תוכנית להוראת יחס ופרופורציה

A Design for Ratio and Proportion Instruction

מאת: Dor Abrahamson and Christian Cigan

הופיע ב: Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 8 No. 9, May 2003. pp. 493-501
תרגום: ברכה סגליס

מאמר זה מתאר שיטה להוראת יחס ופרופורציה בכיתה ה'. יחידת הלימוד שלנו עוסקת במסלול למידה המתחיל בחזרה אל הכפל כחיבור חוזר. לאחר מכן היא חוקרת דגמים בלוח הכפל ונעה לכוון מושג היחס כטור בודד מתוך לוח הכפל. אחר כך תלמידים דנים ביחס כשני טורים מקושרים של יחס, או בטבלת יחס, ומתבוננים בשתי שורות מתוך טבלת יחס או מתוך רביעיית פרופורציה. כהקדמה לנושא יחס ופרופורציה בכיתה ה', יחידה זו מתמקדת במקרים של מספרים שלמים, כלומר, מצבים בהם סימן השאלה ב- $a : b = c : ?$ הוא מספר שלם. דגש זה מקדם חשיבה כפלית (Multiplicative reasoning) בסביבה מספרית מתפתחת המתאימה לכיתה ה'.

מבוא ליחידה

היחידה מתחילה עם הרעיונות הפשוטים של חיבור וכפל. מבוא זה יוצר קשר חזק בין הרעיונות המורכבים של יחס ופרופורציה לבין המושגים המתמטיים והפעולות שתלמידי כיתה ה' כבר יודעים, ומתבסס על כישורים אלה. במהלך היחידה, מעודדים את התלמידים להסתמך על הידע האינטואיטיבי ועל הידע המתמטי שלהם ולערוך דיונים בהם הם מקשרים בין התנסויות מן העולם האמיתי לבין מבנים מתמטיים. מטרת היחידה היא לבסס את מושגי היחס והפרופורציה של התלמידים על הפרשנות שהם נותנים להתנסויות בעולם האמיתי (סיטואציות סיפוריות) מחד, ולייצוגים מתמטיים סימבוליים (טבלאות, מספרים וסימונים) מאידך. אנו מאמינים שפרשנות הדדית של סיטואציות וייצוגים, מטפחת כלים מושגיים חזקים המאפשרים התמודדות ופתרון של בעיות יחס ופרופורציה, בין אם הן עוסקות רק במספרים ובין אם הן מוצבות בתוך קונטקסט של בעיות מילוליות.

התכנית של יחידת הלימוד התפתחה כתוצאה של הדאגה שלנו לגבי החשיבה החיבורית השגויה (Additive reasoning) של תלמידים בנושאי יחס ופרופורציה. חשיבה כזו מובילה להנחות שגויות; למשל, "היחס $8 : 6 = 5 : 3$ משום ש $3 + 2 = 5$ ו $8 - 2 = 6 + 2$". בתיכנון היחידה שלנו, חיפשנו דרך לקשר מצבים של יחס ופרופורציה בעולם, לניתוח של לוח הכפל על מנת לקדם את החשיבה הכפלית של תלמידים. בתחילה, התלמידים התמקדו על מצבי חיבור חוזר כדי למלא טבלאות של יחס ולפתח הבנה של לוח הכפל. לאחר מכן הם עברו לאסטרטגיות פתרון כפליות כדי לפתור בעיות מילוליות של יחס ופרופורציה. מאמר זה מציג בתחילה סקירה כללית של היחידה שלנו, ולאחר מכן דן בתוצאות שהתקבלו בכיתה ה'.

ארבע הטבלאות הקשורות שבהן אנו משתמשים ביחידה זו – לוח הכפל, טבלת הקצב (rate table), טבלת היחס (ratio table), ורביעיית הפרופורציה – מופיעות **באיור 1**.

איור 1: מסגרת מתוכננת להמשגת יחס ופרופורציה. (א) לוח הכפל, (ב) טבלת קצב, (ג) טבלת יחס, (ד) רביעיית פרופורציה. התאים המודגשים מתייחסים לבעיה המובאת כדוגמה.

בכל יום רובין וטים חוסכים כסף בקצב קבוע.
אם, ביום מסוים, לרובין יש 6 דולר ולטים יש 10 דולר כמה דולר יהיו לטים כאשר לרובין יהיו 21 דולר ?

