

אומדן – על פי תוכנית הלימודים (בארה"ב)

Estimation – Direction from the Standards

מאת: Rowan T.E., Reys B.J. & Reys R.E.

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 37 No. 7, March 1990, pp. 22-25

תרגום: ברכה סגליס

האם אתם עושים אומדן? בודאי שאתם עושים. כל אחד אומדן. מחקרים מראים שבפתרון בעיות בחיי היומיום השימוש באומדן הרבה יותר שכיח מאשר החישובים המדויקים. יתר על כן, אומדן קשור בכל מושג מתמטי חשוב ובכל מיומנות מתמטית הנרכשים בבית הספר היסודי. זהו תהליך המאפשר ללומד ליצור אומדן או לשפוט את מידת הסבירות של התוצאה. הסטנדרטים של ה-NCTM (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1998) דנים הן באומדן למדידות, לדוגמה,

- עד איזה מספר בערך תוכל לספור בדקה?
- כמה גרעיני שעועית יש בערך בשקית של 1 ק"ג (איור 1)?
- האם השטח הצבוע גדול מ- $1/2$?
- והן באומדן לחישובים, לדוגמה,
- האם אתה חי כבר 10,000 ימים?
- כפלתי במחשבון שלי 48 ב- 0.27 וקיבלתי 129.6. האם זה יכול להיות נכון?
- יש הנחה של 35% על כל המוצרים. כמה בערך חוסכים על מערכת הסטריאו שבאיור 2?

איור 1: שלושה תהליכים שונים בהם משתמשים תלמידים לפתרון בעיה זו, מאפשרים הבנה לא רק של תהליכי החשיבה אלא גם של התפיסות השגויות של תלמידים.

בתוך התמונה, שלושה ילדים יושבים סביב שולחן. על השולחן ניצב מחשבון. מעל כל ילד יש בועה מחשבה:

- ילדה שמאל: בערך מיליון יש הרבה גרעיני שעועית ומליון זה מספר גדול.
- ילד אמצע: בערך אלפיים אני יכול להחזיק ביד כמה גרעיני שעועית, וצריך בערך עשרים.
- ילדה ימין: בערך תשע מאות גרעין שעועית שוקל פחות מגרם, אז זה יהיה פחות.

כמה גרעיני שעועית יש בערך בשקית של 1 ק"ג?

1

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1990 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation



שאלות אלו והדיונים שיערכו סביב פתרון, מספקים הזדמנויות רבות לפיתוח תובנת המספר. לשאלות אומדן טובות המאפשרות עריכת דיון יש מספר מאפיינים משותפים. שאלות אלו –

- מציגות מצב טבעי של פתרון בעיות ;
- ניתנות לפיתרון במגוון דרכים, ובכך מאפשרות לתלמיד לחקור את האסטרטגיה המתאימה לו ;
- מעודדות את התלמיד להשתמש במיומנויות חישוב מתאימות ;
- ניתן להשתמש בהן כדי לסייע למורים להבין טוב יותר את התפיסות והתפיסות השגויות של תלמידים אודות מספרים ;
- מאפשרות קיום שיח מתמטי בשעה שהתלמידים מסבירים את התהליכים ואת הפרוצדורות בהם השתמשו לצורך עשיית האומדן ;
- גורמות לקבלת "תשובות" שונות ולכן מספקות הזדמנויות לדון במגוון של תשובות סבירות.

אומדן כולל מספר מושגים ומיומנויות הכרוכים זה בזה, כמו - חישובים בראש, התפתחות מושגים, ותובנת המספר. למעשה, מחקרים טוענים שלרוב קשה מאוד להפריד בן תובנת המספר, חישובים בראש ואומדן. יתר על כן, פיתוח של כל אחת מיכולות אלו מביא על פי רוב לצמיחה נוספת של היכולות האחרות.

