לקראת רהיטות חישובית בכפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים

Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division

מאת: Karen C. Fuson

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 9 No. 6, February 2003, pp. 300-305

תרגום: ברכה סגליס

בהוראה המסורתית הנהוגה בארה״ב ובקנדה, תלמידים למדו תחילה לחשב במספרים שלמים ולאחר מכן עסקו ביישום של חישובים אלה. גישה זו מציגה מספר בעיות. ראשית, תלמידים פחות מתקדמים לעיתים לא מגיעים אף פעם לשלב היישום, וזה מגביל מאוד את למידתם. שנית, בעיות מילוליות מופיעות בדרך כלל בסופו של כל חלק או פרק בחישוב, כך שתלמידים נבונים אינם קוראים את הבעיות בהקפדה: הם פשוט מבצעים על המספרים שבבעיה את הפעולה שזה עתה תרגלו. נוהג זה, בנוסף לדגש שניתן בהוראה, להתמקד על מילות המפתח של הבעיה, במקום לבנות מודל מנטלי כולל של הסיטואציה המתמטית שבבעיה, מוביל לחוסר הצלחה בפתרון בעיות, משום שהתלמידים אף פעם לא לומדים לקרוא ולעשות בעצמם מודליזציה של הבעיות. שלישית, ראיית הסיטואציות של הבעיות רק לאחר שלומדים את הפעולות המתמטיות, מונעת מן התלמידים לקשר פעולות אלה עם היבטים שונים של סיטואציות בעיה. הפרדה זו מגבילה את משמעות הפעולות ואת יכולתם של ילדים להשתמש בפעולות במגוון של מצבים.

המחקר מראה שאם מתחילים את ההוראה מסיטואציות של בעיות, מפיקים יכולת טובה יותר של פתרון בעיות, ומידה שווה או טובה יותר של יכולת לעשות חישובים. ילדים שמתחילים עם סיטואציות של בעיות, עושים מודליזציה ישירה של הפתרונות לבעיות אלה. מאוחר יותר הם עוברים לגישות מתמטיות מתקדמות יותר כאשר הם מתקדמים בשלבים של מידת הקושי של הבעיה ושל דרכי הפתרון. באופן זה, ההתפתחות של רהיטות חישובית והרכישה של מיומנויות לפתרון בעיות, שזורים אצלם זה בזה ויחד מתפתחים עם הבנה.

בניית רהיטות בשיטות חישוביות: סוגיות כלליות

רהיטות בשיטות חישוביות נחשבת אצל אנשים רבים בארה״ב ובקנדה ללב ליבם של לימודי המתמטיקה ביסודי. לימוד ותרגול של שיטות חישוביות הם מרכיב מרכזי בזיכרונות הלמידה של המאה העשרים. עם זאת, המטרות של הוראת ולמידת המתמטיקה במאה העשרים ותיאוריות הלמידה שליוו אותן, אינן מספקות עבור המאה העשרים ואחת, שבה מכונות חישוב זולות הינן בהישג יד, מחשבים מצויים במידה גוברת והולכת בבתי ספר ובספריות, רשת האינטרנט מאפשרת גישה למגוון עצום של מידע, ומחשבי-על יוצרים דרישה לסוגים חדשים של אלגוריתמים עבור מכונות, כמו למשל, שיטות רב-שלביות כלליות.

1 Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

עידן המידע יוצר אצל כל האזרחים צורך ללמידה לכל אורך החיים ולאימוץ גישות גמישות לפתרון בעיות. כל אחד צריך להיות בעל יכולת להשתמש במכונות חישוב מתוך הבנה.

ברור מכך שהמאה העשרים ואחת דורשת להתמקד יותר בטווח רחב של התנסויות בפתרון בעיות, ולהתמקד פחות על למידה ותרגול על ידי שינון של אוסף גדול של שיטות חישוב סטנדרטיות. כיצד לנצל את מעט השעות המוקדשות ללימוד מתמטיקה בבתי הספר, הינה סוגיה מרכזית. ההחלטה על כך דורשת בחלקה שיפוט ערכי לגבי הצרכים החשובים ביותר. אולם מחקרים חדשים יכולים גם הם להשפיע על הבחירות שלנו. אנשי חינוך והציבור עדיין מנסים להגיע להסכמה לגבי הסוגים והכמויות של רהיטות חישובית הנחוצים כיום. רהיטות חישובית הינה מרכיב חיוני אחד לפיתוח עוצמה מתמטית. מרכיבים אחרים כוללים הבנה של השימושים והשיטות של החישובים. בהינתן שכמות הזמן ללמידת מתמטיקה הינו משאב המצוי בצמצום, אנשי חינוך צריכים לדעת באופן גס את מידת הזמן הנדרש לילדים שונים כדי להגיע לרמות שונות של רהיטות חישובית. רק עם ידע כזה נוכל לקבל החלטות הגיוניות כיצד להקצות זמן למידה מצומצם כדי להשיג, בין כל המטרות הראויות של למידת המתמטיקה, רהיטות חישובית.

