פיתוח חשיבה אלגברית בכיתות היסוד

Developing Algebraic Reasoning in the Elementary Grades

מאת: Jinfa Cai

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 5 No. 4, Dec. 1998, pp. 225-229
תרגום: ברכה סגליס

ייצוג ישיר (Direct modeling) עם אמצעי המחשה קונקרטיים יכול להיות אסטרטגיה רבת עצמה לפתרון בעיות עבור ילדים צעירים (Chambers, 1996). אבל, כאשר הסיטואציות של הבעיות נעשות יותר מורכבות, עולה הצורך באסטרטגיות חזקות יותר. אסטרטגיה אחת כזו היא גישה אלגברית שבה התלמידים מתארים תחילה את הבעיה תוך שימוש בנעלם בתוך משוואה ולאחר מכן פותרים כדי למצוא את הנעלם (Lesh, Post, and Behr 1987).

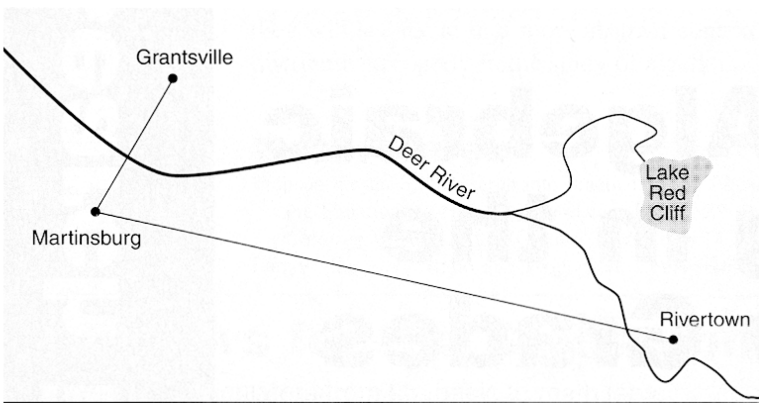
השימוש באסטרטגיות אלגבריות מקובל בקרב תלמידי בתי ספר יסודיים בסין וביפן אך יחסית אינו נפוץ בארה"ב. מאחר שההישגים במתמטיקה גבוהים יותר באופן עקבי בארצות אלו מאשר בארה"ב, הרי ששימת דגש רב יותר על פיתוח אסטרטגיות אלגבריות יכול לקדם הן את המטרה של העצמה במתמטיקה והן את המטרה של אלגברה לכל.

הזדמנויות לחשיבה אלגברית

בעיית היחס ופרופורציה המופיעה **באיור 1**, בודקת את יכולת פתרון הבעיות של תלמידים ואת הידע שלהם ביחס ופרופורציה בקונטקסט של קריאת מפה.

איור 1: בעיית היחס ופרופורציה

המפה שלהלן מראה את המיקום של שלוש ערים.



המרחק במציאות בין Martinsburg ו- Grantsville הוא 54 מייל. במפה, Martinsburg ו- Grantsville מרוחקות זו מזו 3 ס"מ. במפה Martinsburg ו- Rivertown מרוחקות זו מזו 12 ס"מ.
מהו המרחק במציאות בין Martinsburg ו- Rivertown ?
הראו כיצד מצאתם את תשובתכם.

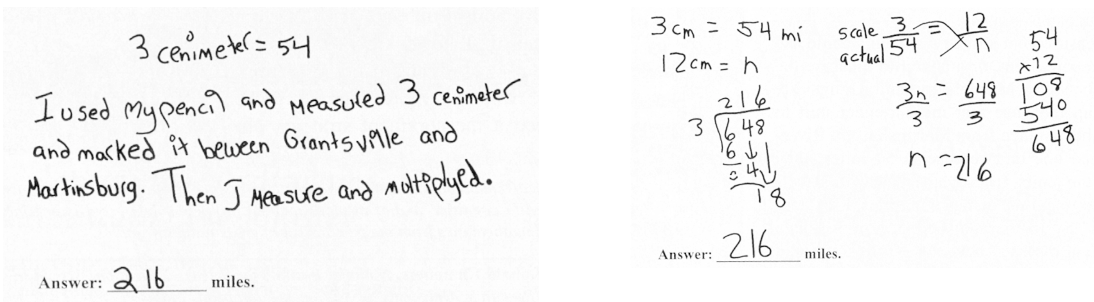
תלמידים משתמשים על פי רוב בשלוש אסטרטגיות כדי לפתור בעיה זו : גישה אריתמטית, גישה אלגברית, או גישה המבוססת על מדידה.