בתוכנית הלימודים בארה"ב (the Standards) האומדן מודגש לא כמטרה בפני עצמה אלא כאמצעי לעזור לתלמידים "לפתח תובנה לגבי מושגים ופרוצדורות, גמישות בעבודה עם מספרים ומדידות, ומודעות לסבירות של תוצאות" (עמוד 36). הלימוד של נושא האומדן צריך להיות משולב בלימוד

מושגים העוסקים במספרים שלמים, שברים, מס' עשרוניים ומספרים רציונאליים, כך שתהיה בנייה משמעותית של מושגים אלו אצל הלומד. מומלץ לחקור טווח רחב של אסטרטגיות לאומדן שתלמידים ממציאים. השימוש בעיגול מספרים לצורך אומדן מקבל פחות תשומת לב בסטנדרטים. מחקרים ושכל ישר מראים בבירור שהחוקים המסורתיים לעיגול מספרים (לעגל לעשרת, מאה, אלף וכו' הקרוב ביותר) אינם מתאימים על פי רוב ואינם מספיקים לצורך עשיית אומדן. במקום לפעול על פי כללים נוקשים לצורך עשיית אומדן, צריך לעודד את התלמידים להשתמש בידע שלהם אודות מספרים כדי ליצור אומדנים הגיוניים בהקשר לתוכן הבעיה שהוצגה לפנייהם. לעיתים קרובות אסטרטגיה זו תביא לצורך ל"עגל" מספרים כך שיתאימו יותר לחישובים שיצטרכו לעשות.

בפרקים לכיתות גן – ד' ולכיתות ה' – ח' הסטנדרטים תומכים במידה רבה בפיתוח שיטתי של כישורי אומדן בכיתות גן – ח'. ההמלצות הבאות מופיעות שם וכן מספר פעילויות לדוגמה כדי להבהיר את רוח ההמלצות.

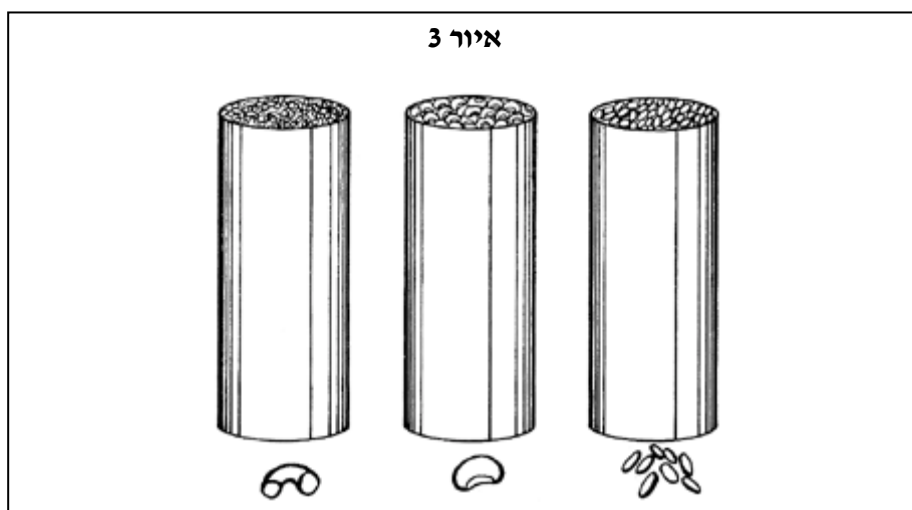
בכיתות גן – ד' תוכנית הלימודים צריכה לכלול אומדן כך שתלמידים יוכלו –

- לחקור אסטרטגיות לאומדן;
- לזהות מתי מתאים לעשות אומדן;
- לקבוע את מידת הסבירות של תוצאות;
- להשתמש באומדן בעבודה עם כמויות, מדידות, חישובים, ופתרון בעיות [עמוד 36].