המחקר העוסק בשיטות חישוב, שנערך במהלך שלושים השנים האחרונות, מאופיין על ידי מספר נושאים. נושאים אלה מתייחסים לתחומי חישוב כמו חיבור וחיסור של מספרים חד-ספרתיים, וכפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים. בתוך כל תחום חישוב, כל תלמיד בעצמו עובר תהליך התפתחות לגבי שיטות החישוב - משיטות ראשוניות, שקופות, המבוססות על מודליזציה של בעיות ועל אמצעי המחשה, לשיטות פחות שקופות, פחות תלויות בבעיה, יותר מתוחכמות מבחינה מתמטית, וסימבוליות. ברגע נתון, כל לומד יודע ומשתמש במגוון של שיטות העשויות להשתנות בהתאם למספרים שבבעיה, הסיטואציה של הבעיה, או משתנים אישיים וכיתתיים אחרים. לומד עשוי להשתמש בשיטות שונות אפילו בבעיות דומות מאוד, ומכיוון שכל שיטה חדשה מתחרה לאורך זמן בשיטות הישנות, הלומד עשוי להשתמש בה באופן לא עקבי. ניתן לזהות טעויות אופייניות עבור כל תחום ועבור שיטות רבות (Ashlock 1998), וחוקרים תכננו וחקרו דרכים לעזור לתלמידים להתגבר על טעויות אלה. הבנה מפורטת של השיטות בכל תחום, מאפשרת לנו לזהות את היכולות שכל התלמידים צריכים לפתח כדי להצליח בשיטות אלה.

המחזורים הקבועים של עשייה וידיעה מתמטית מביאים את הלומדים לבנייה של כלים יצוגיים, בהם הם משתמשים באופן מנטלי כדי למצוא פתרונות . לומדים ממציאים שיטות מגוונות, בין אם מוריהם התמקדו בהוראה לשם הבנה ובין אם הם התמקדו על שינון לשם זכירה של שיטה מסוימת. עם זאת, בכיתות בהן המיקוד הוא על הוראה לשם הבנה, תלמידים מפתחים מגוון רחב יותר של שיטות יעילות. בכיתות בהן משתמשים בשיטות הוראה של שינון, ההמצאות של התלמידים לעיתים קרובות מולידות סוגים שונים רבים של טעויות, כשרובן שיטות נכונות חלקית שנוצרו בגלל הבנה שגויה מסוימת. לפיכך, אפילו בכיתות מסורתיות המדגישות שיטות חישוב סטנדרטיות, הלומדים אינם קולטים פסיביים של ידע. הם בונים ומשתמשים בהבנה ובעשייה העצמית שלהם, והם מכלילים ומארגנים מחדש הבנה ועשייה זו.

שיטות פתרון לחיבור, חיסור, כפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים נקראות **אלגוריתמים**. אלגוריתם הוא פרוצדורה כללית רב-שלבית אשר מייצרת תשובה עבור מחלקה נתונה של בעיות. מחשבים משתמשים בסוגים שונים רבים של אלגוריתמים כדי לפתור סוגים שונים של בעיות, והמצאת אלגוריתמים חדשים הינו תחום של מתמטיקה יישומית שחשיבותו הולכת וגוברת. אלגוריתמים שונים

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

רבים לחיבור, חיסור, כפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים, הומצאו ונלמדו ברחבי העולם. תלמידים בבתי ספר בארה״ב ובקנדה למדו בתקופות שונות אלגוריתמים שונים. לכל אלגוריתם יש יתרונות וחסרונות. לפיכך, ההחלטות לגבי רהיטות חישובית מתייחסות בחלקן לאלגוריתמים בהם אפשר לתמוך בכיתות הלימוד ולסיבות לבחירת אלגוריתמים אלה.

