פיתוח חוש מרחבי על ידי מדידת שטח
Developing Spatial Sense through Area Measurement

מאת: Elizabeth Nitabach and Richard Lehrer

מתוך: Teaching Children Mathematics, Vol. 2, No. 8, April 1996, pp. 473-476

תרגום: מיכל סוקניק

המובן המקורי של גיאומטריה, "מדידת האדמה", מציע שמדידה היא דרך חשובה שבה ילדים יכולים להגיע להבנה ולפתח מתמטיקה של המרחב. פיתוח והבנה של מדידה מספק לילדים הזדמנויות לחקור שאלות מהותיות לגבי מרחב, כמו "כיצד צורות יכולות להיראות שונות, אך לכסות את אותה כמות של מרחב?" הוראה מסורתית של מדידות כללה מתן עזרה לילדים לרכוש יכולת פרוצדורלית של שימוש במכשירי מדידה, כמו סרגלים, ולימוד הילדים להשתמש בנוסחאות לחישוב מדידות של אורך, שטח, ונפח. אנו מאמינים שהוראה מסורתית זו בנושא מדידות אינה מצליחה לעזור לילדים לפתח הבנה של מרחב. לפיכך, במקום לסייע לילדים לרכוש יכולת פרוצדורלית של שימוש במכשירי מדידה, מטרתנו היא לעזור להם לפתח הבנה של מדידות.

מאמר זה מתמקד בעבודתנו עם העמיתים Carmen Curtis ו- Jean Gavin ותלמידי כיתה א' ו-ב', כדי לקדם את הבנתם המרחבית של הילדים, על ידי פתרון בעיות הכוללות מושגים מרכזיים של מדידה. אנו מתארים כמה מהמושגים החשובים המשמשים כאבני פינה של מדידות, ואחר כך מתארים שיעור אחד שבו Curtis היציגה שאלה, ובנתה על החשיבה של תלמידיה בדרכים שעזרו להם לחקור את היסודות של מדידת שטח. חקירה זו היא רק אחת מרבות, שבהן ילדים פיתחו רעיונות עיקריים לגבי מדידת שטח. בסוף מאמר זה, אנו מתארים בקצרה כמה חקירות וכיצד הן מתקשרות להתפתחות כזו. מושגים מרכזיים אלה היו שימושיים עבורנו בהבנת חשיבה של ילדים צעירים לגבי מדידות.

יסודות של מדידה

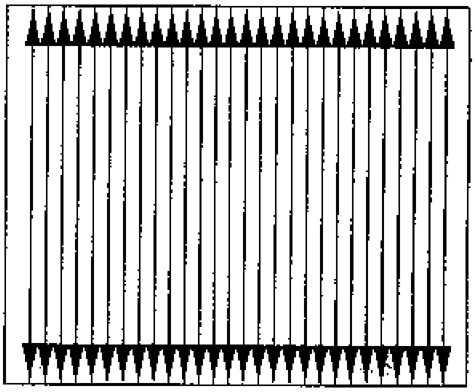
בסיס משותף של הנחות לגבי מדידה יכול להנחות מורה ביצירת בעיות לפתרון עבור הילדים, ובקבלת החלטות לגבי האינטראקציות עם ילדים בעת פתרון בעיות. הנחות אלה כוללות את הבאות:

1. יחידות מידה צריכות להתאים לעצמים הנמדדים

אנו רוצים שהילדים יבינו את ההכרח בשימוש ביחידה **שיש לה** אורך כדי למדוד אורך, ביחידה **שיש לה** שטח כדי למדוד שטח, וכן הלאה. עקרון זה הוא לעיתים קשה ללמידה עבור הילדים, בין השאר, משום שמרבית ההתנסויות המוקדמות שלהם עם מדידה עוסקות רק באורך, כך שיחידות של אורך נתפסות לרוב כניתנות ליישום באופן כללי. אנו מוצאים שילדים בתחילה מנסים למדוד מרחב על ידי שימוש במדד אורך, כמו סרגל. לדוגמה, כשילדים מנסים לראשונה למדוד שטח, הם לעיתים קרובות מסתפקים במדידת אורכי הצלעות של הצורה, או שהם מניחים שהם יכולים למדוד את האורך של צלע אחת של הצורה, כגון ריבוע; לרשום את הערך; להזיז מעט את הסרגל,

במקביל לצלע; ולחבר את הערך הנוכחי של האורך לקודם. כפי שרואים ב**איור 1**, הם ממשיכים בתהליך זה עד שהם מגיעים לצלע הנגדית של הצורה (Lehrer, Jenkins, and Osana, 1998). שיטה זו מניחה שלאורך יש תכונות של מילוי מרחב.

