نظرة تطويرية: الكل والجزء والقيمة المنزلية

Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View

تأليف: Sharon H. Ross
ظهر في: Arithmetic Teacher, Vol. 36 No. 6, February 1989

ترجمة: إنتصار نتشة

تتطلب عملية الحساب العقلي التي يقوم بها الطلبة أثناء إيجادهم حاصل جمع 59+32 وذلك عن طريق جمع 50+30 تساوي 80، و 9+2 تساوي 11، و 11+80 تساوي 91، استدعاء بعض المفاهيم المتطورة لعلاقات الجزء بالكل والقيمة المنزلية.
يقوم الطلبة ذوي الحس العددي الجيد باستخدام متكرر وفعال ومرن لهذه المفاهيم عادة عند إجرائهم للحساب العقلي والتقدير العددي، ويجد الطلاب صعوبة في التعامل مع هذه المفاهيم بشكل عام، رغم تطورها بشكل بطيء على مر السنين.

علاقات الجزء بالكل:

يتطور الوعي العددي للطالب بشكل تدريجي. حيث يكتشف الطلبة في المرحلة الابتدائية طرقا متعددة لتقسيم عدد صغير، مثل العدد 7 حيث يمكن تقسيمه إلى 3+4 أو 2+5 أو 1+6. وكلما تطورت ونمت مهارات الطلبة إضافة إلى الحس العددي يصبحون أكثر مرونة في حل عدد كبير من المسائل الكلامية التي تتطلب عمليتي الجمع والطرح Riely,Greeno,and Heller 1983)) فهم يستخدمون استراتيجيات الحقائق ذات العلاقة لاستدعاء الحقائق الأولية Cobb and Melkel, in press; Thornton 1978)). كما أن تفكيرهم قد يسمح لهم بتنظيم وتجميع الكل من أجزائه المكونة له بشكل عقلي، وقد يحللون الكل إلى أجزاء، وربما يعيدون ترتيب الأجزاء وتكوين الكل منها بشكل يحفظون فيه الكل من التغيير.

القيمة المنزلية وعلاقات الجزء بالكل:

ان التقسيم الطبيعي للكميات الكاملة والتي تستخدم بشكل متكرر في الحس العددي هي: العشرات والآحاد أو قوى اكبر من العدد 10 مع أعداد اكبر من 99. ولاستخدام ذلك النوع من التفكير الذي اشرنا إليه في مثال 32+59، لا بد ان يكون الطالب قد كونّ فهما ثابتا لمفهوم القيمة المنزلية، هذا بالرغم من ملاحظة المعلمين والباحثين وبشكل متكرر أن مفهوم القيمة المنزلية ما زال ضعيفا عند معظم الطلبة.
يتطلب فهم القيمة المنزلية عند الطالب فهما تفصيليا لمفهومها الواضح، حيث أن هناك العديد من طرق تقسيم عدد كبير مثل 52 مثل: 1+51 أو 2+50 أو 3+49 أو 4+48...، وغيرها ولكن تقسيما واحدا منها نراه بالصورة 2+ 50 والذي له معنى بالمنازل المنفصلة في نظامنا العالمي التقليدي. والذي يعرف نظام تجزئة المنازل القياسي وأما بالنسبة لنظام التجزئة الغير قياسي (فمثلا التجزئة بالصورة 12+40) نراه مهما ومفيدا لفهم مواضيع إعادة التجميع في الخوارزميات (الألغورثمات) الحسابية.
خصائص نظامنا العددي المحكم:

1) خاصية ترتيب الأمكنة: حيث أن ترتيب مكان الرقم في العدد يعطيه الكمية التي تمثله.
2) خاصية الاساس العدد عشرة (10): تزداد قيمة منزلة الرقم كقوة للعدد عشرة كلما انتقلنا من اليمين إلى اليسار.
3) خاصية مضاعفة الأعداد: نحسب قيمة منزلة منفردة بضرب العدد الموجود في المنزلة بقيمة تلك المنزلة.
4) الخاصية الإضافية: الكمية التي تمثل العدد الكامل هي حاصل جمع قيم الأعداد ممثلة منازلها المختلفة.

