

מה בא אחרי? המתמטיקה של דגמים בגן הילדים

What Comes Next? The Mathematics of Pattern in Kindergarten

מאת: Karen Economopoulos

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol.5 No. 4, December 1998, pp. 230-233

תרגום: ברכה סגליס

פעילויות עם דגמים הינה מרכיב עיקרי בתכנית הלימודים בגן הילדים. אם תשאלו כל גננת, קרוב לודאי שהיא תתייחס ללימוד של דגמים כמרכיב חיוני של התוכנית במתמטיקה. בכל גן שתכנסו אליו צפוי שתראו ילדים בונים דגמים חוזרים במגוון של חומרים. רכבות ארוכות העשויות מקוביות מתחברות מטיילות על פני החדר, או "קירות" מדגמים שנוצרו מצורות הפלא מונחים על השולחן. באזור קוביות המשחק, ניתן לראות דגם העשוי לסירוגין מגופים מסוג מנסרה משולשת ומנסרה מלבנית, המקשט קיר של מבנה מקוביות המשחק. על לוחות הקיר ניתן לראות עדויות מעבודות של ילדים עם דגמים בצורת הדפסי יד בצבעים ירוק – צהוב – ירוק – צהוב, או דגמים של "נחשים" העשויים מהעתקים מנייר של צורות הפלא המודבקים על רצועות נייר צרות. בכל המקרים הללו, ילדים בנו והרחיבו תבנית (design) שחזרה על עצמה בדרך קבועה וניתנת לחיזוי. הם יצרו דגמים.

אולם מה מבינים ילדים צעירים בשעה שהם עובדים עם דגמים? מהי המתמטיקה המשמעותית בפעילויות אלו עבור ילדים בגיל חמש ושש, וכיצד רעיונות ופעילויות אלו מתקשרים לעבודת ההמשך במתמטיקה? ספר הנספח לסטנדרטים של ה-NCTM: **דגמים** (Coburn et al. 1993) מציין שבגן "ילדים צריכים להתמקד על קביעות וחזרה בתנועה, צבע, צליל, מיקום, וכמות ולהיות מעורבים בזיהוי, תיאור, הרחבה, העברה, תרגום ויצירה של דגמים" (עמ' 2). יתר על כן, כדי להבין את המושג דגם, ילדים צריכים לזהות את יכולת הניבוי והחזרה שהדגמים מרמזים עליהם במצבים הבאים (Coburn et al. 1993, 2):

- יש דגמים שבהם היחידה הבסיסית חוזרת על עצמה: אדום – אדום – כחול, אדום – אדום – כחול.
- דגמים אחרים עשויים לגדול: מחיאת כף – ניתור, מחיאה – מחיאה – ניתור, מחיאה – מחיאה – מחיאה – ניתור.
- דגמים עשויים להתגלות בדרכים לא צפויות: כאשר אנו חוקרים עם אמצעי המחשה, אנו מגלים לעיתים קרובות דגמים.
- דגמים הם חלק מן העולם שיצרנו: האור הירוק ברמזור מופיע אחרי האור האדום ואז התנועה מתחילה לנוע.

כדי לחשוב על שאלות אלו ועל רעיונות אודות דגמים, כמו גם על נושאים מתמטיים אחרים בתוכנית הלימודים של הגילאים הצעירים, נפגשה קבוצה של גננות בקביעות במהלך שנת הלימודים כדי לדון על החשיבה המתמטית של תלמידיהם. קידום דיונים בין מורים אודות האופן שבו ילדים לומדים מתמטיקה, הוכח כדרך יעילה לעידוד מורים לחשוב בצורה ביקורתית יותר על הוראת המתמטיקה (Simon and Schifter 1991; Wilson and Ball 1991). קבוצת הגננות פעלה על פי הנחה זו ומצאה שעשייה משותפת של מתמטיקה עזרה להן ללמוד עוד על המתמטיקה שהן מלמדות.

