היגיון וחוסר היגיון אודות שברים ומספרים עשרוניים

נקודת מבט אישית

Sense and Nonsense about Fractions and Decimals

One Point of View

מאת: Joseph N. Payne

הופיע ב: Arithmetic Teacher , Vol. 27 No. 5, January 1980, pp. 5-7

תרגום: מיכל סוקניק וברכה סגליס

בעקבות המעבר לשיטה המטרית בארה"ב ועם התרחבות השימוש במחשבונים, ישנה הסכמה כללית בדבר הצורך בהצגת המספרים העשרוניים בתוכנית הלימודים במתמטיקה בשלב מוקדם יותר. מספרים עשרוניים העוסקים בעשיריות, לדוגמה, נלמדו כבר בהצלחה בכיתה ג'. יחד עם זאת, ישנן שאלות גדולות, אי-הסכמות משמעותיות וכמה הצהרות חסרות כל היגיון אשר נאמרות אודות מושגים בשברים, חישובים בשברים וחישובים במספרים עשרוניים.

שיא חוסר ההיגיון הופיע בהצעה שהועלתה לא מכבר על ידי מנהל ביה"ס שאמר למורה המלמדת בכיתה ה': "דלגי על כל הלימוד של שברים פשוטים. למדי רק מספרים עשרוניים. אנחנו לא צריכים יותר שברים פשוטים בגלל המחשבונים והשיטה המטרית". מנהל זה מגלה בורות הן לגבי השימושים המעשיים החיוניים של שברים פשוטים והן לגבי הצורך בשברים פשוטים בנושאי הלימוד הבאים.

מושגים בשברים פשוטים ימשיכו להיות חלק אינטגרלי של חיינו ללא קשר למחשבונים או לשיטה המטרית. האם נוכל לדמיין מלצר שאינו יודע מהו מיכל יין של חצי ליטר? או ילד שלא ידע כיצד לכנות חלק של ממתק שחילק שווה בשווה עם שלושה חברים? או אח שלא ידע איזה חלק מן הנחלה יקבל כל אחד משבעת האחים? שברים פשוטים נחוצים בחיי היומיום כדי לתאר חלקים של שלמים, חלקים מסכומי כסף, וחלקים ממספרים, כמו גם במדידות.

אפילו בדיקה שטחית של קורסים במתמטיקה ובמדעים מגלה את הצורך בשברים פשוטים. בידיעה של מספרים עשרוניים בלבד, כיצד יוכל תלמיד הלומד אלגברה לפתור את $ax = b$, או לטפל בנוסחה הפשוטה ביותר בפיסיקה? למרות שתוכנית לימודים בביה"ס היסודי אינה צריכה להיקבע רק על פי הצרכים של הנושאים הבאים, הרי שאין היגיון רב בהתעלמות מן הצרכים העתידיים.

חישובים בשברים

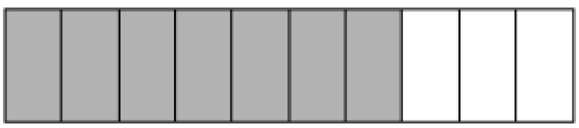
אנו מתחילים לראות תזוזה ברמות ההוראה של חישובים בשברים. אחת הסיבות לשינוי היא העדויות אודות רמות החישוב שניתן ללמד בהצלחה. סיבה נוספת היא הצורך הפוחת בחישובים **מסוימים** כתוצאה מן המעבר לשיטה המטרית [בארה"ב].

השינויים בתוכנית הלימודים שהתרחשו בשנות ה- 60, קידמו נושאים של חישובים בשברים, והציגו אותם בשלב מוקדם בהרבה של תוכנית הלימודים. לדוגמה, שברים שקולים וחיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים הועברו לכיתה ד' וחילוק של שברים לכיתה ה'. אך התברר שתלמידים רבים בכיתות אלה לא היו מסוגלים לבצע את החישובים. לבעיות למידה אלו הצטרפו גורמים נוספים. נעשה שימוש במודלים להמחשה שהיו לא מתאימים ומבלבלים. לא הוקדש זמן מספיק לעבודה על התפתחות המושגים. לא