אחת המטרות של הקטעים הבאים היא להדגיש את האפשרות של הבנת שיטות חישוב שונות. מכיון שהבנה כזו לא היתה בדרך כלל מטרה בהוראת מתמטיקה בבית הספר, למרבית מקבלי ההחלטות בתחום החינוך לא היתה הזדמנות להבין את האלגוריתמים הסטנדרטיים, או להעריך את המגוון הרחב של אלגוריתמים אפשריים. גם למרבית המורים לא היתה הזדמנות כזו, ומרבית ספרי הלימוד אינם מסייעים במידה מספקת לפתח הבנה כזו.

מחקרים מראים שחלק מן האלגוריתמים נגישים (accessible) יותר להבנה מאשר אחרים, ושניתן להגביר את ההבנה בעזרת תומכים כמותיים כמו אמצעי המחשה וציורים, כדי לעזור לילדים להבין את המשמעויות של המספרים, הסימנים והצעדים באלגוריתמים. הבנה זו לא מתנגשת עם פיתוח רהיטות חישובית, אלא מהווה לו בסיס. ילדים צריכים תרגול עם תמיכה בכל שיטה שהם משתמשים, כדי להיות רהוטים יותר בתזמור הצעדים של כל אלגוריתם. הבנה יכולה לשמש כהנחיה מתמשכת לקראת צעדים נכונים, וכמעצור לטעויות החישוב היצירתיות הרבות שתלמידים ממציאים בשעה שמלמדים אותם אלגוריתמים על ידי שינון. מכיוון שהתלמידים אינם יכולים להבין את כל האלגוריתמים במידה שווה (אלגוריתמים רבים מקריבים הבנה כדי לחסוך מקום בכתיבה), אני מתארת לפחות אלגוריתם אחד שהוצג כנגיש לטווח רחב של תלמידים. הקריטריונים שלי לאלגוריתמים נגישים כאלה הם, שהם תומכים בהבנה של צעדים עיקריים בתחום, ניתנים להכללה למספרים גדולים, יש להם וואריאציות המאפשרות הבדלים אינדיבידואליים בחשיבה, ומבחינה פרוצדורלית קלים לביצוע, כלומר, הם דורשים מינימום של כישורי חישוב משניים כך שלא נדרש זמן למידה יקר כדי להביא כישורים משניים לא הכרחיים לרמת הדיוק הדרושה.

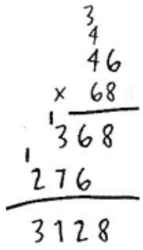
כפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים

ישנם פחות מחקרים על ההבנה של ילדים אודות כפל וחילוק במספרים רב-ספרתיים, מאשר על חישובים במספרים חד-ספרתיים ועל חיבור וחיסור במספרים רב-ספרתיים. אנשי חינוך פרסמו דוגמאות של שיעורים (Lampert 1986, 1992) וחקרו דרכים אלטרנטיביות לביצוע פעולות אלה (Carroll and Porter 1998). חוקרים דווחו על התקדמות ראשונית בלמידה של שיטות רב-ספרתיות עבור תלמידי כיתות ג – ה, שבהן המורים עודדו את הילדים להמציא אלגוריתמים (Baek 1998). שיטות אלה נעו מ- (א) מודליזציה ישירה עם עצמים או ציורים (כמו למשל ביחידות ובעשרות ויחידות); אל - (ב) שיטות כתובות הכרוכות בחיבור חוזר, לפעמים הכפלה ב-2 חוזרת – שיטה מפתיעה ביעילותה אשר שימשה כבר בהיסטוריה; אל - (ג) שיטות של חלוקה. שיטות החלוקה נעו מחלוקה תוך שימוש במספרים שונים מ- 10, חלוקת מספר אחד לעשרות ויחידות, וחלוקת שני המספרים לעשרות ויחידות.