1

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1998 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

במהלך הזמן שהוקדש במפגשים לדיונים על דגמים, חקרו הגננות בעיות מתמטיות העוסקות בדגמים ועשו רפלקציה על אפיזודות מהגנים שהן תעדו כאשר תלמידיהן עסקו בפעילויות של דגמים. כמו רוב הגננות, הן התייחסו במשך שנים רבות לפעילויות עם דגמים כחלק מקובל וישיר של תוכנית הלימודים שלהן. כאשר הן חשבו ביחד על עבודתן עם דגמים, הן התחילו לבדוק בצורה מעמיקה יותר את הפעילויות שהיו עד כה מובנות מאליהן ולחשוב ביחד על הרעיונות המתמטיים העומדים ביסוד פעילויות אלו. אחת הגננות העירה:

אני עושה פעילויות של דגמים עם הילדים בגן במשך שנים. מרבית הגננות עושות הרבה פעילויות של דגמים עם הילדים שלהן. אבל מדוע? מדוע אנו מקדישות זמן כה רב לדגמים – לפעמים עושים אותו סוג של פעילות יותר מדי זמן? כמו למשל ילדים שבונים דגמים של אדום – כחול – אדום – כחול, ואז אנחנו מבקשות מהם לעשות זאת בכל מיני סוגים של חומרים; אבל ברגע שהם מבינים אדום – כחול – אדום – כחול, מה הם צריכים לעשות לאחר מכן? מה אני [הגננת] צריכה לעשות במונחים של שאלות שאלות או מתן הפעילות הבאה, שיעמיק את ההבנה שלהם על דגמים ויעלה את החשיבה שלהם לרמה חדשה?

כאשר הגננות תיארו את סוגי הפעילויות עם דגמים שהן הציעו לילדים, התברר שמרבית הפעילויות התמקדו בהעתקת דגם קיים, יצירת דגם חוזר משלהם, או הרחבת דגם שהם יצרו או שמישהו אחר יצר. בכל הדוגמאות, הגננות חשבו שהמטרה של פעילויות אלו היא לגרום לילדים להתמקד ב- "מה הדבר הבא בדגם זה?"

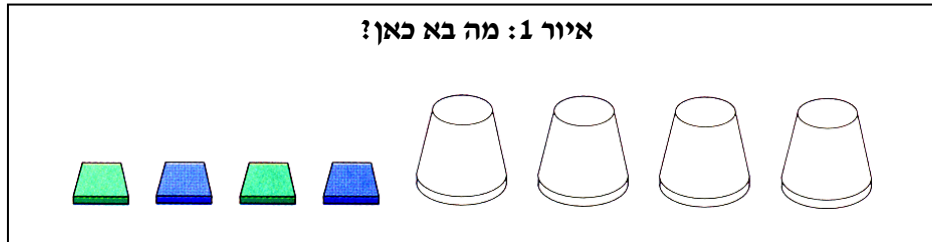
עבור ילדי גן רבים, ההחלטה מה בא אחרי אינה פשוטה או מובנת מאליה. כדי להעתיק, ליצור, ולהרחיב דגם, ילדים צריכים לבחון את הדגם בזירות. הם צריכים לחפש קשרים בין מרכיבי הדגם ולחקור כיצד ניתן להשתמש במידע זה כדי לקבוע מה להוסיף לדגם. כאשר הם מתחילים לראות קשרים, הם מתחילים לראות שההחלטה מה יבוא בהמשך הדגם אינה בחירה מקרית. יחד עם זאת, כאשר ילדים נפגשים לראשונה עם דגמים, הם עשויים לראות רק שהאדום בא אחרי הכחול והכחול בא אחרי האדום. בשלב כלשהו עליהם לעשות את הקישור ש-אדום – כחול הינו יחידה בסיסית של הדגם. לדגמים יכולים להיות מרכיבים שמתחלפים לסירוגין, חוזרים על עצמם, גדלים, או קטנים באופן קבוע. היכולת לתאר קשרים קבועים אלה מובילה לניבוי כיצד הדגם ימשיך. עבור ילדים צעירים, ההכרה בכך שדגמים ניתנים לניבוי הינו רעיון מתמטי חשוב.