يتطلب من الطالب لفهم القيمة المنزلية أن يرتب ويجمع معلومات لها علاقات متعددة بنظامنا القومي الثقافي للأعداد وعلاقات الجزء بالكل. فالطالب الذي يفهم معنى القيمة المنزلية يعرف أن العدد 52 يمكن تمثيله (كم وحدة توجد فيه) بمجموعة مكونة من 52 وحدة، ولا تقتصر معرفته على هذا فقط بل تتعدى إلى معرفته أن المنزلة الموجودة إلى يمين العدد تمثل وحدتين وان المنزلة الموجودة في اليسار تمثل خمسين وحدة(خمس مجموعات من العشرات) وأن العدد 52 يمثل حاصل جمع الكميات التي تمثل المنازل المنفصلة.

دراسة بحثية باستخدام مهمات ملاءَمة الأرقام:

نتوقع من الطلبة ذوي الحس العددي الجيد أنهم كونوا معانٍ للأعداد في السنوات الأولى من المدرسة. ولقد أجريت دراسة لمواكبة المعاني التي ينسبها الطلبة للاعداد المكونة من منزلتين، فوجدت أن كثير منهم ما زال يبني المعاني لمنازل الوحدات حتى الصف الخامس.Rose 1985, 1986)). حيث قمت باختيار 60 طالبًا من صفوف الثاني إلى السادس بشكل عشوائي من خمس مدارس ابتدائية متعددة، ولقد تم إرشاد الطلبة بشكل فردي الى المهمات التالية:

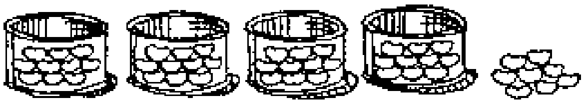
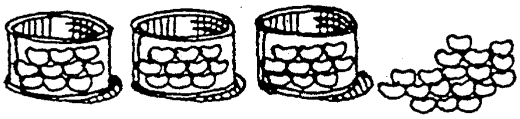
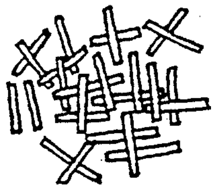
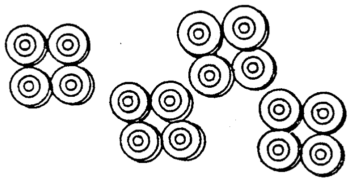
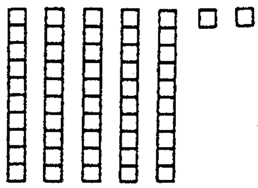
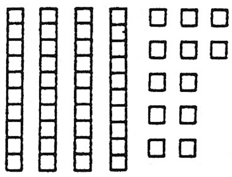
وجهت الطلبة الى إخراج 25 عود بوظة من كيس، ثم طلبت منهم عدَّها، فقام معظم الطلبة بأداء المهمة بنجاح وأعطوا إجابة شفهية صحيحة. ومن ثم وجهت لهم السؤال التالي:اكتب عدد العيدان التي قمت بعدها، تقريبا معظمهم كتب الاجابة (25).

ومن ثم قمت برسم دائرة حول الـ 5، ومن ثم حول الـ 2، وفي كل مرة سألت ان كان هذا الرقم الموجود في العدد 25 له علاقة بكم عود لديك؟؟

أدى 26 طالبًا من 60 طالب المهمة بنجاح، حيث قاموا باستخدام طرق متعددة لتوضيح أن الرقم 5 يمثل خمس عيدان وأن الرقم 2 يمثل عشرين عودا. فكر 12 طالبًا ان المنازل المنفصلة ليس لها علاقة بعدد العيدان الموجودة في المجموعة. لقد ابتدع 14 طالبًا معانٍ عددية مثل: العدد 5 هو نصف العدد 10، والعدد 5 يعني ان المجموعات تحتوي خمس عيدان، أو أن 2 تعني قم بالعد اثنين اثنين، و8 طلاب فكروا ان العدد 2 يعني عودين، وان العدد خمسة يعني خمس عيدان وانه ليس لهما علاقة بعدد العيدان في المجموعة.

في مهمة العيدان التي تم وصفها، لم تكن العيدان مجمعة بأي شكل من الأشكال، ولكن عندما تغيرت المهمة بتمثيل العدد 52 حسب المنازل: خمس عشرات و2 وحدات، أدى عدد اكبر من الطلاب المهمة بنجاح (44 من 60).ولكن عندما تم تمثيلها بأربع عشرات و12 وحدة أدى عدد أقل من الطلاب المهمة بنجاح حيث وصل عددهم الى 20. وجدنا نتائج متشابهة في مهمات طُرحت على الطلبة وطلب منهم تقسيم 48 حبة فاصوليا على فناجين. يظهر الشكل(1) المواد التي استخدمت في مهمات ملاءَمة الأرقام الست التي استخدمت في الدراسة.