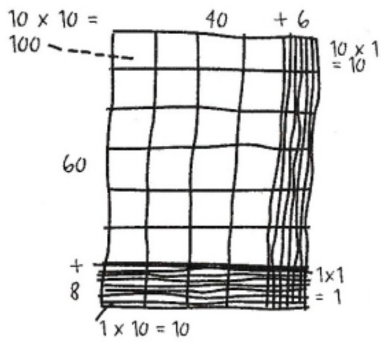
Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

איור 1: כפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים

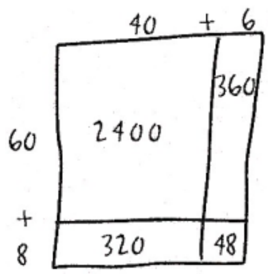
א) האלגוריתם האמריקאי הרגיל



ב) מודל של מערך

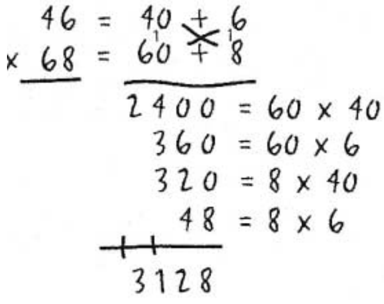


ג) מודל מקוצר: כל הצרופים של סוגי היחידה

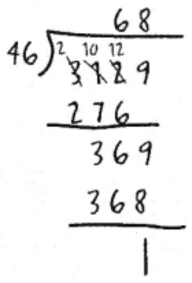


ד) אלגוריתם כפל נגיש

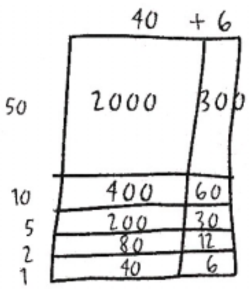
(ניתן להשמיט צעדים כאשר הם אינם נחוצים יותר)



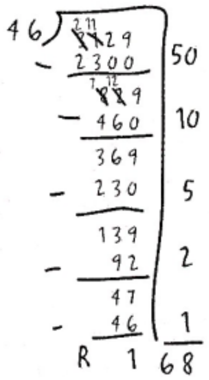
ה) האלגוריתם האמריקאי הרגיל



ו) מודל מקוצר: בניה כלפי מעלה – עותקים של 46



ז) אלגוריתם נגיש מוקדם לחילוק: הורדת עותקים של 46, עד שלא נשאר יותר

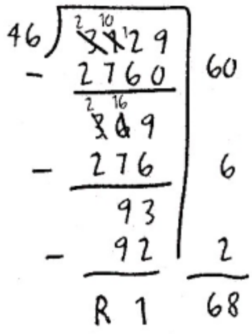


(כפולות של 5 זה קל, או קח חצי של 46 × 10)

(כבר עשיתי את זה)

(הכפלה פי 2 זה קל)

ח) גרסה מאוחרת יותר עם פחות צעדים



Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

שיטות מקובלות ושיטות נגישות

האלגוריתמים לכפל וחילוק השכיחים ביותר כיום, הם שיטות מורכבות קבועות שאינן קלות להבנה או לביצוע (ראו **איור 1א, 1ה**). שיטות אלה דורשות רמות גבוהות של מיומנות בכפל של מספר רב-ספרתי במספרחד-ספרתי בתוך תבניות מורכבות קבועות, בהן מבצעים לחילופין כפל וחיבור. באלגוריתמים אלה, המשמעות והתיווך של צעדי ביניים הוקרבו כדי לא להשתמש בכמות גדולה של נייר. האלגוריתמים של כפל וחילוק משתמשים בשיטות של יישור השומרות את הצעדים מאורגנים לפי ערך המקום, ללא צורך בהבנה של מה שלמעשה קורה עם היחידות, העשרות והמאות.

איור 1 מציג התאמות של שיטות אלה, המבהירות את המשמעות והמטרה של כל צעד. ההפרדה של צעדים בכל אחת משיטות נגישות אלה, מקדמת גם את הקישור של כל צעד עם הכמויות שבהן עוסקים. ציור של מערך מראה את הכמויות; מערכים הם מודלים חזקים לייצוג הכפל והחילוק. הגישות הנגישות והציורים מדגימים מאפיינים מרכזיים בכפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים, אותם התלמידים צריכים להבין ולעשות.

