

הצגת אחוזים במדידה לינארית כדי לפתח הבנה של פעולות במספרים רציונאליים

Introducing Percents in Linear Measurement to Foster an Understanding of Rational-Number Operations

מאת: Joan Moss

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 9 No. 6, February 2003. pp. 335-339

תרגום: ברכה סגליס

כיצד אנו מפתחים רהיטות חישובית (computational fluency) במספרים רציונאליים, בשעה שנושא זה ידוע כיוצר קשיים רבים כל כך לתלמידים צעירים? כיצד אנו יכולים לעזור לתלמידים להבין את הפעולות במספרים רציונאליים, בעוד תפיסתם את הכמויות המעורבות במערכת המספרים הרציונאליים לרוב מוגבלת מאד? ההוראה המסורתית של מספרים רציונאליים מתמקדת בחוקים ובזכירה. מורים נותנים לתלמידים לעיתים קרובות הוראות כמו, "כדי לחבר שברים, מצאו ראשית מכנה משותף, ואח"כ חברו רק את המונים" או "כדי לחבר ולחסר מספרים עשרוניים, רשמו אותם כך שנקודה תהיה מתחת לנקודה, ואח"כ בצעו את החישובים."

זכירה וביצוע נכונים של חוקים יחסית פשוטים אלה יכולה להיות מאד קשה, כאשר לתלמידים אין בסיס מושגי טוב במספרים רציונאליים. לדוגמה, מחקר שנערך לאחרונה מצא, שלשישים וחמישה אחוז מהתלמידים בדגימה אקראית של עשרים ילדי כיתות ו', היה קושי בחיבור שברים. יתרה מזאת, עשרה אחוז בלבד מאותה קבוצה הצליחו להסביר כיצד עובד חיבור שברים, למרות שכולם למדו את החוקים במשך מספר שנים (Kilpatrick, Swafford, and Findell, 2001). תלמידים לעיתים קרובות מפרשים שבר בצורה שגויה, כשני מספרים בלתי תלויים וניתנים לספירה. כשהם מתבקשים לענות על שאלה כמו:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}} \quad , \quad \text{הם מניחים שהתשובה היא } \frac{2}{5} - \text{ מספר הקטן מהמחובר } \frac{1}{2} .$$

תלמידים רבים גם מבלבלים בין החוקים הקשורים לפעולות במספרים עשרוניים. Hiebert and Wearne (1986) דווחו שכאשר בקשו למצוא את הסכום של $3 + 4$ מרבית תלמידי חטיבת הביניים לא היו מסוגלים למצוא תשובה נכונה, ומרבית תלמידים אלה הניחו שהתשובה היא 7. (נקודה שבע¹). ברור שאם התלמידים לא ישיגו את ההבנה הדרושה של הכמויות המעורבות במספרים רציונאליים, ושל משמעות הסמלים והפעולות, הם עלולים לחוות קשיים משמעותיים בחישובים של מספרים רציונאליים. מאמר זה מציג מיומנויות חישוב של מספרים רציונאליים, שפותחו על ידי תלמידים בכיתה ד', שהשתתפו בפרויקט מחקר העוסק בלימוד מספרים רציונאליים (Moss and Case 1999). המטרה של פרויקט מחקר זה, שעדיין נמשך, היא לעודד הבנה גמישה ומקושרת של מערכת המספרים הרציונאליים (ראו גם Moss 2000 ; Moss 2002 ; Kalchman, Moss, and Case 1999). הפרויקט אינו כולל לימוד של חוקים מסוימים לפעולות עם מספרים רציונאליים לתלמידים; במקום זאת, מטרתו לעזור לתלמידים לפתח גישה

¹ הערת המתרגמת: כאשר כותבים בארה"ב ביצוע עשרוני מספר קטן מאחד, נהוג להשמיט את האפס, למשל, המספר 0.3 נכתב כ-0.3. [נקודה שלוש].