איור 1: רעיון של ילדים שלאורך יש תכונה של מילוי מרחב



רעיון קשור לכך הוא זה שילדים לעיתים קרובות מפגינים **הטייה לדומה** (resemblance bias) כשנותנים להם אמצעי המחשה כמו גזירות של ריבועים, מלבנים, וכדו', כדי למדוד שטח. ילדים חושבים שהשטח של ריבועים צריך להימדד עם ריבועים, של משולשים עם משולשים, וכן הלאה. דוגמאות אלה מציעות שהתפתחות הקשרים בין יחידות מידה לבין התכונה הנמדדת אינם מובנים מאליהם עבור הילדים.

2. יחידות מידה צריכות להיות זהות

אנו רוצים שילדים יבינו שכאשר משתמשים ביחידות חוזרות כדי למדוד פריט, כל היחידות חייבות להיות זהות. למרות שאקסיומה זו בנויה בתוך מכשירי מדידה מקובלים כמו סרגלים, שליטת הילדים בסוגים אלה של מכשירים מקובלים עלולה למנוע מהם לחשוב, למשל, האם אפשר לערבב אינצ׳ים בצד אחד של הסרגל עם סנטימטרים בצד האחר. ילדים לעיתים קרובות משתמשים בסרגלים לערבוב יחידות מידה שונות. לדוגמה, הם יכולים לומר שאורך של עצם הוא 17, כתוצאה מחיבור 12 מהצד של האינצ׳ים על הסרגל, עם 5, המידה של ״החתיכה הנוספת״ של העצם אותה קראו מהצד של הסנטימטרים. ראינו גם שילדים אחדים שהשתמשו נכון בסרגלים במצבים מסוימים, השתמשו גם ב**תערובת** של מהדקים מסוגים שונים כדי למדוד אורך של עצם. ילדים אלה יאמרו לנו שעצם הוא באורך של שמונה מהדקים, כשהם מכסים את אורכו בשלושה מהדקים גדולים, מהדק בינוני אחד, וארבעה מהדקים קטנים.

הנחה קשורה היא שיחידות מידה חייבות גם להיות **קונבנציונליות**, משום שמיסוד משותף של מוסכמות מסייע לתקשורת. לדוגמה, קל בהרבה לקנות לוחות עץ הנמדדים במטרים, מאשר ביחידה לא סטנדרטית, כמו מהדקים.

3. מדידה כוללת חזרה (iteration)

יחידות מידה עבור אורך הן **מחוברות** (concatenated) , או מונחות קצה אל קצה, כדי ליצור כמות. Piaget, Inhelder, and Szeminska (1960) הציעו שתהליך זה כולל אופרציות מנטליות של תת-חלוקה של ישר והזזת יחידה סטנדרטית לאורך ישר זה. מושג זה נראה טריביאלי, משום שילדים משתמשים לעיתים קרובות בסרגלים כדי למנות רצף של יחידות אורך. אולם, כשאורכו של עצם עובר את אורך הסרגל, או אם אין סרגל בנמצא, אז המושג של חזרה נעשה יותר בולט. ילדים אשר יכולים להשתמש בסרגלים באורך שנים-עשר אינץ׳ כדי למדוד את האורך של עצמים הקצרים מאורך של רגל, הם לפעמים חסרי אונים כשמשתמשים באותו סרגל למדידת עצמים ארוכים יותר.

4. לסולם מדידה (scale) יש נקודת אפס

השימוש במכשירי מדידה דורש קביעה של נקודת אפס והכרה בכך שמספרים נוספים מלבד אפס יכולים לשמש לתפקיד זה. לדוגמה, כאשר מודדים עץ באורך של שמונה אינצ׳ים, אם קצה אחד של העץ מיושר עם הסימן של שני אינץ׳ על הסרגל, והקצה האחר עם הסימן של עשרה אינץ׳, אז הסימן של שני אינץ׳ משמש כנקודת האפס, כך שהסימן של שלושה אינץ׳ מתלכד עם יחידת המידה הראשונה של האורך, הסימן של ארבעה אינץ׳ עם השנייה, וכן הלאה. השימוש הקונבנציונלי בסרגלים מטשטש לעיתים קרובות תכונה זו של המדידה.