שיטות נגישות לכפל

עבור כפל, מורים מראים תחילה מודל של מערך (**איור 1ב**). מודל כזה מעניק תמיכה ראשונית להבנות ההכרחיות של ההשפעות של כפל ב- 1, 10, ו- 100. הוא גם מראה בבהירות, כיצד כל אחת מן העשרות והיחידות ב- 46 ו ב- 68 מוכפלות זו בזו, ואחר כך מתחברות, לאחר שהתלמידים סיימו לבצע את כל פעולות הכפל. המידות של הריבועים או המלבנים המתקבלים בתוצאה, מציינות את המידות של אותן מכפלות ובכך מחזקות את ההבנה. כאשר מתבוננים בכל שורה במערך, ניתן לראות בשורה הראשונה את 46×10 כ- 40×10 (ארבעה ריבועים של 100) ועוד 6×10 (ששה טורים של 10). כפל ב- 60 יוצר שש שורות כאלה של מכפלות 10, כך שהכפלה ב- 60 היא הכפלה ב- 10 ואחרי זה הכפלה ב- 6. לאחר מכן רואים שמונה שורות של 46×1 כ- 40×1 ו- 6×1 (מכל אחד שמונה שורות). מורים יכולים לצייר את המודל המקוצר המופיע ב**איור 1ג** כדי לסכם צעדים בכפל מספרים רב-ספרתיים. ההפרדה שלו לעשרות ויחידות מסייעת לפעולות הכפל הנחוצות.

אלגוריתם הכפל הנגיש המופיע ב**איור 1ד**, הינו הגרסה המלאה ביותר עם כל התמיכות האפשריות. בשעה שתלמידים מתחילים להבין כל אחד מן ההיבטים של הכפל, הם יכולים לוותר על כל אחת מהתמיכות, ולהגיע לבסוף לגרסה הזורמת שהינה צורה מורחבת פשוטה של השיטה האמריקאית הרגילה. ואריאציות של האלגוריתם הנגיש היו בשימוש רחב בכיתות מחקר ובכמה ספרי לימוד חדשניים. המאפיין העיקרי שלו הוא רישום מדויק של כל אחד מארבעת זוגות המספרים (60×40 , 8×40 , 60×6 , 8×6) שהתלמידים צריכים לכפול. הקווים האנכיים והאלכסוניים הם דרך של התלמידים לרשום, בשעה שהם מבצעים את הפעולות, אילו מספרים כבר כפלו. בשונה מהאלגוריתם האמריקאי הנוכחי, שמתחיל מצד ימין וכופל תחילה את היחידות, האלגוריתם הנגיש מתחיל מצד שמאל, כפי שתלמידים מעדיפים לעשות. לגישה זו יש גם יתרון שהמכפלה הראשונה הנרשמת היא הגדולה ביותר - דבר המאפשר לכל המכפלות הקטנות יותר להתיישר בקלות מתחתיה לפי המקומות הנכונים. כתיבת הגורמים בצידה של כל מכפלה, מדגישה מה שהתלמידים עושים למעשה בכל צעד, ומאפשרת בדיקה קלה. כתיבה נפרדת של המכפלות עבור 60×40 ועבור 8×40 קלה יותר לתלמידים מאשר ביצוע הפרוצדורה הרגילה: כפול 8×40 , כתוב חלק מן התשובה מתחת לתרגיל וחלק מעליו, כפול 60×40 , ואז הוסף את המספר שכתוב מעל התרגיל. ההתחלפות לסירוגין המורכבת של כפל וחיבור באלגוריתם הרגיל אינה הכרחית, מהווה מקור לטעויות, ומטשטשת את מה

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

שהתלמידים בעצם עושים בכפל מספרים רב-ספרתיים: הכפלה של כל צרוף של סוגי יחידה וחיבור של כל המכפלות (ראו את המודל המקוצר). תלמידים שמבינים ורוצים להשמיט צעדים באלגוריתם הנגיש עושים זאת ברצון, ומקבלים תוצאה הנראית כמו השיטה האמריקאית הרגילה, פרט לכך שצריך לחבר ארבע מכפלות, במקום שתיים. אם התלמידים רוצים, ניתן גם לצמצם ארבע מכפלות אלה לשתיים. באופן זה, המודל הנגיש מאפשר לתלמידים לתפקד ברמת ההבנה הנתמכת האישית שלהם ומסייע להם להסביר מה שהם עושים.

כפל של מספרים תלת-ספרתיים הינו הרחבה פשוטה של גירסת הכפל של מספרים דו-ספרתיים. לאחר התפתחות המושג של כפל ב- 100 (כלומר, מספרים גדלים בשני מקומות, כך שהם זזים שני מקומות שמאלה), ציורים מקוצרים יכולים להמחיש את תשעת הצרופים של מכפלות שתלמידים צריכים למצוא ולחבר. תלמידים יכולים לבצע בקלות את האלגוריתם הנגיש עבור מספרים גדולים אלה, משום שהוא תומך בצעדים הנדרשים. לאור הנגישות של מחשבונים, ישנה אי בהירות לגבי כמות הזמן להוראה בעלת ערך אשר מורים צריכים להקדיש לתרגילי כפל גדולים מסוג זה. אבל מורים יכולים בקלות להציג תרגילים אלה באופן מושגי המתייחס לאומדן של המכפלה, במיוחד כאשר מוצאים תחילה את המכפלה הגדולה ביותר, כמו בשיטה הנגישה המופיעה ב**איור 1ד**.