דוגמה לצורך הוראה

הרבה דוגמאות מגוונות נדרשות על מנת לפתח את המושג של גודל יחסי במספרים ובכמויות. למרות שמנייה היא מרכיב שימושי בפעילויות אומדן רבות, אין זה חכם לבקש מתלמידים לאמוד דברים שקל למנות אותם. למשל, אין טעם להחזיק מיכל עם שלושה כדורי טניס ולבקש מן התלמיד לאמוד את מספר כדורי הטניס. עם זאת, ניתן להשתמש באותו מיכל כשהוא מלא בעצמים שונים כדי לערוך פעילות של עשיית אומדן.

איור 3 מראה שלושה מיכלים מלאים באטריות, אורז ושעועית. ניתן לבקש מן התלמידים להחליט באיזה מיכל יש הכי הרבה עצמים. מה יהיה מהיר יותר, אומדן או מנייה מדויקת? האם צריך למנות את הכמות בכל מיכל כדי להחליט? אמרו מדוע כן או מדוע לא.



3

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1990 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

ניתן לבקש מתלמידים "לנחש" (לאמוד) את מספר הפריטים במיכל אחד, למשל, במיכל של השעועית. אחרי שכולם עושים אומדן, ניתן להכין רשימה של כל האומדנים מן הנמוך לגבוה כדי לאפשר לתלמידים לרכוש ניסיון בסידור והשוואה. שתפו את כל התלמידים במניית השעועית, כאשר נותנים לכל קבוצה של שניים או שלושה תלמידים חלק מגרעיני השעועית. בקשו מהם למנות את השעועית ולסדר אותם בערימות של 10. תנו לקבוצות שקיות ניילון כדי שיוכלו לשים 100 גרעיני שעועית בכל שקית. בקשו מכל הכיתה לספור בקול רם במאות, עשרות ואחדות כדי לקבוע את המספר הכולל של גרעיני השעועית.

כאשר מספר גרעיני השעועית ידוע, בידקו שוב את הניחושים שנעשו קודם, אילו מהם סבירים? אילו באופן ברור לא סבירים? עיזרו לתלמידים לראות שלמספר תלמידים היו אומדנים סבירים למרות שהיו שונים זה מזה. ידע זה, האומר שטווח של אומדנים יכול להתקבל, מעודד תלמידים צעירים לעשות אומדנים המבוססים על חשיבה ולפתח סובלנות לשגיאות, שהינו חלק חשוב בעשיית אומדן. ניתן לגוון פעילות זאת על ידי הצגת מיכל המלא עד לחציו בגרעיני שעועית ולבקש אומדן של מספר גרעיני השעועית. בקשו מן התלמידים לספר כיצד הגיעו לתוצאת האמדן שלהם. הציגו את תוצאות האומדנים ובידקו האם טווח האומדנים גדול או קטן יותר מאשר בפעילות הראשונה. מאוחר יותר, בקשו מן התלמידים לאמוד את מספר חתיכות האטריות או האורז. בידקו כיצד הושפעו האומדנים שלהם והאסטרטגיות שלהם ממה שהם למדו מן הפעילות של אומדן גרעיני השעועית. פעילות זו עוזרת לתלמידים להעריך את העוצמה של עשיית אומדן, לפתח מושגים מתמטיים חשובים (מנייה, ערך המקום, חישובים בראש, סדור והשוואה של מספרים), לפתח סובלנות לטעויות, ולהשתתף בפתרון בעיות.