5. מדידה מאופיינת על ידי אדיטיביות

ניתן להרכיב יחידות מידה כך, שלדוגמה, השטח של צורה יכול להיקבע על ידי חיבור השטחים של תתי-האזורים של הצורה. ניתן להשוות את השטחים של צורות שונות על ידי פירוק מנטלי או פיזי של צורה אחת לתת-אזורים, ואחר כך סידור מחדש או הרכבה של תת-אזורים אלה, כך שאפשר להחליט אם הם גדולים יותר, קטנים יותר, באותו גודל, או חופפים לצורה שנייה. אנו מצאנו שילדים בכיתות הנמוכות מסוגלים להבין ולהשתמש בתכונה זו של מדידה. ילדים אמרו משפטים כמו ״הריבוע הזה הוא באותו גודל כמו המשולש הזה, כי אפשר לגזור את המשולש לשני משולשים קטנים ולשים אותם ביחד כדי ליצור את הריבוע הזה.״ מאחר ולילדים רבים בגיל ביה״ס היסודי יש הבנה זו, אנו מאמינים שמדידת שטח לא צריכה להידחות לכיתות גבוהות יותר כאשר מניחים שהילדים מוכנים.

6. מדידת שטח מבוססת על מילוי מרחב

כדי למדוד שטח של אזור, יחידות המידה צריכות לרצף באופן מלא אזור זה. התצפיות שלנו מציעות שילדים צעירים משתמשים לעיתים קרובות בקריטריון של יצירת גבול, ולא בקריטריון של מילוי מרחב כדי למדוד שטח. לדוגמה, במדידת שטח של ריבוע, הם יכולים לראות כמה מטבעות של סנט ייכנסו בתוך הריבוע. הם נוטים לוודא היטב שאף מטבע או חלק של מטבע לא יצא מחוץ לצלעות הריבוע, אך אינם מוטרדים כלל מהרווחים שבין המטבעות.

מדידת שטח

בשעת העבודה עם ילדים על מושגים של שטח, אנו חושבים על היסודות המתוארים קודם, בתכנון מטלות המסייעות לילדים לפתח את רעיונותיהם לגבי שטח. Carmen Curtis גם כן חושבת על יסודות אלה, והיא תכננה ספירלה של מטלות, כולן קשורות ליחידות בנושא מסוים, על מנת לעזור לילדים לפתח את רעיונותיהם על שטח ומדידתו. היא התחילה עם בעיה הכוללת שלושה מלבנים, שתוכננו לעזור לילדים לחקור את האדיטיביות של שטחים. בעיה זו לא כללה בהתחלה שום יחידת מידה; הילדים לא התבקשו, ולא נאמר להם, לחשוב על המרחב במונחים של אינצ׳ים ריבועיים או כל יחידה אחרת. תוך כדי התקדמות השיעור, יחידת מידה עלתה מתוך חקירות הילדים, וההנחייה המיומנת של Curtis.