בגישה האריתמטית, תלמידים מתחילים בדרך כלל במידע הידוע ופועלים למצוא את הכמויות הלא ידועות. בבעיה זו הם עשויים קודם לחלק 54 ב- 3 כדי למצוא כמה מייל מיוצגים על ידי ס״מ אחד במפה, ואחרי זה לכפול ב- 12 כדי לקבל את המרחק המיוצג על ידי 12 הס״מ שבין Martinsburg ו- Rivertown. בגישה זו אין שימוש בסמל לייצוג המרחק, ואין שימוש במשוואה שתבטא את היחסים.

בגישה האלגברית, תלמידים רושמים תחילה את המשוואה תוך שימוש ב : ? , ___, x, או ביטוי מילולי קצר כדי לייצג את הנעלם. תלמידים המשתמשים בגישה אלגברית לבעיה זו, נוהגים להשתמש בסמל כדי לייצג את המרחק הלא ידוע שבין Martinsburg ו- Rivertown ומבטאים את יחסי המרחק בפרופורציה, כמו $\frac{54}{3}=\frac{x}{12}$.

אחר כך, ניתן לפתור משוואה זו כדי למצוא את x במגוון של דרכים. **איור 2א** מראה תגובה של תלמיד שהשתמש בגישה אלגברית.

איור 2 : דוגמאות מתגובות של תלמידים לבעיית היחס ופרופורציה



ב   א

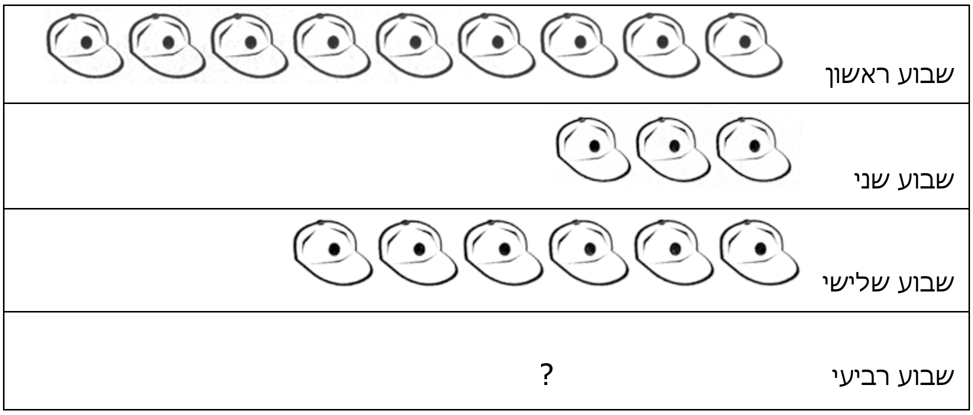
בגישה המבוססת על מדידה, תלמידים יכולים להשתמש באצבע, מהדק, או עיפרון כדי למדוד את המרחק שבין Martinsburg ו- Grantsville על המפה, ואז להשתמש באותה יחידת מדידה כדי למדוד את המרחק שבין Martinsburg ו- Rivertown. מאחר ויחידת מידה אחת מייצגת 54 מייל, הם מכפילים את מספר היחידות שבין Martinsburg ו- Rivertown ב- 54 כדי לקבל את המרחק במייל. מרבית התלמידים שמשתמשים באסטרטגיה זו מקבלים אומדן טוב למדי של המרחק שבין Martinsburg ו- Rivertown , ראו **איור 2ב.**

במחקר בינלאומי (Cai 1995), לתלמידי כיתות ו' בארה״ב ובסין היה ציון ממוצע דומה בבעיה זו, אבל נמצאו הבדלים בתהליכי הפיתרון שלהם. תלמידים סינים רבים יותר השתמשו בגישות אלגבריות, בעוד שתלמידים רבים יותר בארה״ב השתמשו בגישה המבוססת על מדידה. תלמידים בסין לא השתמשו כלל בגישה המבוססת על מדידה. כמחצית מן התלמידים בשתי הארצות השתמשו בגישה אריתמטית.

