

חלקים, שלמים, וערך המקום: נקודת מבט התפתחותית

Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View

מאת : Sharon H. Ross

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 36 No. 6, February 1989

תרגום: מיכל סוקניק

כשתלמיד מחשב בעל-פה $32 + 59$ על ידי כך שחושב $30 + 50$ הם 80 , $2 + 9$ הם 11 , ו- $11 + 80$ הם 91 , הוא צריך להשתמש במושגים מפותחים היטב של יחסי חלק-שלם מספריים, ושל ערך המקום. אנשים עם חוש למספרים (number sense) מפותח, משתמשים לעיתים קרובות ובצורה גמישה בשני מושגים קשורים אלה, על מנת לבצע חישובים בעל-פה ואומדנים מספריים. עבור התלמידים, מושגים אלה הינם קשים; ההבנה שלהם מתפתחת לאט, לאורך תקופה של מספר שנים. כדי להצליח בהוראת חוש למספרים, עלינו לתכנן הוראה המכבדת את הצורך של התלמידים לבנות בעצמם את הידע שלהם.

יחסי חלק שלם

המודעות המספרית של תלמידים מתפתחת באופן הדרגתי. תלמידי כיתה א' חוקרים את מגוון הדרכים בהן אפשר לפרק מספרים קטנים: 7 יכול להתפרק ל $3 + 4$, ל $1 + 6$, וגם ל $2 + 5$. כשתלמידים צעירים נעשים בשלים יותר מבחינת החוש למספרים והמיומנויות, הם נעשים גמישים יותר. הם יכולים לפתור מגוון רחב של בעיות מילוליות של חיבור וחסור (Riley, Greeno, and Heller 1983), ולהשתמש באסטרטגיות של עובדות-קשורות, כדי להיזכר בעובדות בסיסיות (Cobb and Merkel, in press; Thornton 1978). בסופו של דבר, החשיבה שלהם מאפשרת להם להרכיב בעל-פה שלמים מהחלקים המרכיבים אותם, לפרק כמויות שלמות לחלקים, ואולי לסדר מחדש את החלקים, ולהרכיב מחדש את הכמות השלמה, כשהם בטוחים כל אותה עת שהכמות של השלם לא השתנתה.

ערך המקום ויחסי חלק-שלם

פרוק טבעי של כמויות שלמות, בו משתמשים לעיתים קרובות בעלי חוש טוב למספרים, הוא זה של "עשרות ויחידות" - או חזקות גדולות יותר של 10 עם מספרים גדולים מ- 99 . על מנת להשתמש בסוג של חשיבה, המתואר בדוגמה $32 + 59$, יש צורך שהתלמיד יבנה לעצמו הבנה יציבה של מושג ערך המקום. לעומת זאת, מורות וחוקרים חוזרים ומוצאים שהבנתם של תלמידים את ערך המקום הינה חלשה. הבנה של ערך המקום דורשת עיבוד ושכלול של ההבנה המתהווה אצל התלמיד לגבי מושג חלק-שלם. ניתן למצוא דרכים רבות כדי ליצור חלוקה לשני חלקים של מספר כמו 52 : $51 + 1$, $50 + 2$, $49 + 3$, $48 + 4$, רק דרך אחת מאלה, $50 + 2$, קשורה ישירות למשמעויות של הספרות הבודדות בשיטת כתיבת המספרים הקונבנציונלית שלנו. ייצוג זה ידוע כחלוקה הסטנדרטית לפי ערך המקום. חלוקות לא סטנדרטיות של עשרות ויחידות, כמו $40 + 12$, שימושיות להבנת אספקט ההקבצה מחדש של אלגוריתמים חישוביים.