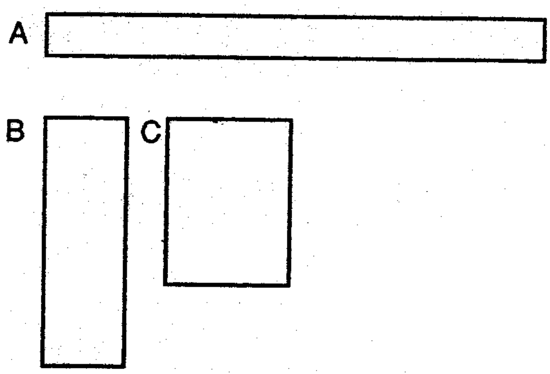
שלושה מלבנים

תיאור הבעיה

Curtis היציגה שלושה “quilts” (צורות מהן מכינים שמיכת טלאים) מפסי נייר, אותם הידקה ללוח. ההקשר של בעיית ה-quilt הסתמך על ההתנסויות הקודמות של הילדים, בעיצוב quilts בהם השתמשו בטרנספורמציות של שיקופים, הזזות וסיבובים של ריבועים בסיסיים בעלי גודל זהה, על מנת ליצור סדרה של quilts שונים. היא המשיכה בעיה זו בהקשר נוסף בכך שציינה שהיא עבדה על שלושה quilts, ״אבל כשתפרתי את הטלאים האלה יחד, קבלתי שלוש צורות שנראות שונות מאד זו מזו. מה שאני רוצה לדבר עליו זה כמה מרחב כל אחת מצורות אלה מכסה.״ למרות שלא השתמשה במילה **שטח**, Curtis הגדירה שטח לצורך דיון זה כ״כמה מרחב ייתפס על ידי צורה״.

היא בחרה צורות אלה כך שכל quilt היתה מורכבת מ״ריבועים בסיסיים״ בסידור שונה (1 x 12, 2 x 6, ו- 4 x 3 ריבועים בסיסיים, בהתאם). הילדים לא היו מודעים לכך שכל quilt הורכב מריבועים בסיסיים, והריבועים הבסיסיים לא סומנו בכל צורה שהיא. ה- quilts הוכנו מחתיכות קרטון ללא כל סימני קווים בתוכם. Curtis סימנה באות כל צורה שונה A, B, ו- C (ראו **איור 2**).

איור 2: שלוש צורות של ״quilt״ שהוצגו על ידי Curtis



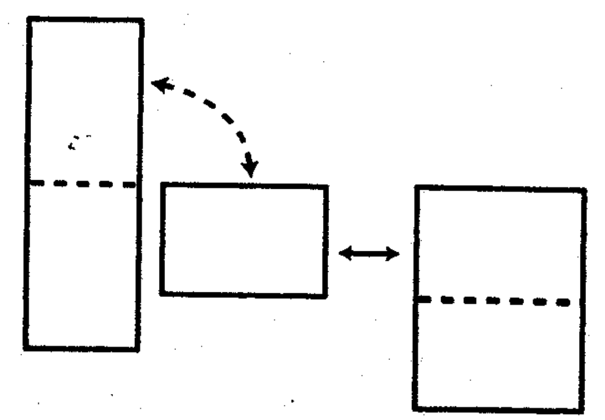
הרציונל של Curtis בתכנון מטלה זו היה מעוגן היטב בהמשגות שלה על חשיבת התלמידים. היא ציינה שהיא ציפתה מהתלמידים להתנסות בקונפליקט בין המשגות של שטח לבין תפיסות ויזואליות: "ברגע שהם עושים ניבויים [לגבי איזה מכסה הכי הרבה מרחב, אני מצפה שהם יאמרו,] 'אני חושב שצורה C תתפוס יותר מרחב. לא, לא, לא. זה A. תראו כמה שהיא ארוכה.' אבל כשאני שואלת אותם, 'איך אפשר לדעת?' מה הם יאמרו? האם הם יציעו לכסות אותם? האם הם יציעו למדוד סביב הקו החיצוני? האם הם יציעו לקפל לחצי? [ואני אומר להם] אתם מסתכלים על שלוש צורות אלה, יש לכם רעיונות שונים לגבי איזו תכסה יותר מרחב, אך כיצד אתם הולכים להוכיח למישהו שמה שאתם חושבים הוא נכון?"

היא ציפתה שהילדים יחשבו שצורות מסוימות נראות גדולות יותר מאחרות ואחר כך לאתגר את התפיסות שלהם עם ההבנות הנבנות שלהם על שטח. היא תפסה שקונפליקטים אלה יפתחו חלון לתוך החשיבה של תלמידיה. Curtis אף ציינה שהמטלה נתנה הזדמנות לחשיבה על תכונות הקביעות וההרכבה האדיטיבית של שטח. היא אמרה לנו "בסוף השיעור, חלק מהם יגידו, 'זה נראה כאילו זה תופס יותר מרחב, אבל בעצם אפשר פשוט להזיז את המרחב הזה מסביב ולעשות שזה יתאים'".