בעיית הממוצע (ראו **איור 3**) מספקת אף היא לתלמידים הזדמנות להשתמש בחשיבה אלגברית.

איור 3 : בעיית הממוצע

אנג'לה מוכרת כובעים עבור מועדון המתמטיקה. התרשים מראה את מספר הכובעים שאנג'לה מכרה במהלך שלושת השבועות הראשונים.



כמה כובעים צריכה אנג'לה למכור בשבוע הרביעי כך שהמספר **הממוצע** של כובעים שנמכרו יהיה 7 ? הראו כיצד מצאתם את התשובה.

כדי להצליח, תלמידים צריכים להבין את משמעות המושג **ממוצע**. תלמידים בסין פתרו בעיה זו באופן מובהק טוב יותר מאשר תלמידים בארה״ב, ובאופן מובהק אחוז גבוה יותר של תלמידים מסין השתמשו בגישות אלגבריות. בגישה אלגברית, תלמידים מניחים ש- x כובעים נמכרו בשבוע הרביעי :

$$(9 + 3 + 6 + x) : 4 = 7$$

על ידי פתירת המשוואה עבור x, הם מוצאים את התשובה, שהיא 10.

חלק ניכר מן התלמידים בסין ובארה״ב השתמשו בגישה אריתמטית שבה הם חישבו את הכמות הכוללת של כובעים על ידי הכפלת המספר הממוצע של כובעים במספר השבועות, כלומר, $7 \times 4 = 28$. לאחר מכן הם חישבו את סכום הכובעים שנמכרו במהלך שלושת השבועות הראשונים, שהיה $9 + 3 + 6 = 18$, ואז החסירו כדי לקבל את מספר הכובעים שנמכרו בשבוע הרביעי, שהיה $28 - 18 = 10$. בגישה אריתמטית זו, התשובה מתקבלת על ידי הליכה לאחור דרך שרשרת של פעולות הפוכות לאלגוריתם של חישוב ממוצע. לעומת זאת, בגישה האלגברית, התשובה מתקבלת בהליכה קדימה תוך שימוש באלגוריתם לחישוב הממוצע המתאר בצורה ישירה את הסיטואציה של הבעיה.

מספר תלמידים בארה״ב פתרו בעיה זו על ידי הוספה או הפחתה של כובעים כדי ״להשוות״ את מספר הכובעים שנמכרו בכל שבוע למספר הכובעים הממוצע שנמכרו (7). תלמידים אלו השתמשו במספר הכובעים הממוצע שנמכר כבסיס להשוואת מספר הכובעים שנמכרו בשבועות 1, 2 ו- 3. מאחר שבשבוע הראשון נמכרו תשעה כובעים, הרי שלשבוע זה היו 2 כובעים נוספים. מאחר שבשבוע השני נמכרו שלושה כובעים, הרי שנדרשים עוד ארבעה כובעים כדי להשתוות עם הממוצע. מאחר שבשבוע השלישי נמכרו ששה כובעים, הרי שנדרש כובע נוסף אחד כדי להשתוות עם הממוצע. כדי להעמיד בשורה אחת את המספר הממוצע של כובעים שנמכרו במהלך ארבעה שבועות, צריך למכור בשבוע הרביעי עשרה כובעים.

תלמידים אחדים השתמשו בגישה של ניסוי וטעייה: הם בחרו תחילה מספר עבור השבוע הרביעי ואז בדקו לראות האם הממוצע של הכובעים שנמכרו היה 7. אם הממוצע לא היה 7, הם בחרו מספר אחר עבור השבוע הרביעי ובדקו שוב, עד שקיבלו ממוצע של 7.

מה אנו יכולים ללמוד ממחקרים בינלאומיים?

ממצאים ממחקרים בינלאומיים (למשל, Becker [1992]; Cai [1995]) הראו שתלמידים בכיתות ד׳ ו- ו׳ מסגלים להשתמש בגישות אלגבריות לפתרון בעיות. שכיחות השימוש באסטרטגיות אלגבריות אצל תלמידים בארה״ב ואצל תלמידים בסין שונה בצורה בולטת. תלמידי כיתה ו׳ בארה״ב נטו להשתמש בגישות ויזואליות בשכיחות גבוהה יותר מאשר התלמידים בסין. תלמידי כיתה ו׳ בסין נטו להשתמש בגישות אלגבריות בשכיחות גבוהה יותר מאשר תלמידים בארה״ב (Cai 1995). תלמידי כיתה ד׳ ביפן נטו להשתמש בתהליכי הפתרון שלהם בייצוגים מתוחכמים יותר יחסית לעמיתיהם בארה״ב (Becker 1992; Silver, Leung, and Cai 1995). במצבים בהם תלמידי כיתה ד׳ ביפן נטו יותר להשתמש בכפל, תלמידי כיתה ד׳ בארה״ב נטו יותר להשתמש בחיבור.