האם צריך להתמקד בגן בעזרה לילדים להבין שדגמים ניתנים לניבוי? בהחלט, רעיון זה חשוב, אך מהם הצעדים הבאים בהרחבת הבנה זו או שימוש בה בדרך שונה? היכולת לעשות הכללה אודות דגם ולהשתמש במידע קיים כדי לנבא מידע שאינו קיים היא ללא ספק העוצמה של דגמים. כדי להכליל ולנבא, ילדים צריכים לעבור מהתבוננות על דגם כרצף של "מה בא אחרי" לניתוח המבנה של הדגם, כלומר, לראות שהוא עשוי מיחידות חוזרות. כאמצעי להרחבת הדיונים של הגננות אודות דגמים, הן נתבקשו לבדוק את שתי הפעילויות הבאות ולנסות אותן עם הילדים בגנים שלהן.

"מה בא כאן?"

"מה בא כאן?" הינה פעילות שבה ילדים משתמשים במידע שידוע להם כבר אודות דגם כדי לנבא מידע בלתי ידוע. בפעילות זו ילדים בונים דגם עם לוחיות צבעוניות או קוביות מתחברות, ומכסים את ארבע או חמש הצורות האחרונות בדגם בעזרת כוסות נייר קטנות (ראה **איור 1**). לפי התור הילדים מצביעים על

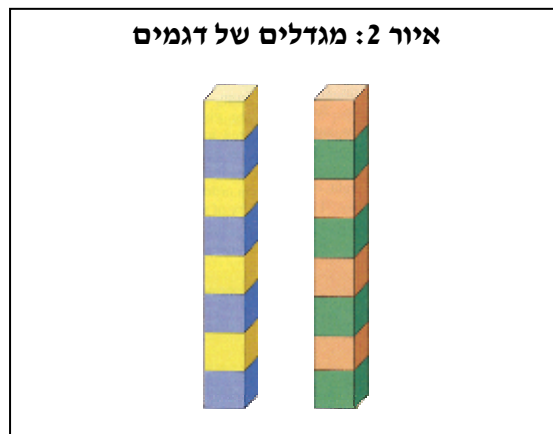
כוס אחת ומנחשים את הצבע של הלוחית שמתחתיה. במשחק זה, מוקד הפעילות מוסב מ- מה בא אחרי, למרות שיתכן שגם שאלה זו תופיע, ל- מה בא כאן בשעה שהם משתמשים במשהו ידוע כדי לנבא משהו בלתי ידוע. לדוגמה, דגם של ילד יכול להיות לוחיות בצבעים ירוק – כחול – ירוק – כחול – ירוק, כאשר כל אחת מארבע הלוחיות הבאות מכוסות בכוסות. ילד יכול להצביע על הכוס הרביעית, וילד אחר ינסה להחליט מהו צבע הלוחית שמתחת לכוס זו.