	רובין 3	טים 5	
2	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	2
7	$\boxed{21}$	$\boxed{35}$	7
	3	5	

(ד) רביעיית פרופורציה

רביעיית פרופורציה כשתי שורות נבחרות מתוך טבלת היחס (שורות 2 ו - 7)

רביעיית פרופורציה כ "לוח כפל זעיר"

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	$\boxed{6}$	8	$\boxed{10}$	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	$\boxed{21}$	28	$\boxed{35}$	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(א) לוח הכפל

קצב כעמודה יחידה של לוח הכפל

בכל יום, רובין שמה 3 דולר בקופת החסכון שלה

1	3
0	0
1	3
2	$\boxed{6}$
3	9
4	12
5	15
6	18
7	$\boxed{21}$
8	24
9	27
10	30

(ב) טבלת קצב

טבלת יחס כשתי עמודות קצב סימולטניות

בכל יום רובין שמה 3 דולר בקופת החסכון שלה, וטים שם 5 דולר בקופת החסכון שלו.

Day 1	3 :	5
0	0	0
1	3	5
2	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$
3	9	15
4	12	20
5	15	25
6	18	30
7	$\boxed{21}$	$\boxed{35}$
8	24	40
9	27	45
10	30	50

(ג) טבלת יחס

הפסקאות הבאות מדגישות כיצד אנו מציגים ודנים עם התלמידים בכל טבלה, תוך שימוש במצבי סיפור העוסקים בפרופורציה, כדי ליצור הבנה עקבית ומשולבת.

חקירת דגמים בלוח הכפל

אנו מתחילים את היחידה שלנו בבקשה שהתלמידים "ימצאו דגמים מעניינים או עובדות מעניינות בלוח הכפל". תלמידים מגלים דגמים שלא ראו קודם ומסמנים אותם בצבע, כפי שניתן לראות ב**איור 2**. לוח הכפל עשיר בדגמים של שורות וטורים או אלכסונים שחוזרים על עצמם, בהם קבוצות של מספרים החוזרות על עצמן, אבל משתנות במיקום שלהן (ראה **איור 3**). הגירסה הפשוטה ביותר של דגם זה היא שורות וטורים "תאומים"; למשל, לשורת ה- 3 (3, 6, 9, . . . ,30) יש "תאום" בטור ה- 3 (3, 6, 9, . . . ,30). תלמידנו מצאו דגמים רבים אחרים, כמה מהם פחות מובנים מעליהם, כמו הסימטריה בלוח לאורך אלכסון המרובעים (1, 4, 9, . . . ,100). דגמים אחרים משתמשים במערכים מלבניים של תאים הכוללים את התא של 1 כפינה השמאלית העליונה של המלבן, וכל תא אחר, כמו למשל התא של 45, כפינה הימנית התחתונה שלו. המספר בפינה הימנית התחתונה אומר כמה תאים יש בתוך המערך. תגלית זו הובילה לדיון אודות שטחים של מלבנים.

איור 2: דגמים בלוח הכפל של שני תלמידים

לאחר חקירה זו, התמקדנו על ה"דגם" הפשוט ביותר שבלוח, זה שאנו מצפים מכל התלמידים להכיר, אבל, מצאנו שרבים אינם מבינים אותו לאשורו. בכל שורה או טור של לוח הכפל, הערך הראשון מכתיב את הערך לפיו סופרים בדילוגים; למשל, בטור ה- 3 אנו סופרים בשלשות. תלמידים יכלו בקלות לשחזר את הטור של 3 על ידי שינון וכתיבה של הדילוגים ב- 3, אבל ברגע שביקשנו מהם לפרק את הספירה בשלשות לרצף של פעולות חיבור נפרדות, תלמידים בילבלו בין המחובר לבין הסכום הכולל המצטבר. בילבול זה מנע את גיבוש ההבנה שלהם אודות הכפל כחיבור חוזר. הפתרון הדידקטי שלנו היה להביא את התלמידים לפרש את הטור של 3 כמצב של קצב.

איור 3: דוגמאות של דגמים מרחביים - מספריים בלוח הכפל

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	48	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	48	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	48	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	48	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ראיית טור אחד כמצב של קצב

כדי לעזור לתלמידים להבין את הכפל כחיבור חוזר, נתנו להם את הבעיה הבאה:

קופת החיסכון של רובין ריקה. החל מהיום, רובין תשים בכל יום 3 דולר בקופה שלה. כמה כסף יהיה בקופת החיסכון שלה ביום ה- 7?