של "חוש למספרים" למספר הרציונלי (Sowder 1995), כך שיהיו מסוגלים לעבור בין שברים, מספרים עשרוניים, אחוזים, ויחס בצורה גמישה וחלקה, ולהמציא שיטות לחישובים במספרים אלה. הגישה הלימודית של הפרויקט להוראת מערכת מספרים זו היא לא שגרתית. תלמידים מתחילים את החקירה שלהם על מספרים רציונאליים בלימוד על אחוזים בתוך ההקשר של מדידות לינאריות. לימוד השברים הפשוטים והעשרוניים בא לאחר מכן ומבוסס על לימוד האחוזים. למרות שגישה זו משנה את רצף ההוראה המסורתית למספרים רציונאליים, יש בה יתרונות רבים עבור תלמידים צעירים. לדוגמה, עצם ההתחלה עם אחוזים במקום עם שברים פשוטים, גורמת לדחיית הבעיה שתלמידים צריכים להשוות או לפעול עם יחסים בעלי מכנים שונים. זה מאפשר לילדים להתמקד בפיתוח פרוצדורות משלהם להשוואה ולחישוב, במקום להאבק על מנת לשלוט במערכת מורכבת של פרוצדורות שעלולה להראות זרה עבורם. אף על פי שלכל ערך באחוזים יש ערך שקול בשבר פשוט או עשרוני בהתאמה, שקל לקבוע אותו, הרי שההיפך אינו נכון. לשברים כמו $1/7$ ו- $1/9$ אין ערך שקול לחשב אותם במספרים עשרוניים או באחוזים. לפיכך, יתרון נוסף של הגישה הלימודית הזו, היא שאם מתחילים עם אחוזים, אנו מאפשרים לתלמידים לעשות את ההמרות הראשונות שלהם בין הייצוגים השונים של מספרים רציונאליים בדרך ישירה ואינטואיטיבית ולפתח הבנה כללית טובה יותר אודות האופן שבו שלוש המערכות מקושרות זו לזו. לבסוף, נראה שלא רק שלתלמידים יש ידע בלתי פורמלי מוצק על אחוזים בחיי היומיום, הם גם מציגים חוש אינטואיטיבי טוב לעשיית פעולות במספרים אלה (Lembke and Reys 1995).

מאמר זה מתאר את סוגי הפעילויות שהתלמידים ביצעו כדי לפתח את ההבנה המושגית שלהם ואת יכולות החישוב שלהם במערכת המספרים הרציונאליים. בכל פעם שתוכנית לימודים זו בוצעה, שינינו חלק מן השיעורים כדי להתאימם לרמות ההבנה של התלמידים. עם זאת, רצף השיעורים נשאר זהה, כמו גם העזרים והייצוגים המיוחדים בהם השתמשנו. קטע מתוך אחד השיעורים שהתקיים לקראת סוף המחזור של עשרים השיעורים, ימחיש את סוגי האסטרטגיות שהתלמידים פיתחו לחישובים עם מספרים רציונאליים.

בזמן השיעור, התלמידים עבדו עם המורה שלהם על אסטרטגיות לחיבור וחיסור מספרים רציונאליים בייצוגים שונים. המורה הזמינה זוגות של תלמידים להציג בפני הכיתה בעיות אתגר בחיבור וחיסור שהם המציאו. התלמידים עבדו על חישובים אלה בעל-פה, על פי רוב ללא שימוש בנייר ועיפרון. התלמידים פיתחו מספר שיטות לא סטנדרטיות לעבודה עם מספרים אלה.

שני תלמידים, ג'ינט וג'ון (שמות בדויים), היו הראשונים שהציגו את בעיות האתגר שלהם. ג'ון רשם את הבעיה על הלוח: $1/4 + .125 + 1/8 + .5 = \underline{\quad}$

סם: טוב, אני יכול לעשות את זה. זה קל. התשובה היא 1. משום שנקודה אחת שתיים חמש ו- $1/8$ הם $.25$, ועוד רבע $[0.25]$ הם ביחד 5. [נקודה חמש]. אחרי זה יש לך עוד חצי, אז זה יוצא ביחד שלם אחד. אז התשובה היא 1.

הילדה השניה שדיברה, איריס, הגיעה גם כן לאותה תשובה, אבל תרגמה את הייצוגים השונים בתרגיל לייצוג שלהם בשבר פשוט במקום למספרים עשרוניים.

איריס: אני גם חושבת שהתשובה היא אחד, אבל עשיתי את זה כך: קודם כל, שיניתי את $1/2$ לשני רבעים, אז עכשיו מתחילים עם 2 רבעים. אחרי זה מוסיפים את ה- $1/4$ הראשון, וכעת יש 3 רבעים. גם, אם מחברים 125. ו- $1/8$, מקבלים עוד רבע. אז 4 רבעים נותנים 1.