الشكل 1: المواد التي استخدمت في مهمات ملاءَمة الأرقام

المهمة	المواد	العدد
فاصوليا، تقسيم قياسي		48
فاصوليا، تقسيم غير قياسي		48
عيدان بوظة		25
عجلات		16
مجسمات ذات أساس عشرة (عيدان الأساس عشرة) تقسيم قياسي		52
مجسمات ذات أساس عشرة (عيدان الأساس عشرة) تقسيم غير قياسي		52

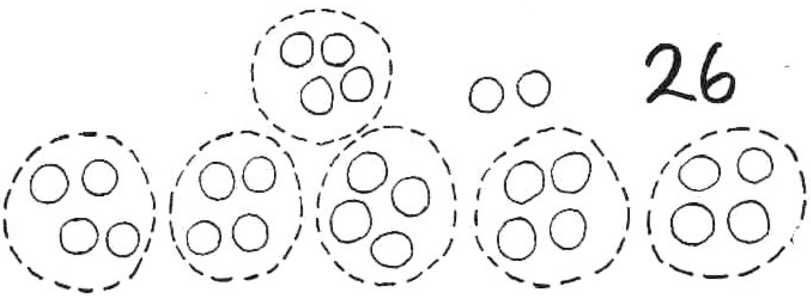
لماذا وجد الطلاب المهمات التي تتطلب تجزئة القيمة المنزلية بصورة قياسية أسهل من غيرها؟

لقد كان التمثيل بمجموعات العشرة واضحًا وبارزا في كلا المهمتين القياسيتين في آن واحد، فمثلا عندما سألت إذا كان الـ 2 والـ 5 لهما علاقة بعدد عيدان العشرة الموجودة على الطاولة نظر الطلاب الى 5 عيدان من عيدان العشرة أرجوانية اللون ووحدتين منفردتين بيضاء اللون. من السهل رؤية كيف اقترح الطلاب ان 5 تمثل خمس عيدان أرجوانية اللون وليس لديهم أي فكرة عن العشرات أو العدد 50 في عقولهم _ فقط خمس عيدان أرجوانية اللون.

في دراسة لاحقة صممت من أجل دراسة استخدام الطلبة تفسير القيمة الظاهرة لإعطاء معنى للأرقام المنفصلة، طلب من30 طالب من الصف الثالث أن يعدوا مجموعة من 26 قطعة ويكتبوا عددها، ومن ثم يوزعوا هذه القطع إلى مجموعات مكونة من 4 (قطع حلوى لتضعها في فنجان جميل، أو أربع عجلات لصنع سيارة..) ونتيجة التقسيم كما ترون في الشكل (2) تكون

لدينا 6 مجموعات مكوّنة من 4 عناصر إضافة إلى عنصرين زيادة، ومن ثم قام الشخص الذي أجرى المقابلة برسم دائرة حول كل رقم منفصل من العدد وطرح السؤال أن كان هذا الجزء من العدد 26 له علاقة بكم لديك من القطع؟؟
إن التجميع الظاهر في هذا السؤال بدل من أن يسهل على الطالب إعطاء الإجابة الصحيحة سهل عليه إعطاء الإجابة الخاطئة، وكنتيجة له عكس الطلاب قيمة المنازل، ولأن التجميع لم يكن أساسه العدد 10، فلقد كانت الإجابة الخاطئة متلائمة مع تفسير القيمة الظاهرة. فتقريبا نصف طلبة الصف الثالث قالوا بان الـ 2 يمثل قطعتان (القطع الزائدة)، والـ 6 في العدد 26 يمثل " 6 أكواب أو 6 سيارات".

شكل 2: ستة وعشرون قطعة مقسمة في مجموعات أربعة



مراحل توضيح وتفسير أعداد مكونة من رقمين (أعداد ثنائية المنزلة):

لقد تم تطوير نموذجا مكونا من خمس مراحل اعتمدها الطلبة في تفسيرهم للأعداد المكونة من رقمين وهذا بالاعتماد على الدراسة الأصلية وعلى نتائج أبحاث أخرى لها علاقة بالموضوع (Ashlock 1978;Baroody et al. 1983;Barr 1978;Bednarz and Janvier 1982;Flournoy 1967;Heibert and Wearne 1983; M.Kamii 1980,1982;National Assessment of Educational Progress 1983;Rathmell 1972; Resnick 1983;Rickman 1983; Scrivens 1968;C.Smith 1969; R. Smith 1973).