ההחלטה של רובין לחסוך 3 דולר בכל יום הינה דוגמה לכל מצב בעולם האמיתי שבו כמות כלשהי מתחילה מ- 0 ומצטברת על ידי גידול קבוע המקושר ליחידת זמן קבועה. (יש לציין, שבעבודתנו עם תלמידי כיתה ה', הוספנו מידי פעם את ה- 0 ללוחות הכפל כדי לקשור אותם למצבי ההתחלה, אם כי ברוב הפעמים, בחרנו לא לסטות מהפורמט הסטנדרטי של לוח הכפל, שאינו כולל 0. באופן זה, מנענו את הקושי בנושא של חלוקה ב- 0.) ניתן ללמד מצבים של הצטברות, כמו בבעיה שתיארנו קודם,

כמצבים של קצב עם סכום כולל מצטבר, כשהתהליך של הצטברות מעבר לזמן ניתן לייצוג כטור מתוך לוח הכפל, כמו 9, 6, 3 וכן הלאה , כפי שניתן לראות ב**איורים 1 ו- 3**. המספרים בטור זה, המתפרשים כסכום כולל מצטבר, יכולים באותה מידה לייצג הצטברות במצבי קצב אחרים, כמו למשל סנאי שאוסף 3 אגוזים בכל שבוע; צמח שגדל כלפי מעלה מגובה אפס, או מגובה פני הקרקע, בקצב של 3 ס"מ בחודש; זקן הגדל כלפי מטה מסנטרו של אדם בקצב של 3 אינץ' בשנה; אדם שרץ במסלול ריצה מנקודת ההתחלה בקצב של 3 ירד בשנייה; וכן הלאה. השתמשנו בשפה של התלמידים כדי לקשר בין הספירה שלהם בדילוגים לבין הסיטואציות. התייחסנו לגידול הקבוע של מצב הקצב כאל "המספר שמוסיפים" או "המספר הגדל" ולכל אחד מן הערכים הבאים כאל "הסך הכל", הסכום אחרי כל הגדלה.

למרות שזה נראה לכאורה פשוט לפרש את טור הקצב כמצב של גידול קבוע, תלמידים בלבלו לעיתים קרובות בין הגידול הקבוע x , לבין הסכום הכולל המצטבר. במילים שלהם, תלמידים בלבלו בין "המספר הגדל", או "מה ששמים"; כמו 3+, 3+, 3+, . . . , לבין "מה שאתה מקבל"; כמו, 3, 6, 9, ... למשל, תלמידים שניסו לפרש את טור ה- 3 בהקשר לסיפור של רובין אמרו, "ביום הראשון, רובין שמה בקופה שלה 3 דולר, וביום השני היא שמה 6 דולר". הבנת ההבחנה ביניהם חשובה למעבר בטוח מחיבור אל הרעיון של כפל כחיבור חוזר. מצבי קצב פשוטים יכולים לספק קונטקסט מגשר להבנת הרעיון של הוספה לפי ערך קבוע.

תוך שימוש בסיפורים אחרים של קצב, עבדנו עם התלמידים עד שהיו מסוגלים למלא טבלת קצב הקשורה לסיטואציה. מצאנו, שהתחלה עם כתיבה של פעולות הגידול (כמו שרואים בסימנים של 3+ החוזרים על עצמם בתרשים ש**איור 4a**), ומאוחר יותר, השמטת סימונים אלה, והשארתם באופן סמוי בהקשר של הקצב, תמכה ביכולתם של התלמידים לפרש ולמלא את הטור במונחים של סיפור הקצב.

הצעד הבא היה לעבור מהבנה חיבורית להבנה כפלית של סיטואציות ושל לוח הכפל. המספרים בטור 1 בלוח הכפל, גדלים במקביל למספרים בכל טור אחר; במילים אחרות, הם עולים תוך שימוש בספירה בדילוגים של 1, ומציינים כמה כמויות של 3 דולר רובין צברה, או כמה הוספות של 3 עשינו בטור של ה- 3. במובן הזה, המספרים בטור של 1 הם הכופלים של 3, וכל אחד מהם מציין מספר בטור של ה- 3, את כפולת ה- 3 שלו, שנמצאת בשורה התואמת. לדוגמה, אנו יכולים לחשוב על 6 בטור של ה- 1 כמציין את 18, כפולת ה- 3 שלו, בשורה התואמת שבטור של ה- 3. "הצטרכנו שש הוספות של 3 כדי להגיע ל- 18".