האתגר שסיימון ולואיזה הציבו היה מה שכינינו שאלה של "אמת או שקר".

סיימון: הנה הבעיה שלנו. האם אתם חושבים שזה אמת או שקר? [לואיזה רשמה את הפסוק הבא:

$$[37 \frac{1}{2}\% - 1/8 - 0.10 = 0.15$$

ג'סיקה: בוא נראה. זה קצת קשה. שמינית זה $12 \frac{1}{2}$ אחוז, אז לוקחים את ה- $12 \frac{1}{2}$ אחוז מ- $37 \frac{1}{2}$ אחוז זה 25 [אחוז]. עכשיו לוקחים 10 אחוז והתשובה היא 15 אחוז. אז זה אמת, זה נקודה 15.

לבסוף, ריאן וסשה עמדו לפני הכיתה. הם בחרו להשתמש בתבנית שאלה מסוג " כמה עוד חסר כדי להגיע לשלם אחד?" תבנית זו היתה המועדפת על ידי התלמידים, משום שהיתה להם נטייה לבנות שרשרות מספרים מאוד ארוכות ומסובכות. תבנית זו מאפשרת גם לתלמידים לענות בהרבה דרכים שונות.

סשה: אז אנחנו רוצים לדעת מה צריך להוסיף למספרים כדי לקבל שלם:

$$1/16 + 1/16 + .25 + 15\% + 1/4 + 1/8 + \underline{\quad} = 1$$

אלן: אחד חלקי שש-עשרה ועוד $1/16$ הם $12 \frac{1}{2}$, וביחד עם $1/8$, זה יוצא 25. אז מוסיפים עוד 25, זה 50; אחרי זה $1/4$, זה יוצא 75. עכשיו מוסיפים את ה- 15 [אחוז] זה יוצא 90. אז כל זה מסתכם ל- 90. אז צריך עוד 10 אחוז או נקודה 10 כדי לקבל שלם אחד.

לאורך היתה נטייה להשמיט את המילים "אחוז" ו"עשרוני" בזמן שהיא עבדה על הפיתרון שלה. למרות שנוהג זה, שהיה אפייני לתלמידים רבים אחרים, לא קיבל עידוד, לא נראה שהוא פגע בהבנה של התלמידים לגבי הכמויות המופיעות בשאלות או ביכולתם להגיע לתשובות נכונות. דוגמאות אלה לקוחות מכיתה מחקר אחת בלבד, אבל הן מייצגות מאפיינים של חשיבה שהתפתחה בכיתות אחרות בהן יושמה התערבות זו (ראו Kalchman, Moss and Case 2001). המאפיינים הבולטים ביותר הם אלה:

- הקלות שבה תלמידים עוברים בין הייצוגים של המספרים הרציונאליים;
- השימוש בנקודות התייחסות (benchmarks) במקום בפרוצדורות הסטנדרטיות, כדי לתרגם בין ייצוגים בשברים פשוטים, מספרים עשרוניים ואחוזים;
- החוש החזק לכמויות הקשורות לייצוגים של המספרים הרציונאליים.

כיצד התפתח סוג כזה של חשיבה? החלק הבא של המאמר יציג בקצרה את הרצף של תוכנית הלימודים על מנת להראות כיצד הפעילויות המוקדמות שלנו עם אחוזים ומדידות הובילו לדרכים בהם תלמידים עבדו עם מספרים רציונאליים.

אחוזים וקנקנים

בתחילת ההוראה התלמידים עשו אומדן ולאחריו חישבו את אחוז המים שהכילו קנקנים שונים.

מורה: אני מילאתי קנקן זה במים כחולים. האם תוכלו לאמוד מה אחוז המים שמכיל קנקן זה? תלמיד: אני מנחש שהקנקן מלא ב- 25% בקרוב.

מורה: אז איך תוכל למצוא בדיוק כיצד למדוד את המים עד לקו של 25%? תלמיד: פשוט. גובה הקנקן הוא 12 ס"מ, אז אם זה היה מלא ב- 50%, הקו היה במחצית הגובה של המיכל, וזה יוצא 6 ס"מ. אבל זה מלא ב- 25%, אז צריך לעשות שוב חצי. אז זה יהיה 3 ס"מ.