وصف المراحل المختلفة:

المرحلة الأولى: العدد الكلي - عندما يقوم الطلبة في مجتمعاتنا ببناء معرفتهم عن الكميات حتى العدد 99، وتمثيلهم الرمزي لأعداد مكونة من رقمين، يأتي أولاً فهمهم للعدد كوحدة واحدة (الكل) في بنائهم المعرفي _ فالعدد 52 يمثل العدد كله والكمية كلها_وهنا لا يعطون الأرقام المنفصلة أي معنى. وبإمكانك رؤية تقارير تتحدث عن الموضوع ذاته من خلال مراقبتها لطلاب أمريكا و أسيا، لمزيد من المعلومات انظر مقالة Miura(1987) and Miura et al(تحت الطباعة).

المرحلة الثانية: خاصة ترتيب الامكنة - يعرف الطلاب ان الرقم الموجود في يمين العدد منزلته هي الآحاد وان الرقم الموجودة في يسار العدد منزلته هي العشرات، معرفتهم بالأرقام المنفصلة يقتصر على مكانها فقط، ولا يشمل الكميات الملائمة لكل رقم.
المرحلة الثالثة: القيمة الظاهرة **(Face Value)** - يفسر الطلاب كل رقم على انه يمثل العدد الذي يشير إلى قيمته الظاهرة، فمجموعة العناصر التي تمثل رقم العشرات قد تختلف عن تلك التي تمثل رقم الآحاد

فقد يعين الطلاب بشكل شفهي العشرات على انها تمثل العناصر التي تلائم رقم العشرات دون قصدهم انها تمثل مجموعات مكونة من عشرة وحدات، وهم أيضا لا يعرفون ان العدد الذي يمثل العشرات هو عبارة عن أحد مضاعفات العدد عشرة.

المرحلة الرابعة: نطاق البناء - يعرف الطلاب أن الرقم الذي من جهة اليسار في العدد يمثل مجموعات مكونة من عشرة عناصر وان الرقم اليميني في العدد تمثل العناصر المنفردة، ولكن هذه معرفة مؤقتة ويظهر هذا جلياً في أدائهم الضعيف للمهمات.

المرحلة الخامسة: الفهم والاستيعاب - يعرف الطلبة ان الأرقام المنفصلة في الأعداد المكونة من منزلتين تمثل تجزئة للعدد الكلي الى جزء يمثل العشرات وجزء يمثل الآحاد. فمقدار العناصر الممثلة لكل رقم يمكننا حسابها حتى ولو كانت العناصر مجمعة بطريقة غير قياسية.

الأعمار والمراحل:

لقد تم تحديد المرحلة التي يوجد بها كل طالب من الستين طالبًا تبعا لأدائهم في مهمات ملاءَمة الأرقام الست ومهمة معرفة ترتيب الرقم والتي طلب من الطلاب تحديد أي رقم منزلته هي العشرات وأيها الآحاد في عدد مكون من رقمين. يشير الجدول (1) إلى عدد الطلاب في كل مرحلة بحسب الصف.

جدول (1): مراحل في تطور فهم الطلاب للأعداد ثنائية المنزلة بحسب الصفوف

الصف *	مرحلة التطور				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
الثاني	8	0	3	4	0
الثالث	0	2	5	6	2
الرابع	1	0	6	1	7
الخامس	0	1	2	5	7
المجموع	9	3	16	16	16

* عدد الطلاب في كل صف هو 15.

رغم أن معظم الطلبة كانوا في المرحلة الأولى قادرين على عدّ عدد من الأغراض حتى 52 غرضًا، وكتابة العدد الملائم، كشف 12 منهم عن عدم وجود تفسير كمي للأرقام المنفصلة.
لقد نجح 16 طالبًا فقط في تلك المهمات التي تناولت ملاءَمة الأرقام في الأعداد التي تم تقسيم المنازل فيها بصورة قياسية، ببساطة تلك المهمات التي تؤدى بنجاح باستخدام تفسير القيمة المنزلية كما في المرحلة (3).
لقد نجح 16 طالبًا فقط في مهمات ملاءَمة الأرقام الست بحيث اظهروا فهمًا للمرحلة الخامسة للأعداد التي مثلت الأرقام المنفصلة في أعداد مكونة من منزلتين. لم يظهر أي من طلبة الصف الثاني فهمًا للمرحلة الخامسة. وحتى طلبة الصف الخامس نصفهم فقط وصل للمرحلة الخامسة.