1

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1989 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

- שיטת הספירה שלנו, המורכבת יחסית, מאופיינת על ידי ארבע התכונות הבאות :
1. **התכונה הפוזיציונית (של המקום).** הכמויות המיוצגות על ידי הספרות הבודדות נקבעות על ידי המקום שהן תופסות במספר כולו.
 2. **התכונה של בסיס עשר.** הערכים של המקומות גדלים בחזקות של עשר מימין לשמאל.
 3. **התכונה הכפלית.** הערך של ספרה בודדת נמצא על ידי הכפלת הערך הגלוי (face value) של הספרה, בערך שנקבע למקום שלה.
 4. **התכונה החיבורית.** הכמות המיוצגת על ידי המספר השלם היא סכום הערכים המיוצגים על ידי הספרות הבודדות.

על מנת להבין את ערך המקום, על התלמיד לעשות קואורדינציה וסינתזה של ידע מגוון לגבי שיטת כתיבת המספרים של התרבות שלנו, ולגבי יחסים מספריים של חלק-שלם. תלמיד המבין ערך מקום, יודע לא רק שהמספר 52 יכול לשמש לייצוג של "כמה" עבור אוסף של חמישים-ושניים עצמים, אלא גם שהספרה מימין מייצגת שניים מהם, הספרה משמאל מייצגת חמישים מהם (חמש קבוצות של עשר), וש-52 הוא הסכום של הכמויות המיוצגות על ידי הספרות הבודדות.

מחקר העושה שימוש במטלות של התאמת-ספרות



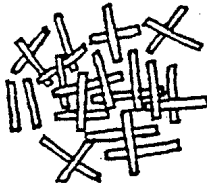
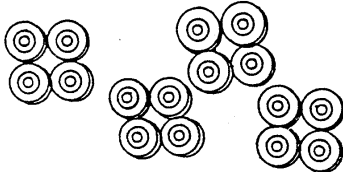
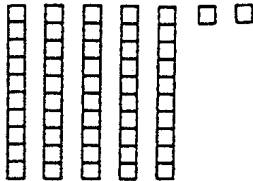
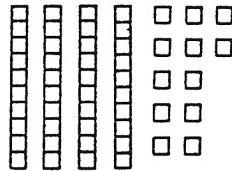
אנו מצפים שתלמידים בעלי חוש טוב למספרים, יבנו להם משמעויות עבור המספרים בשנים הראשונות של בית הספר. אולם במחקר שערכתי לגבי המשמעויות שתלמידים מייחסים למספרים דו-ספרתיים, מצאתי שרבים מהם עדיין בנו משמעויות עבור הספרות הבודדות אפילו בסוף כיתה ה' (Ross 1985, 1986). במחקר שערכתי עם שישים תלמידים בכיתות ב' עד ה', שנבחרו באקראי מתוך חמישה בתי ספר יסודיים שונים, התלמידים קבלו באופן אינדיבידואלי את המטלה הבאה :

התלמיד התבקש לרוקן שקית שהיו בה עשרים וחמישה מקלות, ואני שאלתי : "כמה מקלות יש?" לאחר מנייה, כמעט כולם נתנו תשובה נכונה של "עשרים וחמש". לאחר מכן בקשתי מהילד לרשום כמה מקלות נמנו. כמעט כולם כתבו נכון את המספר 25. ואז הקפתי בעיגול, קודם את ה-5 ואחר כך את ה-2, ובכל פעם שאלתי, "האם לחלק הזה של העשרים וחמש שלך יש איזה שהוא קשר עם כמה מקלות יש לך?"

מתוך שישים התלמידים שרואיינו, עשרים ושישה הצליחו - הם הסבירו בדרכים שונות שה-5 ב-25 ייצג חמישה מהמקלות, ושה-2 ייצג את שאר העשרים. שנים עשר תלמידים חשבו שאין כל קשר בין הספרות הבודדות לבין כמה מקלות היו באוסף; ארבעה עשר תלמידים תארו משמעויות מספריות שהמציאו, כגון שה-5 משמעותו "חצי של עשר", שה-5 משמעותו שקבוצות הכילו חמישה מקלות, או שה-2 משמעותו "לספור כל פעם ב-2". שמונה תלמידים חשבו שה-2 משמעותו שני מקלות, ושה-5 משמעותו או חמישה מקלות, או שלא היה לו שום קשר עם מספר המקלות שבאוסף.