באופן טבעי, התלמידים בחרו באסטרטגיה של חצייה חוזרת (repeated halving) כדי לפתור את משימות המדידה הראשונות שקיבלו. כאשר תרגילי המדידה הורחבו וכללו כמויות המייצגות 75%, התלמידים שוב פיתחו שיטות משלהם כדי למצוא את התשובה. הם חילקו את המשימה לסדרת צעדים. הפתרון של ג'סיקה לחישוב $18 \times 75\%$ מאפיין את הצעדים שמרבית התלמידים עברו.

ג'סיקה: טוב, כדי למצוא 75% מ-18, קודם אתה צריך למצוא 50%, שזה 9; ואז חצי מזה, 25%, זה $4 \frac{1}{2}$. אז מחברים את שניהם ביחד ומקבלים $13 \frac{1}{2}$. אז 75% מ-18 זה $13 \frac{1}{2}$.

נקודות הייחוס של 25%, 50%, ו-75% הפכו להיות כלים מקובלים בכל עבודות התלמידים בהמשך, כפי שהיו השמות של אותן כמויות: רבע, חצי, ושלושה רבעים. התלמידים קיבלו הדרכה כיצד לרשום שברים אילו בצורתם הסימבולית: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ו- $\frac{3}{4}$.

נקודת ייחוס חדשה

בשעה שהתלמידים המשיכו למדוד ולחשב את מידת המלאות של כמויות שונות, או אחוזים של אורכים של עצמים אחרים בכיתה, הם כללו באופן טבעי את נקודת הייחוס החדשה של $12 \frac{1}{2}$ אחוז (חצי של 25 אחוז). נקודת ייחוס חדשה זו, שתמיד קושרה לשבר הפשוט השקול שלה – $\frac{1}{8}$, הפכה להיות כלי שימושי לחישוב כמויות. באותו האופן שבו הם ביצעו רצף של חצייה (halving) וצרוף כדי לחשב כמויות של 75%, התלמידים יכלו כעת להרחיב את החישובים שלהם כך שיכללו כמויות חדשות כמו $37 \frac{1}{2}$ אחוז $(25\% + 12 \frac{1}{2}\%)$ ו- $62 \frac{1}{2}$ אחוז $(50\% + 12 \frac{1}{2}\%)$.

מספרים עשרוניים ושעוני עצר

כאשר התלמידים הגיעו לרמה של שליטה בנקודות הייחוס של האחוזים, הצגנו בפניהם מספרים עשרוניים בעלי שני מקומות מימין לנקודה ואת הקשר שלהם לאחוזים. הגישה הבסיסית היתה להראות להם שמספר עשרוני עם שני מקומות מימין לנקודה מייצג אחוז של "דרך" בין שני מספרים שלמים סמוכים; למשל, 5.25 ממוקם במרחק של 25% בין 5 ל-6. השתמשנו בשעוני עצר דיגיטאליים המציגים שניות ומאיות שנייה, המאיות מופיעות כשתי ספרות קטנות מימין למספרים. התייחסנו למשמעות של שני "המספרים הקטנים" ולאופן שבו הם מתייחסים למספרים הגדולים יותר שמשמאלם (השניות). אחרי שהתלמידים

התנסו בהפעלת שעוני העצר וציינו לעצמם ששנייה אחת מכילה מאה יחידות קטנות כאלה של זמן, הם קישרו מידע זה לאחוזים כשהעירו הערות כמו, "זה כאילו שהם אחוזים של שנייה".

שעוני העצר עם מאיות השנייה שלהם, שימשו כייצוג מוחשי רב עצמה למספרים עשרוניים וכלי מצויין לפעילויות רבות של השוואה וחישובים עם מספרים רציונאליים. בפעילות הפותחת, "האתגר של עצור-התחל", תלמידים נתבקשו להתחיל ולעצור את שעוני העצר מהר ככל האפשר, מספר פעמים ברצף. למדו אותם לרשום את הזמנים שקיבלו כמספרים עשרוניים; לדוגמה, עשרים מאיות של שנייה נרשם כ- 0.20, תשע מאיות של שנייה, נרשם כ- 0.09, וכך הלאה. בבואם להשוות את זמני התגובה המהירים ביותר שלהם עם אלה של עמיתיהם, היתה לתלמידים הזדמנות לא רק לסדר את המספרים לפי הסדר, אלא גם למצוא דרכים לחשב הפרשים בין מספרים עשרוניים, או נקודות זכייה. משחק אחר עם שעוני עצר שקידם את ההבנה של סדר גודל היה "עצור את השעון בין הזמנים". המשחק כלל שאלות כמו, "האם תוכלו לעצור את השעון בין 0.45 לבין 0.50?"