כדי לציין את הגורמים, התמקדנו במספר הגדל שבראש הטור, כמו 3, בסיפור של 3 דולר ליום, ובכופל שבטור השמאלי, כמו 6, שהוא היום ה- 6; כדי לציין את המכפלה, התמקדנו בכמות הכוללת המצטברת, כלומר, $18 = 6 \times 3$. תלמידים תרגלו פירוש כפלי זה של טבלת הקצב על ידי מילוי טבלאות קצב הממולאות בחלקן. תלמידים שיחזרו טבלאות שבהן המספר העליון היה חסר (הגידול הקבוע) על ידי חלוקת המכפלה (למשל, 21) בגורם של היום המתאים (7). ההבנה של מצבי הצטברות אלו ושל טבלאות הקצב כטורים מתוך לוח הכפל היתה הכרחית. תלמידים פחות מתקדמים השתמשו בהתחלה בלוח כפל לסוג זה של פתרון בעיות, ובכך הרחיבו את יכולתם לעשות קשרים בין תבנית מתמטית זו לבין בעיות פרופורציה.

איור 4: יחס המודגם כשני קצבים "הצועדים יחד בזמן"

Day +1	Robin $ +3	
Day 0	0	+3
Day 1	3	+3
Day 2	6	+3
Day 3	9	+3
Day 4	12	+3
Day 5	15	+3
Day 6	18	+3
Day 7	21	+3
Day 8	24	+3
Day 9	27	+3
Day 10	30	

(a) Rate Table

Day +1	Tim $ +5	
Day 0	0	+5
Day 1	5	+5
Day 2	10	+5
Day 3	15	+5
Day 4	20	+5
Day 5	25	+5
Day 6	30	+5
Day 7	35	+5
Day 8	40	+5
Day 9	45	+5
Day 10	50	

(b) Rate Table

	Rob $ 3	: Tim $ 5
Day 0	0	0
Day 1	3	5
Day 2	6	10
Day 3	9	15
Day 4	12	20
Day 5	15	25
Day 6	18	30
Day 7	21	35
Day 8	24	40
Day 9	27	45
Day 10	30	50

(c) Ratio Table

יחס: שני מצבי קצב מקושרים

בסיטואציות של בעיות, אנו מקשרים שני קצבי יחידה ליחס אחד. במילים אחרות, אנו חושבים על 3 דולר ליום ועל 5 דולר ליום כ"צועדים יחד בזמן" ומקבלים 3 דולר ל- 5 דולר. אנו מייצגים קשר זה כשתי טבלאות קצב מקושרות ההופכות ליחס יחיד (ראה **איור 4**). הבעיה הבאה ממחישה מצב מסוג כזה:

בכל יום, רובין שמה 3 דולר בקופת החיסכון שלה, וטים שם 5 דולר בקופת החיסכון שלו. כאשר לרובין יהיו 21 דולר בקופה שלה, כמה דולר יהיו לטים בקופה שלו?

האתגר של תלמידים בהבנת מושג היחס הוא, שלמרות שהגידול בכל טור הוא קבוע (במקרה זה 3 ו – 5), הרי שהבדל בין שני הסכומים בכל תוספת, או יום, אינו קבוע. למשל, השוו 5 : 3, שבו יש הפרש של 2, ו- 10 : 6 , שבו יש הפרש של 4. הבנה שגויה של "אותו הפרש" מדגימה את מה שהתכוונו קודם כשדיברנו על **חשיבה חיבורית**. בגלל שהבנה שגויה זו כל כך נפוצה, שיטה טובה להערכת מידת ההבנה של התלמידים בנושא יחס ופרופורציה היא על ידי בדיקה האם יש להם עדיין בילבול בנושא זה.

מצאנו ששיטות ההדגמה היעילות ביותר הן ההתנסויות הויזואליות והפיזיות. לדוגמה, כדי לייצג שני פרחים הגדלים בקצבים שונים, בקשנו מן התלמידים להניח את ידיהם על שולחן הכתיבה שלהם, ולאחר מכן להרים אותן באופן סימולטני, כשיד שמאל עולה ב- 2 ס"מ בכל פעם ויד ימין עולה ב- 3 ס"מ בכל פעם. אם תלמיד הרים את שתי ידיו והמרחק ביניהם היה קבוע, דרשנו ממנו "לגדול לאחור" עד שיגיע אל השולחן. אם התלמיד הגיע עם יד אחת לשולחן ויד אחת עדיין היתה באוויר, שאלנו אותו איך מצב כזה יתכן, אם כשהתחלנו שתי הידיים היו בו זמנית על השולחן. דוגמאות אחרות כללו תחרות ריצה בהילוך איטי לאורך הכיתה, כאשר המורה רץ בקצב של 2 ירד בשניה והתלמיד המתחרה בו רץ בקצב של 3 ירד בשנייה. התלמידים היו סקרנים ונלהבים להיווכח שהמרחק בין ה"רצים" גדל משנייה לשנייה. העובדה שהיו מופתעים הוכיחה לנו שסוג כזה של הדגמה הכרחי אם רוצים שתלמידים יפתחו חוש למספרים עבור יחס ופרופורציה.