במטלת המקלות שתוארה לעיל, אוסף המקלות לא היה מקובץ בצורה כלשהי. כשהמטלה שונתה לייצוג המספר 52 לפי חלוקה סטנדרטית של ערך-המקום בעזרת בדידי בסיס-עשר (חמישה בדידים של עשר ושני בדידים של אחד), הרבה יותר ילדים (44 מתוך ה-60) הצליחו. אבל כשה-52 היה מיוצג על ידי ארבעה בדידים של עשר ושניים-עשר בדידים של אחד, מספר התלמידים שהצליחו ירד לעשרים.

תוצאות דומות נמצאו במטלות בהן אוסף של ארבעים ושמונה גרגרי שעועית חולק לכוסות. איור 1 מציג את החומרים בהם השתמשו בשש המטלות של התאמת ספרות שהופיעו במחקר.

מספר	מטלה	עצמים
48	שעועית, חלוקה סטנדרטית	
48	שעועית, חלוקה לא סטנדרטית	
25	מקלות	
16	גלגלים	
52	בדידי בסיס עשר, חלוקה סטנדרטית	
52	בדידי בסיס עשר, חלוקה לא סטנדרטית	

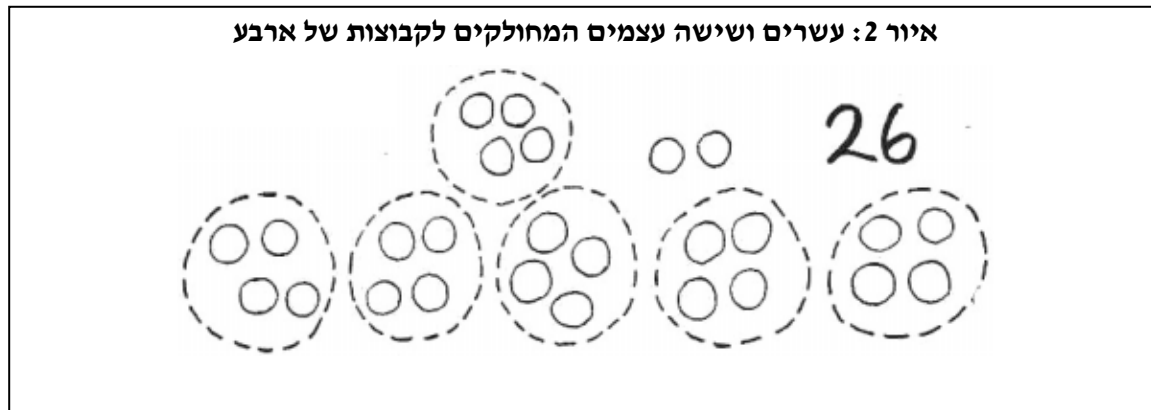
המטלות הסטנדרטיות, הייצוגים של קבוצות של עשר היו מאד בולטים. כששאלתי, לדוגמה, אם ל- 2 ול- 5 במספר 52 יש איזה שהוא קשר עם כמה בדידים של עשר היו על השולחן, התלמיד הסתכל על חמישה בדידים ארוכים סגולים של עשר, ושגי בדידים לבנים של אחד. קל לראות כיצד התלמיד עשוי להציע שה- 5 מייצג את חמשת הבדידים הסגולים, אך יחד עם זאת לא תהיה לו עדיין כל מחשבה של עשרות או חמישים - רק חמישה בדידים סגולים.

במחקר המשך, שנועד לבדוק האם חלק מהתלמידים אכן השתמשו בפרוש זה של הערך הגלוי כדי לייחס משמעות לספרות הבודדות, נתבקשו שלושים תלמידי כיתה ג', שרואיינו באופן אינדיבידואלי, לספור אוסף של עשרים ושישה עצמים, ו"לרשום כמה יש". אחר כך הם התבקשו לחלק את העצמים לקבוצות של ארבע ("סוכריות לתוך קעריות" או "גלגלים כדי ליצור מכוניות צעצוע"). האוסף המחולק שנוצר

3

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1989 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

כתוצאה מכך, המופיע באיור 2, כלל שש קבוצות של ארבעה עצמים, ושניים "שארית". ואז המראיין הקיף כל אחת מהספרות הבודדות במספר 26 ושאל עבור כל ספרה, "האם לחלק זה של ה-26 שלך יש איזה שהוא קשר עם כמה יש לך?"