לבסוף, התלמידים שיחקו במשחקים שמטרתם היתה לנוע בין ייצוגים של מספרים רציונאליים ולחשב סכומים והפרשים. במשחק שתכננו הנקרא "פצח את הצופן", תלמידים נתבקשו לעצור את השעון במספר העשרוני השקול לשברים ואחוזים שונים. לדוגמה, אם קיבלו את הקוד הסודי "3/4", התלמידים נתבקשו לעצור את השעון בשבעים וחמש מאיות השנייה. באתגרים אחרים של צופנים סודיים, התלמידים ביצעו חישובים. הם נתבקשו לעצור את השעון קרוב ככל האפשר לתשובה של משוואה; לדוגמה, $1/2 + 3/4 = 1.25$, ואז "לחשב את הערך של מידת הקרבה אליה הגעתם במספר עשרוני".

הפעילויות עם שעוני העצר ופעילויות רבות נוספות, היו הן יעילות בקידום החוש של הילדים לשקילויות ולייצוגים מעורבים והן מהנות. בימים האחרונים של התערבות לימודית זו, התלמידים תכננו פעילויות משלהם עם שעוני העצר. Moss (2000) כוללת במאמרה רשימה מלאה הן של התכנים שכוסו בכל שיעור והן של בעיות האתגר שניתנו.

הערכת ביצוע של חישובים סטנדרטיים

כאשר הערכנו את ביצועי התלמידים במשימות של מספרים רציונאליים בעקבות ההתערבויות שערכנו, מצאנו שרוב התלמידים עלו בביצועיהם על תלמידים בני אותו גיל וכן על תלמידים בוגרים יותר, במשימות בהן נדרשה הבנה מושגית. למרות שתוצאה זו עודדה אותנו, הרי שצפינו אותה. הביצועים של התלמידים במשימות חישוב מן הסוגים המקובלים, היו מפתיעים יותר; מצאנו שהתלמידים שהשתתפו בניסוי ביצעו טוב באותה מידה, או טוב יותר מתלמידים שההוראה שלהם היתה מבוססת על למידת כללים לחישובים. בהמשך מוצגות הדגמות של עבודת התלמידים עם חישובים סטנדרטיים. להלן שתי דוגמאות של דרכי חשיבה של תלמידים במשימת חיסור מאחד ממבחני הסיכום שערכנו.

מראיין: כמה זה $2 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{4}$?

תלמיד 1 מקבוצת הניסוי: אני לא בטוח. אני צריך לעשות פריטה, אבל אני לא יודע איך לעשות את הפריטה. אבל מכיוון שיש לי פה שלם, אולי אפשר להשתמש בשלם ורבע ולהוריד ממנו חצי? אז התשובה צריכה להיות $3/4$.

תלמיד 2 מקבוצת הניסוי: אה.. 3 ורבע זה 3.25, ו-2 וחצי זה 2 נקודה חמישים. אז פשוט עושים חיסור: $3.25 - 2.50 = .75$.

לעומת זאת, תלמיד מן הכיתה של קבוצת הביקורת ניסה להשתמש בכללים שזכר וקיבל תוצאה לא הגיונית. התשובה של אחד התלמידים הראתה את סוגי החשיבה שתלמידים אלו נוקטים: "קודם, אני צריך למצוא את המכנה המשותף, שהוא 4; אז זה $2 \frac{2}{4} - 3 \frac{1}{4}$, אז התשובה היא 1 ו- $\frac{0}{4}$ ". הדוגמה הבאה של חשיבה של תלמיד בפריט של כפל שברים, לקוחה מתוך ראיון של מבחן סיכום לתלמיד בעל הישגים גבוהים, ואינה מייצגת את חשיבתם של כל התלמידים בזמן העברת מבחני הסיכום. בכל אופן, אני כוללת דוגמה זו, כדי להראות כיצד הגישה שלנו להוראת מספרים רציונאליים, עם הדגש על המשמעות של פעולות במספרים רציונאליים, יכולה לעודד תלמידים לחשוב על פעולות שהינן קשות אפילו עבור מרבית המבוגרים (Moss 2000).