שיטות מקובלות ושיטות נגישות לחילוק

לאלגוריתם החילוק הרגיל יש שני היבטים היוצרים קשיים עבור תלמידים. ראשית, הוא דורש מהם לקבוע בדיוק את מקסימום הפעמים של המחלק שהם יכולים לקחת מן המחולק. מאפיין זה הינו מקור לחרדה משום שתלמידים מתקשים על פי רוב לאמוד בדיוק כמה יכנס. תלמידים בדרך כלל עושים בצד ניסיונות של כפל עד שהם מוצאים את המספר הנכון. שנית, האלגוריתם הנוכחי לא נותן תחושת גודל של התשובות שהתלמידים כותבים; למעשה, הם תמיד כופלים בספרות יחידות. בדוגמא ש**באיור 1ה**, הם פשוט כותבים 6 מעל השורה; אין להם שום תחושה של ה- 60 משום שהם למעשה רק כופלים 46 ב- 6. לכן, תלמידים מתקשים לרכוש ניסיון באומדן סדר הגודל של תשובות בחילוק כאשר הם משתמשים באלגוריתם הנוכחי.

השיטה הנגישה לחילוק המופיעה ב**איור 1ז** מעודדת עשיית אומדן בטוח. היא בונה את ההתנסויות של תלמידים עם אומדן, ובהמשך, את הערכתם המדויקת לתשובות המתקבלות במחשבון, משום שהם כופלים במספר הנכון, כלומר ב- 60 ולא ב- 6. השיטה קלה עבור אותם תלמידים שעדיין עסוקים ברכישת שליטה בלוח הכפל, משום שהיא מאפשרת את השימוש במכפלות ידועות. לאלה המסוגלים לכך, ניתן לקצר את השיטה כמעט כמו האלגוריתם הנוכחי (**איור 1ח**). אנשי חינוך השתמשו באלגוריתם נגיש זה לחילוק בחומרי לימוד חדשניים, לפחות משנות ה- 60.

הדוגמא לשיטה הנגישה המופיעה ב**איור 1**, מראה פיתרון שתלמיד עשוי לבצע כאשר הוא מתחיל ללמוד חילוק. מבחינה מושגית, הציור (**איור 1ו**) והאלגוריתם הכתוב (**איור 1ז**) מראים ביחד את המשמעות של חילוק ארוך: זה כמו פזל שבו הפותר לוקח עותקים של המחלק, במקרה זה – 46, עד שאי אפשר לקחת יותר עותקים. התלמיד פותר את המשוואה " $46 \times ? = 3{,}129$ " תוך שימוש בסימון של החילוק כמצב ההפוך לכפל. הציור מראה את העותקים שמתווספים עד שמקבלים סך של 3,128 כ- 68×46 (שארית 1), והאלגוריתם הכתוב מפחית כל מכפלה גדולה בשעה שהפותר עוקב אחר כמה עוד הוא צריך לקחת. הציור יכול לתמוך בכפל החד-ספרתי בדו-ספרתי הנחוץ בכל צעד: 46×50 מפוצל ל- $50 \times 40 = 2{,}000$,
ול- $50 \times 6 = 300$ הנותנים ביחד 2,300. התמיכה חשובה משום ששילוב זה של הכפלה והוספה הינו מורכב עבור חלק מן התלמידים. הדוגמה מראה שהתלמיד בחר לכפול ב- 50 משום שעובדות הכפל של 5 נלמדות

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

בקלות ובדייקנות. התלמיד רואה אז שהוא יכול פשוט לקחת עוד 10 פעמים 46. לאחר מכן התלמיד בוחר בחוכמה מכפלה שכבר מצא (46×50) כדי להוריד 5 פעמים 46. הכפלה ב-2 זה גם קל, למרות שתלמידים רבים היו קרוב לודאי כופלים בשלב זה ב- 3. הכפלה פי 2 חוזרת מייצגת את הבסיס לאלגוריתמים של כפל וחילוק שבהם נהגו להשתמש באירופה בעבר. **איור 1ח** מראה גרסה של אותה בעיה אשר אותו תלמיד עשוי להשלים עם יותר ניסיון. בשלב זה, התלמיד עשוי לא להזדקק לציור כדי לתמוך בצעדים, משמעויות, או בפעולות הכפל.