חשיבת התלמידים

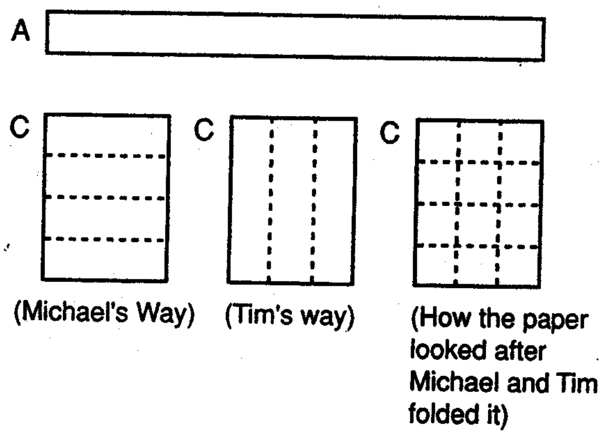
התלמידים התחילו בטענה שצורה B או צורה C יכסו את כמות המרחב הגדולה ביותר כי הם היו "שמנים יותר" או "נראו גדולים יותר". אולם תלמידים אחדים לא הסכימו, וחשבו שאולי צורות B ו-C היו בעצם באותו הגודל. הם ניסו לשכנע את חברי כיתתם על ידי הפנייה לחפיפה אדיטיבית, במילים אחרות, על ידי שבירה וסידור מחדש של המרחב של צורה אחת כך שהיא תתאים בדיוק לשנייה. תמונה של עבודתה של מישל מופיעה **באיור 3**. היא הסתכלה על B ו- C וחשבה שאם היא תקפל את B לחצי ותסובב אותו, הוא יכסה בדיוק חצי של C. היא ציינה שאם מסובבים חצי של B למצב מאוזן, הוא יכסה את החצי העליון של C. הילדים המשיכו לחקור חלוקות אחרות של B ו- C שיוכלו להוביל לאותה תוצאה.

איור 3: הסידור מחדש של מישל של B ו- C



כשהכיתה היתה מרוצה מכך ש- B ו- C אכן מכסים את אותה כמות מרחב, היא הסבה את תשומת ליבה ל- A. העבודה של מיכאל מופיעה **באיור 4**. הוא טען, "אפשר להפוך את C ל- A", והדגים ע"י כך שקיפל את C לארבעה חלקים שווים, כל אחד ברוחב של A. הוא שם את ה"פס" הזה בקצה העליון של A והשתמש באצבעו כדי לסמן את הקצה התחתון. אחר כך הוא הזיז את כל הפס מתחת לאצבע שלו, וכשהוא חוזר על עצמו, סימן ארבעה חלקים שווים של A. Curtis אמרה, "מיכאל עכשיו הראה לנו שאם נחלק את C לארבעה חלקים שווים, נוכל ליצור את A. טים חושב שיש לו דרך אחרת של הפיכת C ל- A." טים קיפל את C לשלושה פסים ארוכים, במקום לארבעה פסים קצרים. (ראו **איור 4**). כשטים סיים את ההדגמה שלו של חפיפה אדיטיבית, ופתח את הקיפול של C, קווי הקיפול חילקו אותו בברור למערך של ארבעה-על-שלושה ריבועים. הכיתה לא שמה לב לתוצאה של דוגמה זו, עד ש- Curtis העלתה את השאלה הבאה: "איך זה יכול להיות שלמיכאל זה לקח ארבעה פסים ולטים לקח רק שלושה?"

איור 4: טכניקות קיפול שונות בהן השתמשו כדי להראות ש- C מכסה אותו מרחב כמו A



טים: [ספר] אחת, שתיים, שלוש,....שתים-עשרה.

Curtis: שתים-עשרה מה?

טים: שנים עשר ריבועים! זה יוצר quilt!

תלמיד שני הצביע בהתלהבות על A ואמר, "אז זה לוקח שנים –עשר ריבועים לעשות **את זה**." במידה מסוימת, שאלתה של Curtis עודדה מעבר מאסטרטגיות של הרכבה ואדיטיביות של אזורים, ליחידות מידה. הילדים דיברו במונחים של גזירת צורות וסידורן מחדש, ואחר כך התחילו לדבר על מספר הריבועים הבסיסיים בכל מלבן. הילדים המשיכו ואימתו שכל אחת משלוש הצורות יכולה להיות מורכבת משתים-עשרה יחידות ריבועיות בדיוק, או ריבועים בסיסיים, יחידות המידה בהן השתמשו בשיעור quilt הקודם שלהם. לאחר מכן Curtis ביקשה מהילדים ליצור "צורות רבות ככל האפשר" עם שנים-עשר ריבועים בסיסיים. היא רצתה לאפשר לילדים לחקור בחופשיות את הרעיון שהמראה יכול להיות מטעה – צורות שנראות שונה יכולות לכסות את אותה הכמות של מרחב.