כאשר הגננות שיחקו במשחק זה, הן ניבאו כיצד הילדים בגנים שלהן עשויים להחליט לגבי הצבעים החבויים. כולן הסכימו שיתקבל טווח של תשובות, החל מניחושים אקראיים ועד לניבויים המבוססים על המידע הנתון. הגננות היו מעוניינות להתבונן כיצד הילדים יקבעו מהו הצבע המוסתר. האם הם יצטרכו להתחיל עם הלוחית הראשונה שברצף ו"לקרוא" את הדגם לפי הסדר משמאל לימין, או שהם יעשו מה שרבות מהן עשו ויאמרו, "הסתכלתי על הצבע האחרון, והוא היה ירוק; אז הלכתי בדמיוני ירוק – כחול – ירוק וידעתי שהבא צריך להיות כחול." למרות ששתי אסטרטגיות אלו נראות דומות, הראשונה אולי מרמזת על כך שהילדים מתמקדים ב- "מה בא אחרי מה", בעוד שבשנייה, נראה שהילדים מתקדמים לכיוון של חשיבה על ירוק – כחול כיחידה הקטנה ביותר החוזרת על עצמה בדגם. המורות גילו עניין לא רק בשאלה האם הילדים יכולים לבצע פעילות זו, אלא גם כיצד הם ייגשו לביצוע המשימה. הן נוכחו שתוכלנה לדעת כיצד הילדים בגנים שלהן חושבים על המשימה רק אם בנוסף לתצפיות שלהן, הן תבקשנה מן הילדים להסביר את דרך חשיבתם. עבור גננות אלו פעילות זו היתה לא רק משהו חדש לנסות אלא מבוא לרעיון חדש בדגמים – החשיבות של זיהוי היחידה החוזרת בדגם ושימוש ביחידה זו כדי לנבא מה בא כאן.

מגדלי דגמים – דומים או שונים?

בנוסף למשחק "מה בא כאן?", הגננות נתבקשו לחשוב כיצד מגדל הבנוי לסירוגין מקוביות בצבעים ירוק – כתום – ירוק – כתום, דומה למגדל הבנוי מקוביות בצבעים כחול – צהוב – כחול – צהוב (ראה איור 2). הן ראו מיד שלמרות שהמגדלים נבנו מצבעים שונים, ההרכב הבסיסי שלהם זהה – ששני המגדלים היו מורכבים מיחידות חוזרות בעלות אותו מבנה.



הדיון נסב לסביבה של הגן, כשהגננות מנבאות מה עשויים הילדים לומר כאשר יציגו להם משימה זו של השוואת שני מגדלי דגמים. גננות רבות ניבאו שעבור ילדים צעירים, צבע יהיה מאפיין מכריע שיגרום למגדלים להראות מאוד שונים, כך שכחול – צהוב לא ייחשב בשום דרך כזהה לירוק – כתום. למרות שניבוי זה היה השכיח, כמעט כל גננת הבחינה גם בחשיבה שניתן לפתח כתוצאה מחשיפה מתמשכת לפעילות כזו. הן הבינו שבאמצעות פעילויות השוואה אלו, ילדים עשויים ללמוד להתבונן בצורה יסודית במבנה המאפיין דגם.

נראה היה שסקרנותן של הגננות לגבי פעילות זו נבעה מן ההתעניינות שלהן עצמן בחשיבה על מגדלי דגמים פשוטים אלה בדרך חדשה ושונה. כפי שהעירה אחת הגננות, "אני מלמדת דגמים כבר עשר שנים, ולא עלה על דעתי לחשוב [על דגם] בדרך זו – לראות אותנו כיחידות". עבור גננות אלו, ההתנסות בחקירת רעיון מתמטי לעצמן הבהיר להן ידע מתמטי חשוב עבורן, שהוביל לשאלות על עבודתן עם ילדים ולהתלהבות לגבי חקירת כמה רעיונות חדשים עם הילדים בגנים שלהן. התנסות זו הדגישה לכולנו את החשיבות של עריכת חקירות מתמטיות לעצמנו כאמצעי לקבלת החלטות לגבי הוראה. בשתי פעילויות אלה, ילדים עובדים עם הרעיון שדגמים ניתנים לניבוי ושהם עשויים מיחידות החוזרות על עצמן. על ידי התבוננות ביחידה של דגם חוזר, ניתן לעשות הכללות המסייעות לעשות ניבוי לגבי מידע לא ידוע. הגננות הבינו שכדי לעשות עבודה מסוג זה, הן צריכות לתת לילדים, בנוסף להתנסויות מגוונות עם העתקה והרחבה של דגמים ועם יצירת דגמים משלהם, גם הזדמנויות לתאר לאחרים את הדגמים שלהם ולחשוב במה דגמים דומים ושונים זה מזה.