סיפורי הפרופורציה המועדפים על התלמידים, כמו הצמחים הגדלים ותחרות הריצה, הוצגו בכיתה על גבי פוסטר. במהלך לימוד היחידה, תלמידים פנו לפוסטר זה כאשר בקשו לתת משמעות לבעיה מילולית או מספרית שעסקה בפרופורציה. קונטקסטים משמעותיים אלו עזרו לתלמידים לתת משמעות לרביעיית הפרופורציה, שהינה בעצם שתי שורות מתוך טבלת היחס.

שימוש ברביעיות פרופורציה כדי לפתור בעיות פרופורציה מילוליות באופן משמעותי

הצגנו לראשונה את רביעיית הפרופורציה באמצעות הבעיה הבאה:

> רובין וטים מתחילים לחסוך כסף באותו יום. כל ילד חוסך אותה כמות של כסף בכל יום, אבל הכמויות עבור כל ילד הן שונות. לאחר מספר ימים, לרובין יש 6 דולר ולטים יש 10 דולר. ביום אחר לאחר מכן, לרובין יש 21 דולר. כמה כסף יש אז לטים?

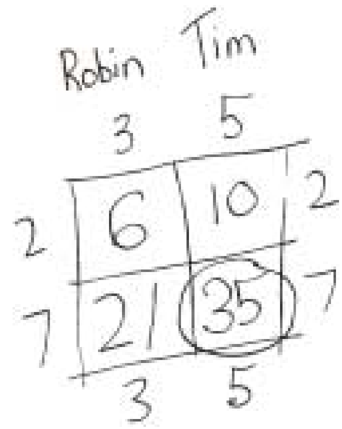
רביעיית פרופורציה לוכדת שתי "מסגרות זמן" (שתי שורות) מתוך טבלת יחס, כמו למשל היום ה- 2 והיום ה- 7 בסיפור הפרופורציה על רובין וטים (ראה **איורים 1 ו- 5**). כדי לפתור רביעיית פרופורציה שיש בה ערך חסר באופן אדיטיבי (חיבורי), היינו צריכים לשחזר את כל טבלת היחס ולהשתמש בגידול הקבוע שבכל טור. מטלה כזו גוזלת זמן רב. משימה הרבה יותר קלה היא להתמקד רק על הערכים של הבעיה שברביעיית הפרופורציה, ולהתייחס ל לערכים אלו כגורמים כפי שהם מתפרשים מהמערך של טבלת היחס כולה או של לוח הכפל. כאשר תלמידים הסבירו את פתרונותיהם לבעיה זו, הם השתמשו בלוח כפל גדול שהיה בכיתה, כדי לקשר בין הגידול האדיטיבי שבטבלת היחס ובלוח הכפל, לבין הפתרונות שלהם שברביעיית הפרופורציה.

איננו יכולים כמובן, להסתמך תמיד על הימצאות של לוח כפל בסביבה בכל פעם שאנו פותרים בעיה של יחס ופרופורציה. אנו צריכים גם שיטה המאפשרת לנו להכליל את הטכניקה שלנו לשברים, למספרים גדולים, או לאלגברה. אולם, איננו צריכים לפנות אל לוח הכפל באופן ויזואלי, אלא רק באופן מנטלי.

איור 5: תבנית פתרון של רביעיית פרופורציה לבעיות יחס ופרופורציה עם ערך חסר, שמקורה בלוח הכפל

רובין וטים מתחילים לחסוך כסף באותו יום. כל ילד חוסך אותה כמות של כסף בכל יום, אבל הכמויות עבור כל ילד הן שונות. לאחר מספר ימים, לרובין יש 6 דולר ולטים יש 10 דולר. ביום אחד לאחר מכן, לרובין יש 21 דולר. כמה כסף יש אז לטים?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	$\boxed{6}$	8	$\boxed{10}$	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	$\boxed{21}$	48	$\boxed{35}$	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100



הנה בעיה נוספת:

ג'ואן השתמשה ב- 15 פחיות צבע בדיוק כדי לצבוע 18 כסאות.
כמה כיסאות היא יכולה לצבוע בעזרת 20 פחיות צבע?