تطبيقات للحجرة الصفية:

نحتاج الى مزيد من التعليمات التي تركز على الأعداد المكونة من منزلتين في الصفوف المتوسطة في المدارس الابتدائية، فالطلبة عادة لا يتطورون بنفس المعدل، كما أنهم لم يمروا بخبرات متساوية تتعلق بالأرقام والأعداد. ويظهر الجدول (1) انه حتى في صفوف الرابع والخامس الابتدائي اظهر نصف الطلبة فهمًا لمعنى الأرقام المنفصلة في الأعداد المكونة من

منزلتين. ولقد أظهرت الدراسات التي استخدمت مهمات ملاءَمة الأرقام لتقييم فهم الطلبة للقيمة المنزلية نتائج مشابهة (C. Kamii1986; M. Kamii 1980,1982) . يركز تعليم القيمة المنزلية النموذجي في الصفوف المتوسطة على عبارات رمزية لأعداد اكبر وعلى الكسور العشرية، والتي لا تناسب معظم الطلبة.

كيف يصل الطلبة إلى الصفوف المتوسطة مع فهم قليل للأعداد الثنائية المنزلة؟

يكمن أحد الأسباب في تضليل المرحلة الثانية والثالثة لنا لما توحيه بأن الطالب يفهم أكثر مما هو حقيقة عليه، فمعرفتهم بموقع منازل اليمين واليسار للعدد تمكنهم من النجاح في عدد من المهمات النموذجية الموجودة في كتبهم المدرسية او في الامتحانات القياسية، ومثال على ذلك:

في العدد 27 أي رقم يقع في منزلة العشرات؟
كم عشرة في العدد 84؟
يوجد في العدد 35 : ـــ عشرات وَ ـــ آحاد.
7 عشرات + 5 آحاد=ـــ.

ينجح الطلبة الذين يستخدمون المرحلة الثالثة(تفسير القيمة الظاهرة للمنزلة) عادة في مهمات متعددة ومتنوعة إضافة إلى تلك التي يستخدمون فيها المواد المساعدة. حيث يطلب في كثيرٍ من المهمات ملاءَمة بين الأرقام وبين المواد، فإذا كانت المواد قد جزئت بطريقة قياسية تُظهر الآحاد والعشرات فيكفي عندها الطالب نظرة واحدة ليقرر إذا كان التمثيل مناسبا للعدد 52 مثلا، فهو عندها يبحث بعينيه على خمسة من شيء ما وعلى 2 من شيء آخر. وباستخدام استراتيجية القيمة الظاهرة فإن الطالب بسهولة يلائم بين المواد المختلفة والجديدة مثل الحبوب، الفناجين، مجسمات ذات أساس عشرة (عيدان العشرة)، وغيرها، ويفشل الطلبة فقط عندما تكون التجزئة بطريقة غير قياسية، وعندما يواجهون بمهمات تتطلب إعادة التجميع، يظهر جليا فهمهم الخاطىء للقيمة المنزلية.