ההקבצה הבולטת במטלה זו, גרמה לכך שבמקום תשובה נכונה, היא עודדה תשובה שגויה, שבה תלמידים הפכו את המשמעויות של הספרות, וההקבצה לא היתה לפי בסיס עשר. יחד עם זאת, התשובה השגויה כן היתה עקבית עם המשמעות של הערך הגלוי. כמעט מחצית מתלמידי כיתה ג' ענו בצורה שגויה, שה-2 ב-26 מייצג שניים מהעצמים, וה-6 ב-26 מייצג את "שש הקעריות של הסוכריות" או את "שש המכוניות".

שלבים של פרוש מספרים דו-ספרתיים

מודל בעל חמישה שלבים, של הפרושים שילדים מייחסים למספרים דו-ספרתיים, פותח על בסיס הנתונים מהמחקר המקורי וממצאי מחקרים קשורים אחרים (Ashlock 1978; Baroody et al. 1983; Barr 1978; Bednarz and Janvier 1982; Flournoy 1967; Heibert and Wearne 1983; M.Kamii 1980, 1982; National Assessment of Educational Progress 1983; Rickman 1983; Scrivens 1968; C. Smith 1969; R. Smith 1973). להלן תאור השלבים :

שלב 1, מספר שלם. כשתלמידים בתרבות שלנו בונים את הידע שלהם לגבי כמויות עד תשעים ותשע, ואת הייצוג הסימבולי שלהם כמספרים דו-ספרתיים, הבנייה הקוגניטיבית שלהם של **השלם** מופיעה ראשונה - המספר 52 מייצג את הכמות השלמה. הם לא מייחסים כל משמעות לספרות הבודדות. לגבי מחקרים קשורים המדווחים על הבדלים שנצפו בין תלמידים בארה"ב ותלמידים מהתרבות האסייתית, ראו את עבודתה של Miura et al. (1987) ושל Miura et al. (in press).

שלב 2, תכונת המיקום. תלמידים יודעים שבמספר דו-ספרתי, הספרה בצד ימין היא "במקום של היחידות", והספרה בצד שמאל היא "במקום של העשרות". יחד עם זאת, הידע שלהם לגבי הספרות הבודדות הינו מוגבל למיקומן בלבד, ואינו כולל את הכמויות המתאימות לכל אחת.

שלב 3, ערך גלוי (Face Value). תלמידים מפרשים כל ספרה כמייצגת את המספר המצוין על ידי הערך הגלוי שלו. אולם קבוצת העצמים המיוצגת על ידי ספרת העשרות, עשויה להיות שונה מהעצמים המיוצגים על ידי ספרת היחידות. הם יכולים לתת שם מילולי של "עשרות" לעצמים המתאימים לספרת העשרות, אבל עצמים אלה לא מייצגים באמת קבוצות של עשר יחידות. תלמידים בשלב זה אינם מכירים בכך שהמספר המיוצג על ידי ספרת העשרות הוא כפולה של עשר.

שלב 4, אזור הבנייה. תלמידים יודעים שהספרה השמאלית במספר דו-ספרתי מייצגת קבוצות של עשרה עצמים, ושהספרה הימנית מייצגת את שאר העצמים הבודדים, אך ידע זה אינו יציב ומאופיין על ידי ביצועי מטלות לא מהימנים.

שלב 5, הבנה. תלמידים יודעים שהספרות הבודדות במספר דו-ספרתי מייצגות חלוקה של הכמות השלמה לחלק של עשרות ולחלק של יחידות. כמות העצמים המתאימה לכל ספרה יכולה להיקבע אפילו עבור אוספים שחולקו בדרכים לא סטנדרטיות.