ניתנה מספיק תשומת לב לצורך להגיע לשליטה בדרישות הקדם החיוניות לאלגוריתמים של החישובים.
גם ללא המעבר לשיטה המטרית, המציאות של הוראת נושא השבר הפשוט היתה מחייבת את ההעברה של החישובים בשברים לכיתות הגבוהות יותר.
בשלב זה, נראה הגיוני לדחות את הפורמליזציה של חוקים לטיפול בשברים שקולים עד לכיתה ה' ולעשות יותר עבודה מוחשית ומשמעותית של פיתוח המושגים בכל שכבות הגיל, מ- ה' עד ח'. צעד כזה נראה נבון במיוחד לאור העובדה ששכיחות השימוש השגוי בשברים שקולים נחשב כמקור העיקרי לטעויות.
גודל המכנים בחיבור וחיסור, הידוע כמרכיב קושי בשברים ומספרים מעורבים, יכול להינתן עבור מספרים בהם נפגשים בתדירות גבוהה יותר. שמיניות, שש-עשריות וחלקי שלושים ושתיים יהיו פחות בשימוש. חמישיות ועשיריות יהיו בשימוש רב יותר.
על ידי פישוט המכנים ועל ידי שימוש ברצף הוראה טוב יותר התואם את שכבת הגיל, נוכל ללמד כך שילדים ילמדו מה שאנו רוצים ללמד אותם אודות חישובים בשברים. אני עדיין מזועזע ממספר הילדים בכיתה ז' המחברים 2/5 ו- 1/5 ומקבלים 3/10. מחקרים מראים בברור שעבודה התפתחותית הולמת מחסלת כמעט לחלוטין תופעה זו וקשיי חישוב דומים.
אין חוסר היגיון רב יותר מהדעה של רבים אודות כפל וחילוק של שברים. במאמר שפורסם לא מכבר בכתב עת מוביל (לא פרסום של ה- NCTM), המחבר הציע עזרה מעטה להוראה של כפל שברים. לאחר מכן המחבר העיר שכפל אינו חשוב יותר, אבל מורים צריכים להמשיך ללמד אותו משום שהוא מופיע במבחנים. איום ונורא! רק בגלל המבחנים? זוהי סיבה בקושי ברת-הגנה לתכנון ארוך טווח של תוכנית לימודים. כיצד ניתן לפתור את $(1/2)x = b$ ללא כפל של שברים? או למצוא 2/3 של תריסר? או למצוא 1/2 של מרשם (מתוך ספר מתכונים שהוא אמנם "מיושן" אבל מעולה) שמבקש כמות של 3/4 כוס חמאה? כפל הוא חיוני ולא קשה להוראה. אני מתרשם מהסיבות שמציינים לעיתים כדי לדחות מעט את הוראת החילוק של שברים, אפילו עד לכיתה ו' או ז' אחרי שכפל שברים נלמד היטב. עם זאת, חייבים עד סוף כיתה ח' לדעת הן כפל והן חילוק של שברים פשוטים.
לסיכום, אני רואה טעם בעיכוב מסוים בשכבות הגיל שבהם מציגים חישובים בשברים ומצפים לשליטה בהם. בנוסף, בחישובים יהיו פחות הסתבכויות עם מכנים גדולים ומסורבלים. עם הוראה התפתחותית טובה יותר ואותה כמות זמן לערך מתוך תוכנית הלימודים, יש תקווה לשיפור משמעותי בעבודתנו עם חישובים של שברים פשוטים.

שברים ואחר-כך עשרוניים, או להפך?

השתתפתי בויכוחים רבים על השאלה האם שברים או מספרים עשרוניים צריכים לבוא קודם. לאחרונה הפסקתי להתווכח, לא משום שהפסדתי, אלא משום שאני חושב שאין זו השאלה העיקרית. השאלה איננה מה צריך לבוא קודם אלא איזו משמעות אנו רוצים שתהיה לילדים עבור שברים ומספרים עשרוניים.
אינני יודע על שום דרך ללמד את המשמעות של 0.7 מבלי לקחת פיסת נייר כיחידה, לחלק אותה לעשרה חלקים שווים, ולהצביע על שבעה מהם.



0.7

רעיון זה זהה לזה של שברים פשוטים. אז השאלה היא רק לגבי אופי הסימבוליזם שבו משתמשים.

המחקר שלנו על מושגים של שברים ומספרים עשרוניים משכנע אותי שאופן הסימון (notation) אינו הקושי. הקושי טמון בהתאמה של הייצוג המרחבי או הקונקרטי. אנו חייבים לתת תשומת לב רבה ליחידה, לחלוקת היחידה לחלקים שווים, ולשימוש בשמות מילוליים לפני סמלים, במאמץ להגביר את איכות הרעיונות הכמותיים שאנו עוזרים לילדים לבנות.

הטענה שניתן להציג מספרים עשרוניים רק על ידי הרחבת ערך המקום לימין מעודדת תלות חסרת משמעות בסמלים. כיצד תלמיד יודע ש- 3.7 הוא בין 3 ל- 4 רק על ידי מתן שמות למקומות? יש לי קושי להסביר זאת אם אינני יכול להסתמך על פירושים קונקרטיים ולומר "שלושה דברים שלמים ושבע-עשיריות של שלם נוסף. השבע-עשיריות הוא חלק של השלם הרביעי ולכן 3.7 הוא בין 3 ל- 4." פירושים קונקרטיים כאלה הם הכרחיים עבור מרבית העבודה באומדן של מספרים עשרוניים ועבור חישובים משמעותיים. שוב, ניכרים כאן הרעיונות של שברים. מובן שעלינו לנצל את הידע של התלמיד על מספרים שלמים כשאנו מלמדים מספרים עשרוניים. עם זאת, עלינו להכיר בכך שלא די בהסתמכות על ידע של מספרים שלמים בלבד.