שיעור זה סלל לתלמידים את הדרך לחקירת יסודות המדידה והקשר בין שטח וצורה. בסדרת השיעורים הבאה, הילדים חקרו את אופן מדידת השטח של צורות לא רגילות. באחד מהשיעורים, הילדים ניסו לסדר על פי הגודל, כמה מרחב כוסה על ידי כף היד של כל אחד מהילדים. בשיעור אחר, הם סידרו ע״פ גודל את השטחים של גזירות של ״איים״ שהם ציירו. בעיות אלה עוררו שאלות לגבי ההמצאה של יחידות מתאימות למדידת שטח, והעלו את הנושא של ״מה לעשות עם השאריות״, מאחר ותוצאת המדידה של צורות אלה לא היתה מספר שלם. לקראת סוף השנה, Curtis היציגה את הרעיון שניתן לחשוב על שטח כעל כפל של אורכים. ההנחיה של Curtis עזרה לתלמידים לפתח נוסחה עבור השטח של ״כלובי גן חיות״ מלבניים. השיעור האחרון בסדרה, התמקד אף הוא בשטח של כלובי גן-חיות, אולם במקרה זה, נושאים של קנה מידה ושימוש בדיאגרמות סימבוליות הועלו בפני הילדים. למרות שבעיות שונות ורצפים שונים של בעיות יכולים להיות מוצגים על מנת להשיג רבות מאותן המטרות, הלקח החשוב עבורנו היה ההופעה ההדרגתית והמתפתחת של הבנת התלמידים, כשההוראה התמקדה במתן עזרה על מנת לפתח יסודות חזקים לגבי רעיונות על מדידה.

רעיונות למחקר פעולה

1. נסי את השיעור של Curtis עם תלמידים. אל תתני לתלמידים להשתמש בסרגלים כשעליהם להחליט לאיזה מלבן יש את השטח הגדול ביותר. אם לא השתמשת במונח **שטח** עם תלמידיך, את יכולה לשאול אותם, ״איזה מהמלבנים האלה מכסה הכי הרבה מרחב?״ תרגיל זה עשוי להיות מעניין במיוחד עבור אלה שהתאמנו במציאת שטח של צורות עם סרגלים ונוסחאות סטנדרטיות. האם יש להם דרכים אחרות של חשיבה על כמות המרחב באזור?
2. אם פעילות זו קלה מידי עבור כיתה מסוימת, שני את הצורות לריבוע 4 x 4, משולש שווה שוקיים ישר זווית עם ניצבים של 4 x 4, המוטה כך שהיתר מאוזן, ומלבן של 6 x 2. כיצד התלמידים מנמקים לגבי הגודל היחסי של צורות אלה? האם יש להם דרכים כלשהן לתאר בכמה הריבוע גדול יותר מהמשולש, או בכמה המלבן קטן יותר מהריבוע?
3. תלמידים יכולים גם להתאמן בסוג זה של חשיבה עם צורות לא רגילות. בקשי מהתלמידים למצוא כיצד אפשר לסדר לפי הגודל את השטח של כף היד של כל אחד מילדי הכיתה. הסתכלי ברשימת יסודות המדידה כדי לראות אם פעילות זו יכולה לגלות משהו על הבנתם של התלמידים את המדידה. כיצד התלמידים מתחשבים ביחידות של השארית כשהם מוצאים את השטח של כף היד?

מקורות

Lehrer, Richard, M. Jenkins, and H. Osana. "Longitudinal Study of Geometric Conceptions." In *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, edited by R. Lehrer and D. Chazan, Hillsdale, N.J. Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

Piaget, Jean, Barbel Inhelder, and Alina Szeminska. *The Child's Conception of Geometry*. New York: Basic Books, 1960.