ניתן לייחס את ההבדלים בשימוש באסטרטגיות פיתרון בין תלמידים בארה״ב לבין תלמידים באסיה לדרכי ההוראה. מורים בסין מקבלים עידוד להשתמש בדוגמאות קונקרטיות או בחומרים קונקרטיים בשיעורי המתמטיקה, אבל התפקיד שלהם הוא לתווך להבנה של מושגים מתמטיים. השימוש המועט יחסית של תלמידים בארה״ב בביטויים מתמטיים והשימוש השכיח יותר בייצוגים קונקרטיים ויזואליים, יכול לרמז על כך שהמורים בארה״ב פחות מעודדים את התלמידים לעבור לייצוגים ואסטרטגיות מופשטים יותר. מורים בארה״ב נוטים להאמין שילדים צעירים צריכים התנסויות קונקרטיות כדי להבין מתמטיקה, כשהם טוענים לעיתים שהתנסויות קונקרטיות מובילות באופן אוטומטי להבנה (Stigler and Perry 1988). ייצוגים קונקרטיים ויזואליים אכן מסיעים לתלמידים להבין את ההיגיון שבמתמטיקה. יחד עם זאת, עלינו לצפות מן התלמידים לעבור להבנה שהיא מעבר לקונקרטי (Clements and McMillen 1996). כדי לקדם את המעבר מקונקרטי למופשט, מורים יכולים לבחור מתוך פתרונות התלמידים את אלה שיש בהם רמה גבוהה יותר של הפשטה. עריכת דיונים כיתתיים על פתרונות אלו תסייע לתלמידים לראות את היתרונות שבפתרונות אלו. עידוד המעבר מדרכי חשיבה קונקרטיות לדרכי חשיבה מופשטות יותר, מגבירה את מידת ההצלחה של תלמידים בלמידה בעתיד (NCTM 1989).

הממצא שהראה שחלק מתלמידי כיתה ו׳ היו מסוגלים להשתמש בגישות אלגבריות כדי לפתור בעיות, מעיד על קיום האפשרות שילדים צעירים יפתחו חשיבה אלגברית. למעשה, אותם ילדים בכיתה ו׳ מארה״ב שהשתמשו בגישות אלגבריות, פתרו בעיות טוב יותר מאלו שהשתמשו בייצוגים מילוליים או ויזואליים (Cai, 1998). בינתיים, הממצאים המראים שתלמידים בארה״ב נוטים פחות להשתמש בגישות אלגבריות מאשר עמיתיהם בסין, מאתגרים אותנו לחפש דרכים טובות יותר כדי לעבור מהתנסות קונקרטית לפיתוח חשיבה אלגברית של תלמידים. תוכנית הלימודים במתמטיקה, גם בכיתות היסוד הנמוכות והגבוהות, צריכה לכלול חקירות של רעיונות ותהליכים אלגבריים, כדי שתלמידים יוכלו להשתמש בחשיבה אלגברית כדי לפתור מגוון של בעיות מחיי היומיום. ההתפתחות של חשיבה אלגברית אצל תלמידים הינה צעד חשוב לקראת הפיכתם לאורייני מתמטיקה ואסור לדחות אותה לחטיבת הביניים או לתיכון. כאן, שוב, הניסיון בסין יכול לעזור.