הפעילות שהצענו עוסקת באומדן של ספירה (numerosity). למרות שבכיתות הנמוכות המספרים שבהם עוסקים כשעושים חישובים לעיתים רחוקות מגיעים לגודל כזה הדורש שימוש באסטרטגיות אומדן מתוחכמות, חשוב בכל זאת לפתח אבני דרך ולהבין גודל יחסי בשעה שהם מחשבים. ניתן להשיג מטרה זו כאשר מפתחים טכניקות לחיבור מספרים דו-ספרתיים, על ידי עידוד התלמידים לחשוב על הסכום באופן יחסי למספר 100. לדוגמה, באיזה מן התרגילים הבאים הסכום גדול מ-100?
(א) $29 + 33 + 14$ (ב) $19 + 85$ (ג) $58 + 53$. על ידי חיבור העשרות בתרגיל הראשון, תלמיד יכול לראות במהירות שהסכום חייב להיות פחות מ-100. תלמיד עשוי להסביר שהתרגיל השני צריך להיות יותר מ-100 "משום ששמונים וחמש ועוד חמש עשרה הם מאה, ותשע עשרה זה יותר מחמש עשרה". בשביל התרגיל השלישי תלמיד עשוי לחשוב ש- "מאחר שכל מספר גדול מחמישים, הסכום צריך להיות גדול ממאה". גמישות זו בחשיבה על מספרים ופעולות הינה הבסיס לתובנת המספר. בכיתות ה' – ח' תוכנית הלימודים צריכה לכלול את הפיתוח של מושגים המונחים ביסוד של חישובים ואומדן כך שתלמידים יוכלו –

- לפתח, לנתח ולהסביר פרוצדורות לחישובים וטכניקות לאומדנים; ...
- לבחור ולהשתמש בשיטה מתאימה לחישובים מבין השיטות הבאות: בראש, בנייר ועיפרון, במחשבון או במחשב;
- להשתמש בחישובים, אומדנים, ופרופורציות כדי לפתור בעיות;
- להשתמש באומדן כדי לבדוק סבירות של תוצאות.

בעוד שמרבית המיקוד בכיתות הצעירות הוא על אומדן של מדידות, הרי שבכיתות ה' – ח' יש לחקור באופן קבוע אומדנים של חישובים בכל הפעולות ובכל המספרים ברגע שהחישובים נעשים קשים מדי לחישוב בראש. בדיוק כמו שאין טעם לעשות אומדן לכמויות קטנות, יש להימנע מעשיית אומדן לחישובים שניתן לעשותם בראש בצורה מדויקת. חישובו על המצב הבא:

יוגורט – 425 קלוריות
 מיץ תפוזים – 190 קלוריות
 תפוח – 315 קלוריות
 חטיף – 648 קלוריות

- אם אתם שותים מיץ תפוזים ואוכלים תפוח, האם תצרכו יותר מ- 400 קלוריות? הסבירו מדוע.
- אילו שני דברים תאכלו כדי להגיע לסכום בין 900 ל- 1000 קלוריות?
- אם תאכלו את כל מה שברשימה, האם תצרכו יותר או פחות מ- 2000 קלוריות? הסבירו את דרך החשיבה שלכם.

למרות שאפשר לענות על כל אחת מן השאלות הללו על ידי חישוב מדויק, ניתן לענות עליהן ביעילות ובביטחון על ידי שימוש בחישובים בראש ובאומדן. למעשה, לא ניתן לרוב לקבוע באופן מדויק באילו תהליכים התלמידים השתמשו, אם לא מבקשים מהם לתאר מה הם עשו. לדוגמה, כדי לענות על השאלה הראשונה, תלמיד עשוי לחשוב, "315 ועוד 100 הם 415, אז התשובה חייבת להיות יותר מ- 400." תלמיד אחר, מיומן יותר בחישובים בראש, עשוי לחשוב, "315 ועוד 100 הם 415 ועוד 90 הם 505, אז התשובה היא יותר מ- 400." שני הפתרונות מתאימים וממחישים שמה שטופל כבעיית אומדן על ידי תלמיד אחד, נפתר בחישוב בראש על ידי תלמיד אחר. ככל שתלמידים נתקלים בחישובים מייגעים יותר, כך גדלה היעילות והעוצמה של שימוש באומדן. חשוב ביותר לחקור ולהתנסות במגוון של אסטרטגיות לעשיית אומדן. תלמידים יכולים לקבל אותו אומדן לבעיה מסוימת על ידי שימוש בשתיים או יותר אסטרטגיות שונות מאוד. יש להמחיש, לקיים דיון ולנתח את האסטרטגיות השונות, כדי שתלמידים ילמדו שקיימות טכניקות שונות רבות לעשיית אומדן. למרות שאין לבודד שום אסטרטגיה אחת לשימוש בלעדי, ההבנה של אסטרטגיות שונות תעזור לתלמידים להגיע להחלטות נבונות לגבי בחירת האסטרטגיה או האסטרטגיות היעילות ביותר במצב מסוים.