מראיין: כמה זה $\frac{2}{3}$ מ- $\frac{6}{8}$?

תלמיד: טוב, $\frac{6}{8}$ זה בעצם שלושה רבעים, אז זה 75%. ובכן, שליש מ- 75% זה 25%, אבל צריך $\frac{2}{3}$. אז זה 50%, וזה חצי.

מחשבות לסיום

ההגדרה לרהיטות חישובית בסטנדרטים של ה-NCTM (Principles and Standards, 2000) כוללת שלושה רעיונות: יעילות, דיוק וגמישות. בתוך דרישות אלו נעוצה הדרישה שלתלמידים יהיה ידע אודות צירופי מספר בסיסיים וקשרים חשובים בין מספרים, ויכולת לעשות בחירה מתוך מספר אסטרטגיות הולמות. יתר על כן, כדי להיות בעלי רהיטות חישובית, תלמידים צריכים להפגין הבנה של המשמעות של הפעולות ושל האופן שבו פעולות אלה מתייחסות זו אל זו (Russell 2000). התלמידים במחקר שלנו השיגו סוג מסוים של רהיטות חישובית והראו שהם פיתחו הרבה מן הדרישות הללו. כפי שמאמר זה הדגים, נראה שהאופן שבו תלמידים משתמשים בידע שלהם אודות נקודות ייחוס ובחצייה חוזרת, נותן להם חוש טוב לסדרי גודל של כמויות במספרים רציונאליים וליחסים ביניהם, כמו גם הבנה של משמעות הפעולות. למרות שאסטרטגיות אלה מביאות בסופו של דבר את התלמידים למציאת תשובות נכונות, הרי שנכון גם שהשיטות בהן משתמשים התלמידים אינן יעילות כמו אלגוריתמים סטנדרטיים יותר. במחקר הבא שלנו, אנו מתכננים להרחיב התערבות זו ולכלול יותר פרוצדורות מקובלות. זה יעזור לנו לגלות האם סוגי ההבנה של הפעולות שהתלמידים רכשו, והביטחון שהם מראים בעבודתם עם מספרים רציונאליים, יובילו אותם בסופו של דבר לבצע חישובים סטנדרטיים עם הבנה כאשר הם עוברים לעבוד עם מספרים בתחום מופשט יותר.

ביבליוגרפיה

- Hiebert, James, and Diana Wearne. "Procedures over Concepts: The Acquisition of Decimal Number Knowledge." In *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, edited by James Hiebert, pp. 199-244. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1986.
- Kalchman, Mindy, Joan Moss, and Robbie Case. "Psychological Models for the Development of Mathematical Understanding: Rational Numbers and Functions." In *Cognition and Instruction: Twenty-Five Years of Progress*, pp.1-38. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum, 2001.
- Kilpatrick, Jeremy, Jane Swafford, and Bradford Findell. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Mathematics Learning Study Committee: Center for Education, 2001.
- Lembke, Linda, and Barbara Reys. "The Development of, and Interaction Between, Intuitive and School-Taught Ideas about Percent." *Journal for Research in Mathematics Education* 25 (1994):237-59.
- Moss, Joan. "Deepening Children's Understanding of Rational Numbers." Dissertation Abstracts, 2000.
- _____. "Percents and Proportion at the Center: Altering the Teaching Sequence for Rational Number." In *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, edited by Bonnie Litwiller, pp. 109-20. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2002.
- Moss, Joan, and Robbie Case. "Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model of an Experimental Curriculum." *Journal for Research in Mathematics Education* 30 (1999): 124-48.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.
- Russel, Susan Jo. "Principles and Standards: Developing Computational Fluency with Whole Numbers." *Teaching Children Mathematics* 7 (November 2000): 154-58.
- Sowder, Judith. "Instruction for Rational Number Sense." In *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades*, edited by Judith Sowder and Bonnie Schappelle, pp. 15-30. Albany: State University of New York Press, 1995.