نحتاج إلى مزيد من الدراسات، رغم أن تجارب عديدة عن اثر استخدام المواد المساعدة مثل مجسمات للأساس عشرة وقيم منزلية أخرى لم توضح ولم تظهر تسهيلا لزيادة فهم الطلبة للقيمة المنزلية كما أظهرت الدراسة Ross 1988)) فإذا قمنا بعرض مواد سبق تصميمها لتمثيل تجميعات للأساس عشرة قبل أن يبني الطلبة معنى كمي ملائم للأرقام المنفصلة نكون بصورة غير مقصودة شجعنا واستحثينا تفسير المرحلة الثالثة (القيمة الظاهرة) للأرقام. بهذه المواد يجسد المعلم وصانع هذه المواد، منزلة العشرات ولكن ليس من المؤكد أن الطالب حقيقة فعل ذلك.
تستخدم المواد المساعدة في خدمة التواصل بين المعلم والطالب، فهي تعطينا شيئًا نستطيع الحديث عنه، والتي من خلالها نستطيع ان نتعلم الكثير عن طرق تفكير الطالب إضافة إلى مفاهيمه الخاطئة Labinowics 1985)) ، كما أننا نستطيع استخدامها لإطلاع الطالب على ما نريد منه أن يعمل. يمكن لتعليمات دقيقة وحذرة مع المواد المساعدة للقيمة المنزلية أن تسهل استيعاب المعرفة الإجرائية اللازمة لتسهيل الخوارزميات (الألغورتمات) الحسابية Fuson (1986), Resnick (1983) ، وعلينا أن لا نخدع أنفسنا بأن مثل هذا النوع من التعليم قد يقود الطلبة الى بناء فهم جيد لأنظمة القيمة المنزلية للأعداد المعقدة أو الخوارزميات.
عندما يكون الفهم هو الهدف فلا يهم استخدام المعلم الورقة والقلم أو الحبوب والفناجين أو مجسمات الأساس عشرة لتوضيح الاستراتيجية. فعندما يعرض المعلم شيئا، فليس على الطلبة أن يفكروا بل عليهم إتباع التعليمات التعليمات.
يأتي الفهم فقط من جراء التفكير، ولذا نرى أنه علينا استثارة كل طالب ليقوم ببناء معرفته الخاصة بالأعداد والعلاقات بينها. ولذا نرى انه من المحبذ أن يشارك الطلبة في مهمات تتطلب حل للمشكلات الرياضية والتي تتحدى تفكيرهم بإيجاد طرق مفيدة لتجزئة أو تجميع الأعداد.

ونرى أن عمليتي الجمع والطرح من العمليات المناسبة للصف الثاني الابتدائي، وعلينا تشجيع طلابنا على إيجاد النقاط المشتركة والمختلفة في الطرق التي يتبعونها أثناء حلولهم.
واما بالنسبة للطلاب الذين لم يتعلموا الطريقة التقليدية باستخدام الورقة والقلم لإيجاد حاصل جمع 32+59 فسيجدونها مشكلة غير روتينية حيث إن حلها غير جلي أو مباشر. فيمكن حل المشكلة باستخدام عدد من الاستراتيجيات واستخدام عدد من المواد، العدادات، الأصابع، الورقة والقلم، وعمل الطلاب في مجموعات تعاونية سيمكنهم من مناقشة ومقارنة طرقهم المختلفة مع بعض وإقناع الواحد للثاني بصحة او خطأ طريقة ما، كما بامكانهم استخدام الآلة الحاسبة للتأكد من صحة الحل، وقد نطلب منهم أمام الصف كله إثبات وتوضيح استراتيجياتهم الناجحة.

يعتبر تعليم الطلبة مفاهيم القيمة المنزلية كمتطلبات لعمليتي الجمع والطرح لأعداد مكونة من منزلتين أمرا هاما وفعالا. حيث أظهرت دراسات التعليم التجريبية بأن الطلبة في صفي الأول والثاني الابتدائي يقومون بخلق خوارزمياتهم الناجعة دون استخدام المواد المساعدة للقيمة المنزلية in (Kamii& Joseph 1988;Cobb & Merkel in press). وبالحقيقة فان المواد المساعدة قد تقلل من الفهم لأنها تسهل أداء المهمات عند استخدامها.

وفي النهاية نرغب كمعلمين بتوفير فرص لطلبتنا تمكنهم من تطوير حسهم العددي بدرجة أقوى. ولإنجاز هذا الهدف نستطيع أن نساعد كل طالب أثناء نموه أن يبني عقليا مفاهيم متطورة ومتسعة لعلاقات الجزء بالكل والقيمة المنزلية للأعداد، وهذا من خلال توفير مشكلات رياضية تتحدي طلابنا بحيث يتطلب حلها مهارات كالتقدير أو الحساب العقلي، إضافة الى شرح الطرق المألوفة والخوارزميات المتبعة في حل مثل هذه المسائل وهذا بعد توفيرنا لهم فرصة اختراع طرقهم الخاصة بعد تفكيرهم والخروج باستراتيجيات خاصة بهم لحل مسائل مثل 32+59، عندها نتوقع زيادة عدد الطلبة القادرين على إظهار مرونة بقدرتهم في التجزئة العددية، وهذه المرونة هي من صفات ذوي الحس العددي الجيد. وبعدها إذا تعلم الطلاب الخوارزميات المألوفة في حل هذه المسائل فإنهم ينظرون لها على أنها إحدى طرق إيجاد المجموع او الفروق، وعندها يستطيعون اختيار واحدة من هذه الطرق واستخدامها تبعا لملاءمتها للمشكلة، التقدير، الحساب العقلي والآلات الحاسبة، إضافة الى استخدامهم لخوارزميات مألوفة أو جديدة مخترعة.