גילאים ושלבים

כל אחד משישים התלמידים במחקר המדווח, שובץ לאחד מחמשת השלבים, על פי הביצוע שלו בשש המטלות של התאמת-ספרה, ובמטלה של ידע פוזיציוני, שבה התלמידים נתבקשו לזהות, במספר דו-ספרתי, איזו ספרה היתה ב"מקום של העשרות", ואיזו היתה ב"מקום של היחידות". מספר התלמידים בכל שלב מופיע, על פי הכיתה, בטבלה מספר 1.

טבלה מספר 1: שלבים בהתפתחות ההבנה של תלמידים את המספרים הדו-ספרתיים על פי כיתות

השלב ההתפתחותי					כיתה *
5	4	3	2	1	
0	4	3	0	8	ב
2	6	5	2	0	ג
7	1	6	0	1	ד
7	5	2	1	0	ה
16	16	16	3	9	סה"כ

* מספר התלמידים בכל כיתה היה 15.

למרות שכל התלמידים במחקר זה היו לפחות בשלב 1 - מסוגלים למנות אוספים של עד חמישים ושניים עצמים, ולרשום את המספר הדו-ספרתי המתאים למנייה – שנים עשר מהם לא הראו כל פרוש כמותי לספרות הבודדות.

שישה עשר תלמידים הצליחו רק במטלות של התאמת-ספרה שבהן המספרים היו מיוצגים על ידי חלוקה סטנדרטית של ערך מקום של אוסף עצמים - כלומר, במטלות שבהן יכלו להצליח על ידי שימוש בפרוש של הערך הגלוי של שלב 3.

שישה עשר תלמידים הצליחו בכל שש המטלות של התאמת-ספרה, בהפגנים הבנה ברמת שלב 5 של המספרים המיוצגים על ידי הספרות הבודדות במספרים דו-ספרתיים. לא היה תלמיד מכיתה ב' שהפגין הבנה של שלב 5. אפילו מבין תלמידי כיתה ה', רק מחציתם היו בשלב 5.

השלכות לגבי הכיתה

בכיתות של אמצע ביה"ס היסודי דרושה תמיכה הוראתית רבה יותר, המתמקדת במספרים דו-ספרתיים. לא כל התלמידים מתפתחים באותו הקצב, ולא לכולם יש התנסויות זהות עם מספרים. הנתונים המוצגים בטבלה מספר 1 מראים שאפילו בכיתות ד' ו-ה', רק מחצית מהילדים שרואינו הפגינו הבנה טובה של הספרות הבודדות במספרים דו-ספרתיים. חוקרים אחרים שהשתמשו במטלות התאמת-ספרות כדי להעריך את הבנת התלמידים לגבי ערך המקום, מדווחים על תוצאות דומות (C. Kamii 1986; M Kamii 1980, 1982). ההוראה השכיחה של ערך המקום בכיתות של אמצע ביה"ס היסודי, המתמקדת בביטויים סימבוליים עבור מספרים גדולים בהרבה, ובשברים עשרוניים, אינה מתאימה עבור תלמידים רבים. כיצד קורה שתלמידים כה רבים מגיעים לכיתות של אמצע ביה"ס היסודי, עם כל כך מעט הבנה של מספרים דו-ספרתיים? סיבה אחת היא, שתלמידים בשלבים 2 ו-3 נראים כאילו הם מבינים יותר מאשר הם באמת מבינים. עם הידע של שלב 2 לגבי המיקומים שמאל-ימין של הספרות, תלמידים מסוגלים להצליח במגוון מטלות האופייניות לספרי הלימוד שלהם, ולמבחינים הסטנדרטיים, כמו השאלות הבאות:

במספר 27, איזו ספרה נמצאת במקום של העשרות?

כמה עשרות יש במספר 84?

ב- 35 יש ____ עשרות ו ____ יחידות.

5 יחידות + 7 עשרות = ____.