שתי דוגמאות לצורך הוראה

יש לעודד תלמידים לחשוב בצורה הגיונית על כל הבעיות המתמטיות לפני שהם מנסים לפתור אותן. לדוגמה, נניח שתלמידים עוסקים בחקירה של כפל במספרים עשרוניים. המורה עשויה לתת להם את הבעיות הבאות:

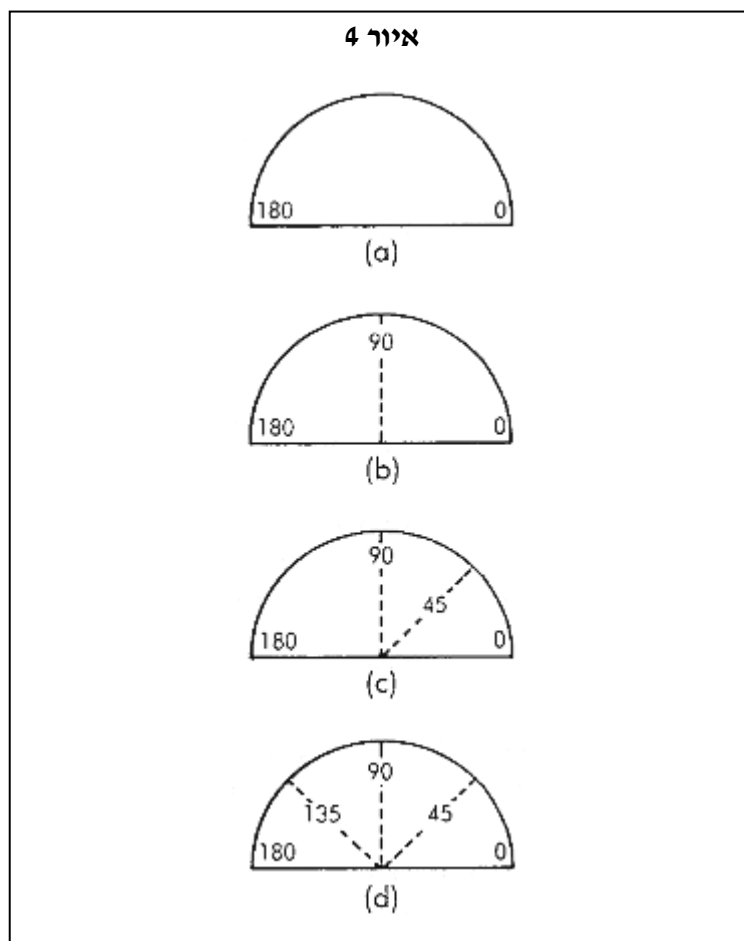
1129×0.51	489.2×0.98	505.33×1.08
1462×0.32	1267.2×0.24	893×0.53

במקום לבקש מן התלמידים למצוא את התשובות המדויקות בעזרת חישובי נייר ועיפרון או באמצעות מחשבון, עדיף למקד את הדיון על השאלות הבאות:

- באיזה מן התרגילים תתקבל מכפלה קטנה מ- 500? מדוע?
- באיזה מן התרגילים תתקבל מכפלה גדולה מ- 500? מדוע?