ראיית דגמים כמבנה: קישור לעשייה מתמטית בהמשך

למרות שלא נוכל לצפות מילדים צעירים להבין בצורה מלאה את המורכבויות של דגמים, אנו יכולים להעסיק אותם בפעילויות הכרוכות בחשיבה על יכולת הניבוי והמבנה של דגמים – שדגמים מורכבים מיחידות החוזרות על עצמן. עבודה של ילדים צעירים עם רעיונות אלה אודות דגמים תתקשר בצורה משמעותית להמשך עבודתם במתמטיקה.

מאחר ושיטת המספרים שלנו בנויה ממערכת של דגמים ויכולת ניבוי, תלמידים צריכים להיות מסוגלים לא רק לזהות את הדגמים שהם רואים, אלא גם לספק סיבות ועדויות לשאלה מדוע דגמים אלה קיימים. לדוגמה, כאשר תלמידים מתחילים לבחון מקרוב את רצף המספרים, הם מגלים מהר מאוד שישנם הרבה דגמים ויחסים. כאשר תלמידים סופרים בחמשות, הם שמים לב לדגם שבספירת המספרים של 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, וכך הלאה, ושרצף ספירה זה ספרת היחידות משתנה לסירוגין 5, 0, 5, 0. כאשר הם בוחנים דגם זה יותר מקרוב, הם יכולים להסביר שזה לא מקרי אלא למעשה קשור למבנה העשרוני של שיטת המספרים ושכל קבוצה של חמש שנוספת יוצרת או חצי קבוצה של 10 (5, 15, 25) או קבוצה שלמה של 10 (10, 20, 30). תלמידים יכולים לאחר מכן להכליל שכל מספר שהוא כפולה של 5 יסתיים ב-0 או ב-5. מתוך ידע זה הם יכולים בהמשך לנבא את סוגי התשובות שהם יקבלו כאשר הם יכפלו מספר ב-5.

מרבית המורים לכיתות הצעירות אולי לא יתקלו לעולם בתלמידים המשתמשים בידע שלהם אודות דגמים בדרכים כאלה. למעשה, הבנה וניבוי הדגם של ספירה בחמשות נראה די רחוק מדגמי רכבות וניבוי של "מה בא כאן?" יחד עם זאת, כדי שתלמידים ישתמשו בדגמים בדרכים בעלות עצמה הם צריכים

לבנות הבנה של מהם דגמים, מעבר למציאה של מה בא אחרי. באופן דומה, למרות שהעבודה בגן הילדים נראית ברורה ופשוטה, הרי שכאשר קבוצה אחת של גנות עסקו ביחד במתמטיקה וחשבו על העבודה של הילדים שלהן, הן החלו לחשוב בצורה מעמיקה יותר על תחום מתוך תוכנית הלימודים שעד כה קיבלו כמובן מאליו. כתוצאה מכך הן חזרו לגנים שלהן עם תובנות חדשות לגבי נושא שהיה פעם מוכר – תובנות שאפשרו להן לקדם את החקירה של תלמידיהן בנוגע לרעיונות אודות דגמים.

ביבליוגרפיה

- Coburn, Terrence G. and Others. *Patterns, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades K-6*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1993.
- Eston, Rebeka, and Karen Economopoulos. *Pattern Trains and Hopscotch Paths*. Investigation in Number, Data and Space, Kindergarten Series. Palo Alto, Calif.: Dale Seymour Publications, 1998.
- Ferrini-Mundy, Joan, Glenda Lappan, and Elizabeth Phillips. "Experiences with Patterns." *Teaching Children Mathematics* 3 (February 1997): 282-88.
- Simon, M.A., and D. Schifter. "Towards a Constructivist Perspective: An Intervention Study of Mathematics Teacher Development." *Educational Studies in Mathematics* 22 (1991): 309-31.
- Wilson, S.M. and D. Ball. "Changing Visions And Changing Practices: Patchworks in Learning to Teach Mathematics for understanding." Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, 1991.