תלמידים המשתמשים בפרוש של הערך הגלוי של ספרות, ברמת שלב 3, הצליחו אפילו במגוון רחב יותר של מטלות, כולל מטלות רבות העושות שימוש באמצעי המחשה. במטלות לימודיות רבות, התלמידים מתבקשים לעשות התאמה בין ספרות ואמצעי המחשה. אם אוסף כבר מחולק בחלוקה סטנדרטית של ערך-מקום לעשרות ויחידות, תלמיד שמתבקש לעשות התאמה עבור הספרות ב- 52, לדוגמה, צריך רק לחפש "חמש של משהו ושתיים של משהו אחר." בהשתמשו באסטרטגיה זו של ערך-גלוי, התלמיד מסתגל בקלות לחומרים חדשים, כגון גרגרי שעועית בכוסות, קוביות מתחברות, בדידים של בסיס עשר, או דסקיות צבעוניות. רק כאשר האוספים מקובצים לחלוקות לא סטנדרטיות, הפרוש של הערך הגלוי בו משתמשים התלמידים, מכשיל אותם. כשהם צריכים להתמודד עם מטלות של הקבצה מחדש, ההבנה השגויה של התלמידים הופכת להיות נראית לעין.

יש צורך במחקר נוסף, אך נראה שאפילו התנסות ניכרת עם אמצעי המחשה כמו בדידים של בסיס עשר ואביזרים אחרים של ערך מקום, לא מקלים על ההבנה של ערך מקום כפי שהיא נמדדת על ידי המטלות של התאמת-ספרה (Ross 1988). אם אנו מציגים חומרים שעוצבו כך שימחישו את ההקבצה של בסיס עשר, לפני שהתלמידים בנו לעצמם משמעויות כמותיות מתאימות עבור הספרות הבודדות, אנו עלולים,

שלא במתכוון, לגרום או לעודד פרוש של שלב 3 (הערך הגלוי) לספרות. עם חומרים אלה המורה והיצרן אולי "המחישו את העשר", אבל לא בהכרח שהתלמיד עשה זאת.

אמצעי המחשה יכולים לשמש כמכשיר שימושי לתקשורת בין התלמיד למורה - הם נותנים לנו משהו לדבר עליו. על ידי שימוש בחומרים אלה אנו יכולים לעיתים קרובות ללמוד הרבה מאד על דרך החשיבה של התלמידים, כולל התפיסות השגויות שלהם (Labinowicz 1985). אנו יכולים גם להשתמש בחומרים על מנת להראות ולהסביר לתלמידים מה עליהם לעשות. הוראה זהירה עם אמצעי המחשה של ערך-מקום יכולה להקל על רכישת הידע הפרוצדורלי הדרוש לשליטה באלגוריתמים חישוביים (Fuson 1986; Resnick 1983). יחד עם זאת, עלינו לא להשלות עצמנו, שכתוצאה מהוראה כזו התלמידים יבנו הבנה של מערכת המספרים המורכבת של ערך מקום, או של האלגוריתם. אם הבנה היא המטרה, ודאי אין זה משנה אם המורה מראה לילדים שיטות של נייר ועפרון, גרגרי שעועית וכוסות, או בדידים של בסיס עשר. כשהמורה מראה לתלמידים משהו, התלמידים אינם צריכים לחשוב, הם פשוט ממלאים אחר ההוראות. הבנה נובעת רק מחשיבה. יש לגרום לכל תלמיד לבנות את הידע שלו לגבי מספרים והיחסים ביניהם. תלמידים צריכים לעסוק במטלות של פתרון בעיות, המאתגרות אותם לחשוב על דרכים שימושיות לחלק ולהרכיב מספרים. חיבור וחיסור של מספרים עד תשעים ותשע הם נושאים מתאימים עבור ילדים בכיתה ב', אך עלינו לעודד את התלמידים למצוא סכומים והפרשים בדרכים שלהם.