עודדו את התלמידים להתבונן בכל גורם ולחשוב על גודלו היחסי לפני שהם מחשבים. עזרו להם לבטא במילים את ההכללות החשובות שגילו. לדוגמה, כאשר מכפילים מספר בגורם שערכו קטן מ- 1, המכפלה תהיה פחות מאותו מספר. מה קורה כאשר מכפילים מספר ב- 0.52 או ב- 0.486? כיצד הבנת הגודל היחסי של מספרים עשרוניים אלו עוזרת לעשיית אומדנים טובים? לתלמידים יש הזדמנויות רבות חוץ מחישובים להשתמש בטכניקות של אומדן כדי לעזור להם לחשוב בצורה הגיונית על בעיות מתמטיות. הנה פעילות המזמנת עשיית אומדן לפני שמודדים זוויות עם מד-זווית.

בקשו מן התלמידים להכין מד-זווית על ידי חיתוך גזרה של חצי עיגול מתוך דף נייר חלק (**איור 4a**). קפלו את הגזרה לחצי, כך שיתקבל קמט קל, וסמנו זאת כ- 90 מעלות (**איור 4b**). לאחר מכן, קפלו באמצע, בין הסימון של ה- 90 מעלות לבין שני קצות הקוטר של חצי המעגל, וסמנו את הנקודה של 45 מעלות (**איור 4c**) ואת הנקודה של 135 מעלות (**איור 4d**).



השתמשו במד זווית זה כדי לחקור מגוון של זוויות בתכנים מתמטיים ובסביבה. אילו זוויות קטנות מ-45? אילו נמצאות בין 45 לבין 90 מעלות? מצאו זווית שגודלה בערך 135 מעלות. היכן בערך תמקמו על מד-זווית זה זווית של 65 מעלות? כיצד תשתמשו במד זווית זה כדי למצוא זווית של 25 מעלות? התנסויות כאלו באומדן מעניקות לתלמידים נקודות ייחוס חשובות או אבני דרך שהם בעלי ערך רב.

כאשר התלמידים מתחילים להשתמש במד-זווית, הדגישו את העובדה שלמרבית מדי-הזווית יש שתי סקאלות – אחת נעה משמאל לימין והשנייה מימין לשמאל. שאלו כיצד ניתן לדעת באיזו סקאלה להשתמש כאשר מודדים זווית מסוימת. עזרו לתלמידים להבין שידעה גסה של גודל הזווית מסייעת לקביעת הסקאלה המתאימה למדידתה - רק סקאלה אחת תראה מדידה הגיונית. גישה לעשיית אומדן עבור גודל של זוויות בעזרת מחשב, מופיעה אצל (Edwards, Bitter, and Hatfield (1990).

ומה הלאה?

יש צורך לעשות הרבה כדי להטמיע את המושגים ואת הרוח של הוראת אומדן המגולמת בסטנדרטים. רעיונות כיצד לעזור לתלמידים לפתח כישורים באומדן, בחישובים בראש ובתובנת המספר הודגשו במספר מאמרים של ה-NCTM, כולל ספר השנה של 1986 העוסק באומדן וחישובים בראש (Schoen and Zweng 1986) *Estimation and Mental Computation*; הסידרה "Mental Computation and Estimation" שהופיעה במהדורות של ספטמבר 1986 עד מאי 1987 של ה-Arithmetic Teacher; והמהדורה המיוחדת של עיתון זה מפברואר 1989 שהוקדשה לתובנת המספר.

קוראים המתעניינים מוזמנים ליצור קשר עם המחברים לשם קבלת רשימה מקיפה יותר של מקורות שעשויים לעזור להבאת שינוי בתוכנית הלימודים ובהוראה של אומדן, חישובים בראש ותובנת המספר.

ביבליוגרפיה

Nancy Tanner Edwards, Gary Bitter, and Mary M. Hatfield. "Teaching Mathematics with Technology: Measurement in Geometry with computers." *Arithmetic Teacher* 37 (February 1990): 64-67.

National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics, *Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics*. Reston, Va.: The Council, 1989.

Schoen, Harold L., and Marilyn J. Zweng, eds. *Estimation and Mental Computation*. 1986 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va.: The Council, 1989.