השתמשו ב**איור 6** כדי לעקוב אחר ההסבר שלנו אודות בניית רביעיית פרופורציה, או, אפילו טוב יותר, השתמשו בנייר ועיפרון ועיברו על התהליך בעצמכם. התחילו ביצירת טבלה של 2 על 2, ותנו לה תוויות בהתאם לכמויות של המשתנים שבבעיה המילולית. כאשר משתמשים בתהליך זה בכיתה, התלמידים צריכים לשיים את הטורים ואת השורות בהתאם לסיטואציה הספציפית המתוארת בבעיה המילולית, כמו "פחיות" עבור הטור השמאלי ו"כיסאות" עבור הטור הימני, כדי למנוע הכנסה לא נכונה של נתוני הבעיה, או פירוש לא נכון של הפיתרון. צעד זה מספק גם הזדמנות טובה להכין את התלמידים לעבודה בכיתות הבינים על קבוצות נתונים, בהם הם ידרשו ליצור ולטפל בתרשימים מורכבים. משעה שאנו נותנים תוויות לשני הטורים, אנו מחויבים לשמירת סדר זה הן בשורה העליונה והן בשורה התחתונה של רביעיית הפרופורציה.

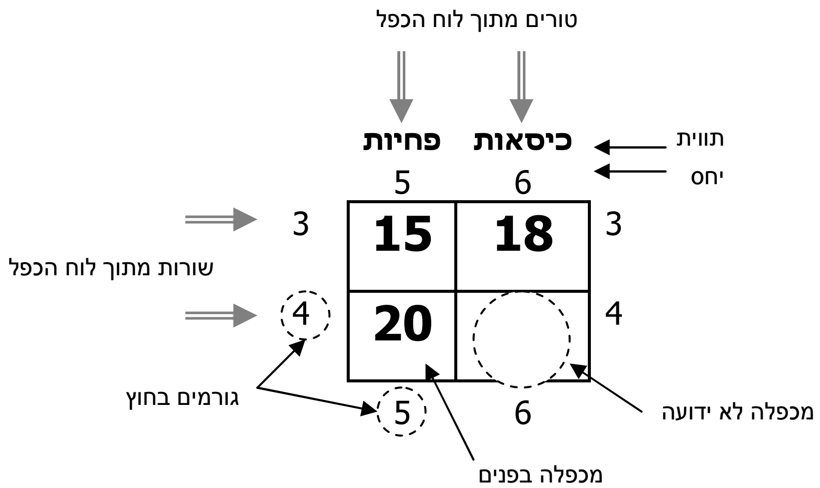
לאחר מכן, אנו מכניסים את שלושת הערכים הנתונים בבעיה המילולית. בדוגמה זו, 15 פחיות ו- 18 כיסאות בשורה העליונה ו- 20 פחיות בשורה התחתונה. ככעת יש לנו רביעיית פרופורציה שבשורה העליונה שלה יש שני ערכים ידועים ובשורה התחתונה שלה יש ערך אחד ידוע וערך אחד נעלם. אם נחשוב על רביעיית הפרופורציה כעל לוח כפל מקוצר, עם גורמים ומכפלה, אזי מציאת הערך הנעלם דומה למצב שבו שואלים, "מהי השורה ומהו הטור של ערך נעלם זה?" אנלוגיה זו תקפה משום שהשורה והטור , למשל, 4 ו- 6, בהתאמה, הם הגורמים של הערך הנעלם. תהליך הפיתרון המספרי

הופך כעת להיות חידה נגישה לתלמידים ואפילו מהנה לפיתרון, משום שהם יכולים לראות את החידה כארבעה תאים מתוך לוח הכפל, המאפשרים שיטות פיתרון שונות.