עבור תלמידים שעדיין לא למדו את השיטה הקונבנציונלית של נייר ועפרון, מציאת הסכום של $32 + 59$ הוא בעיה לא שגרתית, שאסטרטגיית הפתרון שלה אינה נראית מיידית לעין. הבעיה יכולה להיפתר תוך שימוש במגוון אסטרטגיות ומגוון של אמצעי המחשה - דסקיות, אצבעות, או נייר ועפרון. אם הם עובדים בקבוצות שיתופיות, אפשר לעודד את התלמידים להשוות שיטות, ולנסות לשכנע זה את זה שאסטרטגיה מסוימת "עובדת" או "לא עובדת". הם יכולים להשתמש במחשבון כדי לבדוק את הפתרון. בדיון של המליאה, אפשר לבקש מהתלמידים להדגים את האסטרטגיות המוצלחות שלהם.

לימוד של מושגים הקשורים לערך המקום בנפרד, כתנאי קדם לחיבור וחיסור מספרים דו-ספרתיים אינו יעיל ואינו נחוץ. מחקרים של התנסות בהוראה הראו שתלמידים בכיתה א' ו-ב' יכולים להמציא אלגוריתמים יעילים משלהם, והם עושים זאת ללא אמצעי המחשה של ערך המקום (Kamii and Joseph [in press]; Cobb and Merkel [in press]; 1988). למעשה, אמצעי המחשה יכולים למנוע חשיבה, משום שהמטלות קלות מידי לביצוע עם החומרים.

כמורים למתמטיקה, עלינו לספק הזדמנויות לכל התלמידים לפתח חוש חזק למספרים. כדי להשיג מטרה זו אנו יכולים לסייע לכל תלמיד לבנות במחשבתו, בזמן שהוא מתבגר, מושגים משוכללים יותר ויותר של יחסי חלק-שלם מספריים וערך המקום. אם אנו מציבים בפני התלמידים אתגרים עם הזדמנויות רבות יותר לעשות אומדנים וחישובים בעל-פה, ומראים להם את האלגוריתמים הקונבנציונליים רק אחרי שהם התנסו בתקופה פורה של המצאת שיטות יעילות משלהם לפתרון בעיות כמו $32 + 59$, אנו יכולים לצפות לכך שיותר תלמידים צעירים יפגינו את החלוקה המספרית הגמישה, האופיינית לאלה עם חוש טוב למספרים. אם תלמידים לומדים אז את האלגוריתם הקונבנציונלי, הם יראו אותו כאחת מדרכים רבות למצוא סכום או הפרש. הם יהיו מסוגלים לבחור, ולהשתמש לפי הצורך, באומדן, חישובים בעל פה, ומחשבוני, וכן גם באלגוריתמים מומצאים וקונבנציונליים.

ביבליוגרפיה

- Ashlock, Robert B. "Research and Development Related to Learning about Whole Numbers: Implications for Classroom/Resource Room/Clinic." In *Topics Related to Diagnosis in Mathematics for Classroom Teachers*, edited by M.E. Hynes. Kent, Ohio: Research Council on Diagnostic and Prescriptive Mathematics, 1978. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 243 694).
- Baroody, Arthur J., Kathleen E. Gannon, Rusti Berent, and Herbert P. Ginsburg. "The Development of Basic Formal Math Abilities." Paper presented at the meeting of the Society for Research in Child Development, Detroit, April 1983. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 229 153).
- Barr, David C. "A Comparison of Three Methods of Introducing Two-Digit Numeration." *Journal for Research in Mathematics Education* 9 (January 1978):33-43.
- Bednarz, Nadine, and Bernadette Janvier. "The Understanding of Numeration in Primary School." *Educational Studies in Mathematics* 13 (February 1982):33-57.
- Cobb, Paul, and Graceann Merkel. "Thinking Strategies as an Example of Teaching Arithmetic through Problem Solving." In *Elementary School Mathematics: Issues and Directions*, 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va.: The Council. In press.
- Cobb, Paul, and Grayson Wheatley. "Children's Initial Understanding of Ten." Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Washington, D.C., April 1987.
- Flournoy, Frances. "A Study of Pupils' Understanding of Arithmetic in the Primary Grades." *Arithmetic Teacher* 14 (October 1967): 481-85.
- Fuson, Karen. "Roles of Representation and Verbalization in the Teaching of Multi-Digit Addition and Subtraction." *European journal of psychology of Education* 1(1986):35-56.
- Heibert, James, and Diane Wearne. "Students' Conceptions of Decimal Numbers." Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, April 1983.
- Kamii, Constance. "Place Value: An Explanation of its Difficulty and Implications for the Primary Grades." *Journal for Research in Childhood Education* 1 (August 1986):75-86.