ישנן טענות שחישובים במספרים עשרוניים קלים יותר. כללים לחישובים במספרים עשרוניים אולי יותר קל לנסח מאשר כללים לחישובים בשברים. "שימו את הנקודות העשרוניות ואת המקומות אחד מתחת לשני" נראה פשוט יותר מאשר "מצא מכנה משותף, חבר את המונים, וכתוב את המכנה המשותף." אולם הקלות שבה ניתן לומר את הכללים, לרוב מסווה את הקשיים בהבנת הכללים.

למעשה, קשיים במספרים עשרוניים מקבילים לקשיים הידועים היטב בשברים פשוטים. הבנת מספרים עשרוניים שקולים – לדוגמה, ש $0.600 = 0.60 = 0.6$ – מתאימה לקשיים עם שברים שקולים. אנו יכולים לתת כללים לגבי הוספת או הורדת אפסים ולהתעלם מהסיבות. אולם אנו עושים זאת עם סיכון גדול יותר לתלמידים שיש להם אוספים גדולים של כללים שזוכרים, חלקם נכונים וחלקם שגויים. במצב כזה אין זה סביר שנפתח את המיומנויות החשובות של אומדן, של חישובים בראש המבוססים על חשיבה, ושל חשיבה כמותית הגיונית.

כולנו ראינו שגיאות כמו $0.6 = 0.3 \times 0.2$. אנו יכולים לומר שוב את הכלל לגבי מיקום הנקודה העשרונית. אך מדוע הוא עובד? הדרך הטובה ביותר שאני מכיר להסביר זאת לילד היא לצייר ריבוע, לחלק אותו ל- 100 חלקים שווים, ולסמן אזור של שתי עשיריות על שלוש עשיריות. אז זה ברור שישנם 6 חלקים באיזור ושכל חלק הוא מאית. זוהי בדיוק אותה השיטה בה הייתי משתמש לכפל שברים. אני חושב שזה לא קשה יותר ולא קל יותר לעשות חישובים עם מספרים עשרוניים בצורה משמעותית, מאשר עם שברים פשוטים. עם רמת קושי כמעט זהה מבחינה התפתחותית, אני רואה את הפעולות במספרים עשרוניים נעשות בערך באותה כיתה כמו פעולות בשברים.

שאלות

לאחרונה הופיעו פרסומים של ה- NCTM שהציגו את מגוון המרכיבים של המערכת המורכבת שאנו מכנים ערך המקום עבור מספרים שלמים. אנו זקוקים לניתוח דומה עבור מספרים עשרוניים ויותר מחקר על דרכי הוראה. אנו רוצים, כמובן, שתלמיד יראה מספר עשרוני כמו 0.34 לא רק כ- 3 עשיריות ו- 4

מאיות, אלא גם כ- 34 מאיות. כיצד עלינו ללמד זאת בצורה היעילה ביותר? מהם מרכיבים אחרים של ערך המקום עבור מספרים עשרוניים? אנו זקוקים לניתוחים דומים עבור כל האלגוריתמים העיקרים לחישובים עם מספרים עשרוניים, ליותר עדויות לגבי היעילות של רצפי הוראה משוערים, ומושג טוב יותר כיצד חישובים של שברים פשוטים ושל מספרים עשרוניים קשורים זה בזה.

בכיתות הגבוהות יותר, ישנו קושי טבעי כאשר מלמדים כפל של שברים. אם הכופל קטן מאחד, המכפלה קטנה יותר מהגורם השני. במציאת 2/3 של מספר, מכפילים את המספר ב- 2/3, אבל ניתן לחשוב על זה כחילוק ב- 3 וכפל ב-2. לא נוכל לקוות לחסל את כל הסתירות הללו, אבל עלינו לעבוד על דרכים למזער את הקשיים. יתכן שחלק מהעבודה הנעשית כעת, המביטה על שברים בכפל כעל אופרטורים, יכולה לסייע.

אנו זקוקים לרצפי הוראה טובים יותר עבור אחוזים וניתוח מדוקדק יותר של הקשרים שבין אחוזים, שברים פשוטים ומספרים עשרוניים. כיצד נוכל ללמד את האלגוריתמים הנחוצים ובאותה העת ללמד עשיית אומדנים וקירובים הגיוניים עם אחוזים. השימוש המעשי הרב באחוזים דורש לתת לבעיות אלו עדיפות גבוהה.

סיכום

טענות חסרות היגיון אודות ביטול ההוראה של שברים פשוטים מתעלמות הן מהמטרות המעשיות והן מהמטרות המתמטיות שבתוכנית הלימודים שלנו. הצעות להוראת מספרים עשרוניים מתעלמות לעיתים קרובות מן הצורך ברעיונות על שברים.

נראה הגיוני להשאיר את השברים הפשוטים, להביא את מושגי המספרים העשרוניים ודרכי הסימון שלהם מוקדם יותר, ולהפחית את מורכבות החישובים של שברים פשוטים ולהעבירם כלפי מעלה בתוכנית הלימודים.

שאלות רבות נותרות. בסיועם של חוקרים ומורים טובים, אנו נמצאים כיום בעמדה להתמודד עם חלק מן השאלות הקשות שנותרו.