כדי למצוא באילו שורות וטורים מלוח הכפל משתמשת רביעיית הפרופורציה שלנו, התבוננו בשורה כלשהי או בטור כלשהו ברביעיית הפרופורציה שיש בו שני מספרים, וחישבו באיזו שורה או באיזה טור בלוח הכפל הוא נמצא. כאשר אנו מוצאים את מספר השורה או את מספר הטור, כמו 3 כמספר השורה של השורה העליונה או 5 כמספר הטור של הטור השמאלי, אנו רושמים זאת משני הצדדים של רביעיית הפרופורציה. כאשר פותרים את החידה של רביעיית הפרופורציה, על ידי המשכת תהליך זה, יופיעו מחוץ לכל תא, הגורמים שלו, כלומר, הטורים והשורות שלו על פי לוח הכפל (ראו **איור 6**). לבסוף, אנו מוצאים את שני הגורמים של המכפלה החסרה וכופלים אותם כדי לקבל את המכפלה. הפיתרון מגיע לסיומו כאשר רושמים תגובה המתארת את התשובה, כמו למשל, "בעזרת 20 פחיות, ג'ואן יכולה לצבוע 24 כיסאות".

איור 6: אסטרטגית הפיתרון של רביעיית פרופורציה עבור בעיות מילוליות של יחס ופרופורציה

ג'ואן השתמשה ב- 15 פחיות צבע בדיוק כדי לצבוע 18 כסאות.
כמה כיסאות היא יכולה לצבוע בעזרת 20 פחיות צבע?



מסקנות

מצאנו שתבנית הפיתרון של רביעיית פרופורציה קלה ונגישה לתלמידנו שבכיתות ה'. הם היו עסוקים מאוד בחישוב הערכים הנעלמים של רביעיות פרופורציה מתוך דפי תרגול שהציגו בעיות מילוליות. רביעיית הפרופורציה אינה רק דרך פתרון יעיל לבעיות מילוליות של יחס ופרופורציה, אלא היא מאפשרת גם תרגול רב של כפל וחילוק בדרך מעניינת.

גישה זו תוכננה במקור על ידי צוות מחקר אוניברסיטאי ודווחה בספרות המקצועית של חשיבה וחינוך מתמטי (Mathematics cognition and education), (ראו לדוגמה, Vergnaud [1983]; Confrey [1995]). גישה זו עברה פיתוח נוסף באמצעות שיתוף פעולה בין חוקר-מתכנן לבין מורה של כיתה ה'

בעלת הרכב סוציו-אקונומי ואתני הטרוגני. את היחידה לימדו יחד, בסתו של 2001, שני המחברים של המאמר במהלך עשרה שיעורים של שעה. ביצענו הערכה של ההבנה של תלמידנו בנושא יחס ופרופורציה על ידי מבחנים שכללו פריטים שנלקחו ממחקרים קודמים (NAEP 1990; Timss 1995; Kaput and West 1994; Stigler, Lee, and Stevenson 1990; Vanhille and Baroody 2002).

תלמידינו הצליחו יפה במבחן הבתר (Post-test), עם ממוצע של 74% תשובות נכונות, בהשוואה לממוצע של 53% תשובות נכונות שהשיגו תלמידים במחקרים האחרים, אשר היו מבוגרים מן התלמידים שלנו בטווח של שנה עד שבע שנים.

דיונים שערכו התלמידים בכיתה העידו על כך שהם היו מסוגלים לפתור בעיות של יחס ופרופורציה מתוך משמעות. מרבית התלמידים היו מסוגלים לבטא בבהירות את תהליכי הפיתרון שלהם ואת הקריטריונים לפיהם ידעו לפרש בעיות מילוליות מסוימות כמצבים של יחס ופרופורציה, ולבחור את אסטרטגיות הפיתרון בהתאם. למשל, תלמידים דחו מצב שהוצג כדוגמה של בעיית יחס ופרופורציה, אם הם לא יכלו להניח בביטחון, על בסיס המידע הנתון, שכל אחד משני הקצבים של שינוי המתוארים היה קבוע, ששני קצבים אלו התחילו בו-זמנית, ושהם היו מקושרים על ידי יחידת זמן משותפת. להלן דוגמה לבעיה מילולית שהתלמידים דחו כמייצגת מצב של יחס ופרופורציה:

> בוב וגיא הם אחים שנולדו בהפרש של שנתיים בדיוק. כאשר בוב היה בן 3, גיא היה בן 5. כאשר בוב היה בן 6, בן כמה היה גיא?

