד על הקשרים הבסיסיים ולצפות מראש כיצד הגדלה או הקטנה של משתנה אחד משפיעה על משתנה אחר, וכמו כן משנה את היחס. חשיפת התלמידים למצבי פרופורציה ללא מספרים הינה הכרחית כדי לסייע להם לפתח חוש לפרופורציה.

שימוש בבעיות עם מספרים עבור חוש לפרופורציה

פיתוח חוש לפרופורציה אינו מוגבל רק לבעיות ללא מספרים כאלו. מרבית בעיות הפרופורציה שתלמידים יקבלו במהלך לימודם יהיו עם מספרים. מורים יכולים לפתח את החוש לפרופורציה ואת ההבנה של פרופורציות אצל תלמידים גם בבעיות מספריות. אחת הדרכים לשלב בעיות עם מספרים היא קודם לדון ולפתור בעיה ללא מספרים, כמו בעיות האופניים ומיתרי הפסנתר שהוצגו קודם. לאחר מכן, להרחיב את הדיון על יד הצגת בעיה דומה עם מספרים. גישה זו מאפשרת לתלמידים ליישם את החוש לפרופורציה שהם מפתחים במצב קונקרטי, עם מספרים.
אנו יכולים גם לעודד את תלמידינו להשתמש בחוש למספרים ולהתמקד קודם על הקשרים הבסיסיים במצבי פרופרציה עם מספרים. לדוגמה, הבעיה הראשונה שהוצגה במאמר זה מבקשת מן התלמידים לקבוע את משך הזמן שיקח לג׳ון לנסוע למרחק של 40 מייל כאשר נתון שהוא נסע 60 מייל ב- 2 שעות. במקום לעודד מייד את השימוש בדרך פתרון כמותית, כמו הפרוצדורה המקובלת או אסטרטגיית פתרון אחרת, התחילו בכך שתשאלו את התלמידים: ״האם אתם חושבים שג׳ון יסע למרחק של 40 מייל ביותר או בפחות משעתיים? מדוע אתם חושבים כך?״ שאלה מסוג זה משדרת לתלמידינו שאנו מבקשים מהם לחפש את ההגיון שבבעיה ובתשובות שיציעו עבורה. נוסף על כך, שאלה זו מדגישה את החשיבות של עריכת רפלקציה אודות טיב הקשרים הבסיסיים שבבעייה תחילה. אחרי שהתלמידים מגיעים למסקנה שנסיעה של 40 מייל תארך פחות זמן משום שהמרחק קצר יותר, תוכלו לשאול: ״האם מישהו יוכל להציע אומדן סביר של משך הזמן שתארך לג׳ון הנסיעה של 40 מייל? מדוע האומדן שאתה מציע הגיוני?״ לאחר שערכו רפלקציה על הקשרים, ניתן לבקש מן התלמידים לחשוב איזו דרך לפתרון מתאימה לדעתם כדי לפתור את הבעיה ולהגיע למספר המדויק של הזמן הנדרש לנסיעה של 40 מייל.

סיכום

מחקרים הראו ששימת דגש על הפרוצדורה המקובלת לפתרון בעיות פרופורציה – הצבת שני יחסים שאחד מהם מכיל נעלם וביצוע כפל באלכסון למציאת הערך החסר, יוצרת מגבלה לעידודם של התלמידים לחשוב על פרופורציות מתוך הבנה והגיון (Post, Behr, and Lesh 1988). מכל מקום, פרוצדורה מקובלת זו נילמדת על פי תוכנית הלימודים המסורתית בכיתות הביניים (ה׳ – ח׳). למרות שפרוצדורה זו שימושית ויעילה לפתרון בעיות פרופורציה, הרי שהיא מעודדת את התלמידים לשנן אותה ולא מחייבת אותם לחשוב על הכמויות השונות שמהן מורכבים היחסים שבבעיה, או לחשוב כיצד משתנה אחד מתייחס לשני. מאידך, אם מבקשים מתלמידים לחשוב על היחסים שבין המשתנים ולהפעיל חוש לפרופורציה, הם יכולים להתחיל להבין את הפרוצדורה המקובלת ואסטרטגיות אחרות המשמשות לפתרון בעיות פרופורציה.

מרבית בעיות הפרופורציה שתלמידים מקבלים הן כמותיות, והידע שלהם כיצד לפתור מצבי פרופורציה עם מספרים – חשוב. עם זאת, תלמידים צריכים להיות גם מסוגלים לחשוב ישירות על הקשרים הקיימים בין הכמויות שבמצבים אלו. בשעה שתלמידים פותרים בעיות פרופורציה עם מספרים, צריכים המורים לשאול שאלות שיסייעו להם להמשיך ולעשות רפלקציה על הקשרים הבסיסיים הקיימים בבעייה. אם נעודד סוג כזה של רפלקציה אצל התלמידים, הם יתחילו לרכוש את ההרגל לשאול את עצמם שאלות על הקשרים שבבסיסן של הפרופורציות המוצגות בפניהם, ובכך יחזקו את חוש הפרופורציה שלהם. תלמידים המשתמשים באופן פעיל בחוש לפרופורציה יכולים לתת משמעות הגיונית לקשרים שבבעייה ולקבוע אם תשובתם הסופית הגיונית, לאחר שהפעילו איזו שהיא אסטרטגייה כמותית, כמו הפרוצדורה המקובלת, או השיטה של קצב - יחידה (unit-rate). הדגשת חוש לפרופורציה יכולה גם לסייע לתלמידים להבין את ההגיון של, ולייחס משמעות מתמטית, למצבי יחס ופרופורציה. ככל שהחוש לפרופורציה שלהם גדל, התלמידים מעמיקים את הבנתם על יחסים ופרופורציות ונעשים מתמטיקאים חושבים טובים יותר.

ביבליוגרפיה

Billings Esther. “Qualitative-Based Reasoning of Preservice Elemetary School Teachers in Proportional Situations”. Ph.D.Diss., Northern Illinois University, 1998.

Cramer, Kathleen, and Thomas Post. “Proportional Reasoning.” *Mathematics Teacher* 86 (May 1993):404-7.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va,: NCTM, 2000.

Post, Thomas, Merlyn Behr, and Richard Lesh. “Proportionality and the Development of Prealgebra Understandings. In *The Ideas of Algebra*, K-12, 1988 Year-book of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Arthur F. Coxford, pp. 78-90. Reston, Va.: NCTM, 1988.