בכיתות היסוד בסין, מורים מעודדים בקביעות את התלמידים לפתור בעיה גם בגישה אריתמטית וגם בגישה אלגברית. ספרי הלימוד והמדריכים למורה בסין מכילים דוגמאות המראות כיצד ניתן לפתור בעיה תוך שימוש באסטרטגיות שונות, וממליצים להקדיש מספר שיעורים להשוואה בין גישות אריתמטיות לגישות אלגבריות. הם גם מכילים מערכי שיעור לדוגמה. המטרות של הוראת תלמידים לפתור בעיות גם בדרך אריתמטית וגם בדרך אלגברית הן : 1) לסייע לתלמידים לרכוש הבנה לעומק של יחסים כמותיים על ידי הצגתם גם בדרך אריתמטית וגם בדרך אלגברית, 2) להנחות תלמידים לגלות את הדמיון והשוני שבין גישות אריתמטיות לאלגבריות, ו- 3) לפתח את כישורי החשיבה של תלמידים ואת הגמישות בשימוש בגישות מתאימות כדי לפתור בעיות (Division of Mathematics of People's Education Press 1993). המדריכים למורה בהם משתמשים בכיתות בסין, מדגישים את החשיבות של עידוד תלמידים לייצג יחסים כמותיים באסטרטגיות שונות. בעיית הקבלה הקרועה, המופיעה ב**איור 4**, הינה דוגמה אחת לכך. תלמידים מקבלים קבלה קרועה עבור רכישה של ארבעה כיסאות ושני שולחנות. תלמידים יכולים לראות על הקבלה את מספר הכיסאות והשולחנות שנרכשו, את מחיר היחידה לכיסא, ואת סה״כ הסכום ששולם. אבל, החלק של הקבלה שהכיל את סכומי הביניים של מחיר השולחנות והכיסאות ואת המחיר ליחידה לשולחן, נקרע. תלמידים מתבקשים למצוא מה מחירו של כל שולחן. המורים מבקשים תחילה מן התלמידים לפתור את הבעיה גם בגישה אריתמטית וגם בגישה אלגברית, ולהציג את שתי הגישות על הלוח. התצוגה של שתי הגישות מקילה על התלמידים להשוות ביניהן.

איור 4: בעיית הקבלה הקרועה ושני הפתרונות שלה

הקבלה שלהלן נקרעה. כמה עולה כל שולחן?

רהיטי הום סנטר קבלה			
	כמות	מחיר	סה"כ
כיסאות	4	$24	
שולחנות	2		
סה"כ: $328			

שני פתרונות

גישה אריתמטית

הסכום הכולל הוא $328.

מחיר רכישת 4 כיסאות הוא $4 \times \$24 = \$96$.

אז המחיר לרכישת 2 שולחנות הוא $\$328 - \$96 = \$232$.

אז כל שולחן עולה $\$232 : 2 = \$116$.

גישה אלגברית

נקבע ש- x יהיה מחיר שולחן אחד.

$4 \times 24 + 2x = 328$

$2x = 328 - 96$

$x = 116$.

המחיר של כל שולחן הוא $116.

לאחר הצגת שתי הגישות, המורים והתלמידים משוחחים על נקודות הדמיון והשוני ביניהן והמורה מסכם אותן. למשל, בשתי הגישות עוסקים ביחסים הכמותיים הבאים: מחיר רכישת הכיסאות + מחיר רכישת השולחנות = סה"כ הסכום ששולם. בגישה האלגברית, הנעלם, או המחיר של שולחן, מיוצג כ- x ומעורב באופן ישיר בתהליך הפתרון. לעומת זאת, הגישה האריתמטית משתמשת בערכים הידועים עד שמוצאים בסוף את המחיר הלא ידוע של כל שולחן. השוואה זו מאפשרת לתלמידים להתרשם מן היתרון שבשימוש בגישה אלגברית לפתרון הבעיה.

ניתן למצוא אוסף עשיר של רעיונות להוראה המובילים לפיתוח חשיבה אלגברית, בגיליון של כתב העת Teaching Children Mathematics שהוקדש ל"חשיבה אלגברית" (NCTM 1997).