המאמץ של תלמידים לבטא בבהירות את ההבנה שלהם הביא לדיונים כיתתיים מרתקים ובלתי צפויים, לגבי סוגים שונים של מצבי יחס ופרופורציה ויכולות הניבוי השונות שלהם. למשל, העובדה שג׳ואן צריכה 5 פחיות צבע כדי לצבוע 6 כיסאות, היא כלל קבוע, אבל אם ג׳ואניטה בדרך כלל קולעת לסל 5 מתוך 6 זריקות עונשין, אנו לא יכולים להיות בטוחים בוודאות שהיא תעשה זאת במשחק של הערב.

מימצא בלתי צפוי נוסף היה שבמהלך עשרת הימים בהם העברנו את יחידת הלימוד, היינו עדים לשיפור, הן בדיוק והן במהירות, בשימוש של התלמידים בעובדות הכפל והחילוק. לדוגמה, שמנו לב שתלמידים פנו פחות ופחות ללוח הכפל הכיתתי בשעה שעבדו באופן יחידני על רביעיות הפרופורציה. ערך מוסף זה של הגישה שלנו מרמז שיחידה זו יכולה להיות ״בעיטת פתיחה״ טובה לכיתה ה׳ מאחר שהיא משמשת גם כחזרה על כפל וחילוק, שהן פעולות חשבון בסיסיות לתלמידים בגיל זה. יתר על כן, המושגים של שברים שקולים (למשל, $6/8 = 3/4$) ושל אחוזים (למשל, $75\% = 3/4$) ניתנים להצגה או לחזרה באופן טוב יותר באמצעות העבודה עם לוח הכפל ורביעיות הפרופורציה. מצאנו גם שרביעיית הפרופורציה הינה תבנית המבטיחה תמיכה בגילוי של תלמידים את הכפל באלכסון. אם תלמידים כותבים רביעיית פרופורציה כאשר השורות והטורים נמצאים בתוך התאים במקום מחוץ לתאים, אזי הם יכולים לראות שהאלכסון הימני והאלכסון השמאלי מכילים אותם ארבעה מספרים. לבסוף, למרות שהיחידה שלנו יכולה לעמוד כיחידה עצמאית, הרי שהיישומים הרחבים של רביעיית הפרופורציה לכל התחומים של המספרים הרציונאליים, מאפשרים לה להיות משולבת לתוך יחידה על שברים. לדוגמה, היינו עדים לשימוש ספונטאני של תלמידים בלוח בכפל לצורך הרחבה וצמצום של שברים.

יחידה זו התקבלה יפה על ידי מורים באזור שלנו. כפי שאחת המורות המנוסות ציינה באחד המפגשים: ״אני מלמדת מתמטיקה מזה שלושים וחמש שנה, ותמיד חשבתי שלוח הכפל הוא רק . . . לוח הכפל !״

במקום זאת, ניתן להשתמש בכלי ידוע זה, כדי לתמוך במעבר, מבוסס משמעות, לפתרונות כפליים של תלמידים עבור בעיות של יחס ופרופורציה. בכיתות הגבוהות יותר, הרחבה של לוח הכפל לשברים פשוטים ועשרוניים הנמצאים בין המספרים השלמים, יכולה לתמוך בפתרונות בעלי משמעות לבעיות יחס ופרופורציה של מספרים לא שלמים.

ביבליוגרפיה

Confrey, Jere. "Student Voice in Examining 'Splitting' as an Approach to Ratio, Proportions and Fractions." In *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, edited by Silvio L. Meira and David Carraher, Vol. 1, pp. 3-29. Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco, 1995.

International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. *Third International Mathematics and Science Study (TIMSS 1995)*. "Study Instruments and Procedures." timss.bc.edu/timss1995i/t95_study.html (November 21, 2001).

Kaput, James J., and Mary M. West. "Missing Value Proportional Reasoning Problems: Factors Affecting Informal Reasoning Patterns." In *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, edited by Guershon Harel and Jere Confrey, pp. 237-87. Albany, N.Y.: State University of New York, 1994.

National Center for Education Statistics. "NAEP Questions." *National Assessment of Educational* Progress, 1990: The Nation's Report Card. nces.ed.gov/nationsreportcard/itmrls/pickone.asp (November 21, 2001).

Stigler, James W., Shinying Lee, and Harold W. Stevenson. *Mathematical Knowledge*, Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

Vanhille, Lee S., and Arthur J. Baroody. "Fraction Instruction That Fosters Multiplicative Reasoning." In *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Bonnie H. Litwiller, pp. 224-36. Reston, Va.: NCTM, 2002.

Vergnaud, Gerard. "Multiplicative Structures." In *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, edited by Richard Lesh and Marsha Landau, pp. 127-74. New York: Academic Press, 1983.