المراجع

Ashlock, Robert B. "Research and Development Related to Learning about Whole Numbers: Implications for Classroom/Resource Room/Clinic." In *Topics Related to Diagnosis in Mathematics for Classroom Teachers*, edited by M.E. Hynes. Kent, Ohio: Research Council on Diagnostic and Prescriptive Mathematics, 1978. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 243 694).

Baroody, Arthur J., Kathleen E. Gannon, Rusti Berent, and Herbert P. Ginsburg. "The Development of Basic Formal Math Abilities." Paper presented at the meeting of the Society for Research in Child Development, Detroit, April 1983. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 229 153).

Barr, David C. "A Comparison of Three Methods of Introducing Two-Digit Numeration." *Journal for Research in Mathematics Education* 9 (January 1978):33-43.

Bednarz, Nadine, and Bernadette Janvier. "The Understanding of Numeration in Primary School." *Educational Studies in Mathematics* 13 (February 1982):33-57.

Cobb, Paul, and Graceann Merkel. "Thinking Strategies as an Example of Teaching Arithmetic through Problem Solving." In *Elementary School Mathematics: Issues and Directions*, 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va.: The Council. In press.

Cobb, Paul, and Grayson Wheatley. "Children's Initial Understanding of Ten." Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Washington, D.C., April 1987.

Flournoy, Frances. "A Study of Pupils' Understanding of Arithmetic in the Primary Grades." *Arithmetic Teacher* 14 (October 1967): 481-85.

Fuson, Karen. "Roles of Representation and Verbalization in the Teaching of Multi-Digit Addition and Subtraction." *European journal of psychology of Education* 1(1986):35-56.

Heibert, James, and Diane Wearne. "Students' Conceptions of Decimal Numbers." Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, April 1983.

Kamii, Constance. "Place Value: An Explanation of its Difficulty and Implications for the Primary Grades." *Journal for Research in Childhood Education* 1 (August 1986):75-86.

Kamii, Constance, and Linda Joseph. "The Teaching of Place Value and Double-Column Addition. *Arithmetic Teacher* 35 (February 1988):48-52.

Kamii, Mieko. "Children's Graphic Representation of Numerical Concepts: A Developmental Study. *Dissertation Abstracts International* 43 (November 1982):1478A. (University microfilmxs no. DA 822 3212).

_____ . "Place Value: Children's Efforts to Find a Correspondence between Digits and Numbers of Objects." Paper presented at the Tenth Annual Symposium of the Jean Piaget Society, Philadelphia, May 1980.

Labinowicz, Ed. *Learning from Children*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley Publishing Co., 1985.

Miura, Irene T. "Mathematics Achievement as a Function of Language." *Journal of Educational Psychology* 79 (March 1987):79-82.

Miura, Irene T., Kim C. Chungsoon, Chih-Mei Chang, and Yukari Okamoto. "Effects of Language Characteristics on Children's Cognitive Representation of Number: Cross-National Comparisons." *Child Development*. In press.

National Assessment of Educational Progress. *The Third National Mathematics Assessment: Results, Trends and Issues*. Princeton, N.J.: Educational Testing Service, 1983.

Rathmell, Edward C. "The Effects of Multibase Grouping and Early or Late Introductions of Base Representations on the Mastery Learning of Base and Place Value Numeration in Grade One." *Dissertation Abstracts International* 33 (May 1972):6071A.

Resnick, Lauren B. "A Developmental Theory of Number Understanding." In *The Development of Mathematical Thinking*, edited by H.P. Ginsburg, 110-51.l New York: Academic Press, 1983.

Rickman, Claude M. "An Investigation of Third and Fourth Grade Students' Understanding of a Decomposition Subtraction Algorithm Based on Individual Interviews." *Dissertation Abstracts International* 44 (1983):1365A.

Riley, Mary S., James G. Greeno, and Joan I. Heller. "Development of Children's Problem-solving Ability in Arithmetic." In *The Development of Mathematical Thinking*, edited by H.P. Ginsburg, 153-96. New York: Academic Press, 1983.