רעיון למחקר פעולה

הציגו לתלמידיכם בעיה מילולית, כמו בעיית היחס ופרופורציה; בעיית הממוצע;או בעיית הקבלה הקרועה, שהותאמה לקונטקסט המוכר להם. כאשר התלמידים עובדים על הבעיה, התבוננו האם יש שימוש גם באסטרטגיות אלגבריות וגם באסטרטגיות אריתמטיות. שימו לב אילו תלמידים משתמשים בכל אסטרטגיה. בקשו מן התלמידים להציג מגוון של אסטרטגיות, ובקשו מהם לשוחח על היתרונות והחסרונות היחסיים של כל אחת מהן. כאשר תלמידים משתמשים באסטרטגיות אריתמטיות, בקשו מהם לנסות להשתמש גם באסטרטגיות אלגבריות. יתכן שהשימוש במונחים "אריתמטי" ו"אלגברי" אינו מתאים. יתכן שתעדיפו לכנות את האסטרטגיות על שם התלמידים שהשתמשו בהם, כמו למשל, "האסטרטגיה של ברנדה" או "האסטרטגיה של מיגל". רשמו לפניכם איזה תלמידים נוטים להשתמש בסוג מסוים של אסטרטגיה. המשיכו לדון באסטרטגיות השונות וביתרונות היחסיים שלהם למשך מספר חודשים. המשיכו לרשום מהן האסטרטגיות של כל תלמיד, כדי לראות האם מספר התלמידים שמשתמשים באסטרטגיות אלגבריות גדל עם הזמן.

מספר בעיות המתאימות למטרה זו מופיעות להלן. בעיות מורכבות יותר, כמו בעיה 4, מדגישות עוד יותר את היתרון שבגישה אלגברית.

- בעיה מס' 1: הדוד ג'ון קנה 5 פאונד תפוחים. הוא שילם $10.00 וקיבל עודף של $6.00 . מה המחיר של פאונד תפוחים?
- בעיה מס' 2: אמו של ג'ימי שילמה $7.00 עבור 4 פאונד של בננות ו- 6 פאונד של אפרסקים. בננות עולות $0.40 לפאונד. כמה עולה פאונד אפרסקים?
- בעיה מס' 3: גב' ג'ונסון הוציאה $336.00 לקניית 3 שולחנות ו- 4 כיסאות. המחיר לכיסא הוא $32.00. כמה עלה כל שולחן?
- בעיה מס' 4: החנות להשאלת קלטות וידאו מציעה שתי תוכניות השאלה. בהצעה א' – משלמים $18.00 דמי חבר שנתיים ו- $1.50 להשאלה כל סרט. בהצעה ב' – אין דמי חבר, אבל המחיר להשאלת כל סרט הוא $2.00. באיזו כמות של סרטים מחיר שתי ההצעות לשנה אחת יהיה אותו דבר?

ביבליוגרפיה

Becker, Jerry P., ed. Report of U.S.-Japan Cross-National Research on Students' Problem Solving Behaviors. Carbondale, Ill.: Southern Illinois University, 1992.

Cai, Jinfa. "A Cognitive Analysis of U.S. and Chinese Students' Mathematical Performance on Tasks Involving Computation, Simple Problem Solving, and Complex Problem Solving." *Journal for Research in Mathematics Education.* Monograph Series No. 7, Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

_____ . "Exploring Students' Conceptual Understanding of the Averaging Algorithm." *School Science and Mathematics*. 98 (2), 93-98, 1998.

Chambers, Donald L. "Research into Practice: Direct Modeling and Invented Procedures: Building on Students' Informal Strategies." *Teaching Children Mathematics* 3 (October 1996): 29-95.

Clements, Douglas H. and Sue McMillen. "Rethinking 'Concrete' Manipulatives. *Teaching Children Mathematics* 2 (January 1996): 270-79.

Division of Mathematics of People's Education Press. *Teachers' Reference Books in Elementary School*. Beijing: People's Education Press, 1993.

Lesh, Richard, Thomas Post, and Merlyn Behr. "Dienes Revisited: Multiple Embodiments in Computer Environments." In *Developments in School Mathematics Education around the World*, edited by Izaak Wirszup and Robert Streit, 647-80. Reston, Va.: National Council of Mathematics, 1987.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1989.

______. "Algebraic Thinking" Focus Issue. *Teaching Children Mathematics* 3 (February 1997).

Silver, Edward A., S.S.Leung, and Jinfa Cai. "Generating Multiple Solutions for a Problem: A Comparison of the Responses of U.S. and Japanese Students." *Educational Studies in Mathematics* 28 (1995): 35-54.

Stigler, James W., and Michelle Perry. "Cross Cultural Studies of Mathematics Teaching and Learning: Recent Findings and New Directions." In *Effective Mathematics Teaching*, edited by Douglas A. Grouws, Thomas J. Cooney, and Douglas Jones, 194-223. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.