- Kamii, Constance, and Linda Joseph. "The Teaching of Place Value and Double-Column Addition. *Arithmetic Teacher* 35 (February 1988):48-52.
- Kamii, Mieko. "Children's Graphic Representation of Numerical Concepts: A Developmental Study. *Dissertation Abstracts International* 43 (November 1982):1478A. (University microfilmxs no. DA 822 3212).
- _____. "Place Value: Children's Efforts to Find a Correspondence between Digits and Numbers of Objects." Paper presented at the Tenth Annual Symposium of the Jean Piaget Society, Philadelphia, May 1980.
- Labinowicz, Ed. *Learning from Children*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley Publishing Co., 1985.
- Miura, Irene T. "Mathematics Achievement as a Function of Language." *Journal of Educational Psychology* 79 (March 1987):79-82.
- Miura, Irene T., Kim C. Chungsoon, Chih-Mei Chang, and Yukari Okamoto. "Effects of Language Characteristics on Children's Cognitive Representation of Number: Cross-National Comparisons." *Child Development*. In press.
- National Assessment of Educational Progress. *The Third National Mathematics Assessment: Results, Trends and Issues*. Princeton, N.J.: Educational Testing Service, 1983.
- Rathmell, Edward C. "The Effects of Multibase Grouping and Early or Late Introductions of Base Representations on the Mastery Learning of Base and Place Value Numeration in Grade One." *Dissertation Abstracts International* 33 (May 1972):6071A.
- Resnick, Lauren B. "A Developmental Theory of Number Understanding." In *The Development of Mathematical Thinking*, edited by H.P. Ginsburg, 110-51. New York: Academic Press, 1983.
- Rickman, Claude M. "An Investigation of Third and Fourth Grade Students' Understanding of a Decomposition Subtraction Algorithm Based on Individual Interviews." *Dissertation Abstracts International* 44 (1983):1365A.
- Riley, Mary S., James G. Greeno, and Joan I. Heller. "Development of Children's Problem-solving Ability in Arithmetic." In *The Development of Mathematical Thinking*, edited by H.P. Ginsburg, 153-96. New York: Academic Press, 1983.

- Ross, Sharon H. "The Development of Children's Place-Value Numeration Concepts in Grades Two through Five." Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, San Francisco, 1986. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 273 482).
- _____. "The Development of Children's Place-Value Numeration Concepts in Grades Two through Five." Ph.D. diss., University of California, Berkeley, 1985. *Dissertation Abstracts International* 47 (1985):819A.
- _____. "The Roles of Cognitive Development and Instruction in Children's Acquisition of Place-Value Numeration Concepts." Paper presented at the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Chicago, April 1988.
- Scrivens, Robert S. "A Comparative Study of Different Approaches to Teaching the Hindu-Arabic Numeration System to Third Graders." *Dissertation Abstracts* 29 (1968):839A.
- Smith, Charles W., Jr. "A Study of Constant Errors in Subtraction and in the Application of Selected Principles of the Decimal Numeration System Made by Third and Fourth Grade Children." *Dissertation Abstracts International* 30 (1969):1084A. (University Microfilms No. 69-14685).
- Smith, Robert F. "Diagnosis of Pupil Performance on Place-Value Tasks." *Arithmetic Teacher* 20 (May 1973):403-8.
- Thornton, Carol A. "Emphasizing Thinking Strategies in Basic Fact Instruction." *Journal for Research in Mathematics Education* 9 (May 1978):214-27.