האלגוריתמים הנגישים לכפל וחילוק תלויים במידה רבה ברהיטות בכפל ובחיבור, ובחילוק - גם בחיסור מספרים רב-ספרתיים. הקשיים שיש לתלמידים רבים בחיסור, משפיעים במידה ניכרת על החילוק, כך שהבנה ורהיטות של חיסור מספרים רב-ספרתיים חשובים ביותר. מאחר וקצב הלימוד של תלמידים את עובדות הכפל לרוב אינו אחיד, רבים מהם עלולים לא להגיע לשליטה מלאה בשעה שהכיתה שלהם דנה בכפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים. מומלץ לתת לתלמידים כאלה להשתמש בלוח הכפל כדי לבדוק את הכפולות שהם מבצעים. כלי עזר זה יאפשר להם לעמוד בקצב של הכיתה וללמוד את האלגוריתם. יתר על כן, כל בדיקה, או חיפוש של מכפלה בלוח יוצרת עוד התנסות למידה של עובדות הכפל. כמובן, גם מתן הזדמנויות לתלמידים לתרגל את צרופי הכפל בהם אינם שולטים, עשוי לעזור.

חישובים במספרים רב-ספרתיים במאה העשרים ואחת

כמה זמן יקר ערך של לימוד מתמטיקה בביה״ס יש להקדיש לעיסוק בכפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים, היא שאלה שהתשובה עליה ודאי תדרוש עיון מחדש מתמשך במהלך המאה העשרים ואחת. מטרות חדשות תופענה, שתתחרנה בתחומים אלה, כפי שכבר קרה. נכון לעכשיו, מקדישים זמן לגישות מושגיות ונגישות המקדמות את ההבנה של תלמידים כיצד לבנות כפל וחילוק של מספרים רב-ספרתיים מתוך המושגים המרכזיים של ערך מקום ועובדות כפל בסיסיות. במהלך אותו זמן, תלמידים יכולים גם להגיע לשליטה בעובדות הכפל. תרגול למשך פרקי זמן ארוכים של תרגילים במספרים גדולים, נראה כמטרה המתאימה יותר למאה העשרים מאשר למאה העשרים ואחת. נקודת המבט החדשה, הנתמכת במחקר, אודות השגת רהיטות חישובית הינה מורכבת ומקושרת יותר, לעומת נקודת המבט הליניארית שהיתה נהוגה בעבר ואשר כללה ספירה, שינון עובדות, פתרון תרגילים, לימוד אלגוריתמים ולאחר מכן פתרון בעיות עם אותם אלגוריתמים. יחד עם זאת, יש צורך בנקודת מבט חדשה מורכבת יותר, על מנת להשיג את המטרות החדשות המורכבות יותר של הוראת ולמידת מתמטיקה הנחוצה במאה העשרים ואחת. סוג חדש של רהיטות חישובית נדרש עבור האתגרים והשינויים שאנשים בארה״ב ובקנדה יעמדו בפניהם בשנים הבאות.

מאמר זה מתבסס על מאמר רחב יותר בשם: "Developing Mathematical Power in Whole Number Operations"
מתוך: Research Companion to Principles and Stansards for School Mathematics. Ed. Kilpatrick J., Martin W.G., Schifter D. Reston Va. 2003 NCTM.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

ביבליוגרפיה

Ashlock, R. B. *Error Patterns in Computation*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall,1998.

Baek, J.-M. Children's Invented Algorithms for Multidigit Multiplication Problems." In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, edited by L.J. Morrow and M. J. Kenney, pp. 151-60. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.

Carroll, W.M., and D. Porter. "Alternative Algorithms for Whole-Number Operatios." In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, edited by L.J. Morrow and M. J. Kenney, pp. 151-60. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.

Lampert, M. "Knowing, Doing, and Teaching Multiplication." *Cognition and Instruction* 3 (1986): 305-42.

_______. "Teaching and Learning Long Division for Understanding in School." *In The Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, edited by G. Leinhardt, R.T. Putnam, and R.A. Hattrup. Pp. 221-82. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 1992.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2003
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation