חומרי המחשה והוראה להבנה מתמטית

Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding

מאת: Patrick W. Thompson, עריכה: Diana Lambdin

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 41 No. 9, May 1994, pp. 556-558
תרגום: ברכה סגליס

למידה ללא מחשבה היא עבודה אבודה – *קונפוציוס*

התנסות איננה התנסות אמיתית עד אשר היא מעוררת למחשבה – *ג'ון דיואי*

ישנה היום הסכמה כללית על כך שהוראה יעילה של מתמטיקה בכיתות היסוד כוללת שימוש רחב בחומרי המחשה. מאמרים בכתב העת Arithmetic Teacher כבר לא מטיפים לנו להשתמש בחומרי המחשה, והסטנדרטים של ה- NCTM (NCTM 1991) לא כוללים סעיף מיוחד בדבר השימוש בחומרי המחשה. נראה כי השימוש בחומרי המחשה לא מוטל עוד בספק.
מטרת מאמר זה היא להרהר על התפקיד של חומרי המחשה בהוראה להבנה מתמטית – לא לטעון נגד השימוש בהם אלא לטעון לשימוש בהם בדרך שיפוטית ורפלקטיבית יותר. השאלה העיקרית שלנו צריכה תמיד להיות "מה, באופן עקרוני, אני רוצה שתלמידי **יבינו**?" לעיתים קרובות מדי השאלה היא "מה אני אלמד את תלמידי **לעשות**?" אם אנו מסוגלים לענות רק על השאלה השנייה, אזי לא הקדשנו מחשבה מספקת למה שאנו מקוים להשיג ביחידת הוראה מסוימת או בשימוש בחומרי המחשה.

מחקרים אודות השימוש בחומרי המחשה

השימוש בחומרי המחשה היה באופן אינטואיטיבי תמיד מושך. כבר בספרי המתודיקה של תחילת המאה ציינו העורכים, "דוגמאות מן המוחשי טובות יותר עבור התלמיד בשלב זה של התפתחותו, משום שהוא מסוגל טוב יותר להבין אותן" (Beecher and Faxon 1918, 47 as quoted in McKillip et al. 1978). ההופעה של חומרי המחשה קיבלה תאוצה בשנות ה- 60, לפחות בארה"ב, ביחד עם פרסום הצדקות תיאורטיות לשימוש בהם על ידי Zolton Dienes (1960) ועל ידי Jerome Bruner (1961).

מספר מחקרים אודות האפקטיביות של שימוש בחומרי המחשה נערכו מאז הפרסומים של Dienes ושל Bruner, והתוצאות מעורבות. Fennema (1972) טען לחשיבות השימוש בהם עבור תלמידים מתחילים, אבל טען שתלמידים בוגרים יותר לא בהכרח יפיקו מהם תועלת. מאידך, Suydam and Higgins (1977) דווחו על דפוס של תוצאות מועילות עבור כל הלומדים. Labinowicz (1985) בדק תלמידים בכיתות היסוד הגבוהות ומצא שהיו להם קשיים ניכרים בהבנה של בדידי בסיס עשר, בעוד ש- Fuson and Briars (1990) דווחו על הצלחה מדהימה בשימוש באותם חומרי המחשה בהוראה

של אלגוריתמים לחיבור ולחיסור. Thompson (1992) ו- Resnick and Omanson (1987) דווחו שלשימוש בבדידי בסיס עשר היתה השפעה מעטה אצל תלמידי כתות היסוד הגבוהות על ההבנה או על השימוש באלגוריתמים לחיבור וחיסור שכבר למדו ושיננו, בעוד ש- Wearne and Hiebert (1988) דווחו על הצלחה עקבית בשימוש בחומרי המחשה לצורך סיוע בהבנה של מספרים עשרוניים אצל תלמידים (ראה גם Hiebert, Wearne, and Taber [1991]).

ממצאים אלו הנראים כסותרים נובעים ככל הנראה מהיבטים שונים של הוראה ואופן הפעילות של התלמידים, עליהם לא נתנו המחקרים את הדעת. ברור מכך, שעצם השימוש בחומרי המחשה אינו מספיק להבטחת הצלחה. עלינו להתבונן במכלול הסביבה הלימודית כדי להבין מהו שימוש יעיל בחומרי המחשה – במיוחד יש לתת את הדעת על הדימוי של המורים לגבי מה שהם התכוונו ללמד לעומת הדימוי שיש לתלמידים מן הפעילויות שבהן התבקשו לעסוק.

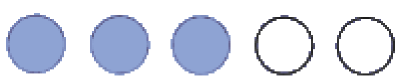
ראיית רעיונות מתמטיים בחומרי ההמחשה

לעיתים קרובות חושבים, לדוגמה, שקוביית עץ של בסיס עשר מוחשית יותר לתלמידים מתמונה של קובייה כזו. כאשר לוקחים בחשבון את התכונות הפיזיות של העצמים, הצהרה זו נראית בהחלט נכונה. אך עבור תלמידים שעדיין בונים לעצמם את מושגי המספר, ה"אלפיות" (thousandness) של קוביית בסיס עשר מעץ אינה מוחשית יותר מן ה"אלפיות" של תמונה של קובייה כזו (Labinowicz 1985). כדי להבין את הקובייה – בין אם היא אמיתית או בתמונה - כמייצגת את המספר שערכו 1000, התלמידים צריכים לבנות לעצמם דימוי של קובייה הכולל את היחסים שלה לחלקיה הפוטנציאליים (לדוגמה, שניתן ליצור אותה מ- 10 בדידים שכל אחד מהם בעל ערך של 100, או מ- 100 בדידים שכל אחד מהם בעל ערך של 10, או מ- 1000 בדידים שכל אחד מהם בעל ערך של 1). אם הדימוי שלהם של הקובייה הוא פשוט גוש גדול שנקרא **אלף**, אזי אין שום הבדל מהותי בין תמונה של קובייה לבין קובייה ממש – הסוגיה של מוחשיות היא משנית להבנה שלהם של המספרים בשיטה העשרונית. הערה זו לא באה לטעון שעבור תלמידים אין הבדל משמעותי בין תמונות לעצמים ממש. היא טוענת רק שחומרים קונקרטיים אינם באופן אוטומטי בעלי משמעות מתמטית עבור התלמידים. יכול להיות הבדל משמעותי בין האופן שבו תלמידים מתנסים בחומרים ממשיים לבין האופן שבו הם מתנסים בתיאור של חומרים, אך ההבדל טמון באופן שבו משתמשים בהם. נקודה זו תיבחן מחדש בהמשך המאמר.

ראיית רעיונות מתמטיים בחומרי המחשה יכולה להיות אתגר. החומר יכול להיות מוחשי, אבל הרעיון שהתלמידים אמורים לראות איננו בתוך החומר. הרעיון הוא באופן שבו המורה מבין את החומר ומבין את הפעולות שלו עם החומר. אולי שתי דוגמאות יבהירו נקודה זו.

גישה מקובלת להוראת שברים היא לבקש מן התלמידים לחשוב על קבוצה של עצמים, כשחלק מהם שונים מהיתר, כפי שמתואר ב**איור 1**.

איור 1: מה מתאר אוסף זה?



אם לתלמיד היה אוסף כמו זה המתואר ב**איור 1**, זה בהחלט יהיה מוחשי. אבל מה עשוי האוסף להדגים לתלמיד? שלושה עיגולים מתוך חמישה? אם כן, הם רואים חלק ושלם אבל לא שבר. שלוש חמישיות של אחד? אולי. אבל, תלוי איך הם חושבים על העיגולים ועל האוספים, הם יכולים גם לראות שלוש חמישיות של חמש, חמישה שלישים של אחד, או חמישה שלישים של שלוש (ראה **איור 2**).

איור 2: דרכים שונות לחשוב על העיגולים והאוספים שבאיור 1

אם אנחנו רואים את $\boxed{\text{○○●●●}}$ כאוסף אחד, אז ● הוא חמישית של אחד, ו- ●●● הוא שלוש חמישיות של אחד.

אם אנחנו רואים את $\boxed{\text{●●●}}$ כאוסף אחד, אז ● הוא שליש של אחד, ו- ○○●●● הוא חמישה שלישים של אחד.

אם אנחנו רואים את ● כעיגול אחד, אז ○○●●● הוא חמישה עיגולים, ו- ● הוא חמישית של חמש, ו- ●●● הוא שלוש חמישיות של חמש.

אם אנחנו רואים את ● כעיגול אחד, אז ●●● הוא שלושה עיגולים, ו- ● הוא שליש של שלוש, ו- ○○●●● הוא חמישה שלישים של שלוש.

הם יכולים גם לראות את **איור 1** כממחיש ש $1: 3/5 = 1\ 2/3$, כלומר – שבתוך 1 שלם יש שלוש חמישיות אחד ועוד שני שליש של שלוש חמישיות נוסף, או שהם יכולים לראות ש $5 : 3 = 1\ 2/3$, כלומר – שבתוך 5 יש שלוש אחד ועוד שני שליש של שלוש נוסף. לבסוף, הם יכולים לראות את **איור 1** כמדגים ש

$3/5 \times 5/3 = 1$, כלומר – חמישה שלישים של (שלוש חמישיות של אחד) שווה 1. תהה זו שגיאה לחשוב שחומר המחשה מסוים, או ציור שלו, העומד בפני עצמו, מייצג רעיון בצורה חד משמעית. מתמטיקה, כמו יופי, היא בעינו של המסתכל – והעין רואה מה שהמוח מבין.

מורים מבינים לעיתים את הדיון אודות **איור 1** ו**איור 2** כאומר שהם צריכים לדאוג לכך שהתלמידים יפרשו **נכון** את חומרי ההמחשה – דהיינו, את הפרוש שהם התכוונו אליו. למעשה, הכוונה היא הפוכה. המטרה הלימודית שלנו צריכה באופן עקרוני להיות שהתלמידים יבנו את **כל** הפירושים של **איור 1**.

מורה צריך להיות מודע לריבוי הפירושים של חומרי המחשה כדי שיוכל לשמוע את הרמזים שהתלמידים נותנים. ללא מודעות זו קל להניח שהתלמידים רואים מה שהתכוונו שיראו, והתקשורת בין מורה לתלמיד יכולה להיפגם כאשר התלמידים רואים משהו אחר ממה שאנו משערים.

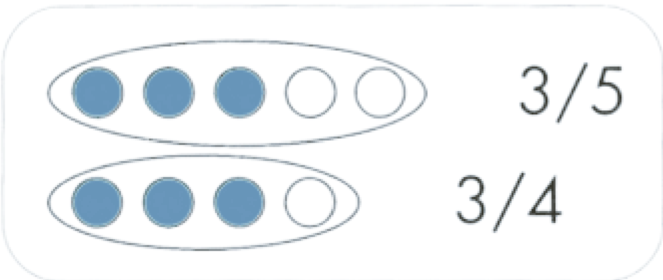
חשוב גם שתלמידים יבנו ייצוגים מרובים לחומרי המחשה. הם מועצמים כאשר הם מזהים את ריבוי נקודות המבט מהן ניתן לבנות ייצוגים תקפים, משום שאז הם עירנים לבחור מתוכם את הפעולות המתאימות ביותר לסיטואציה הנוכחית. עם זאת, באחריותו של המורה לטפח נקודת מבט

זו. זה קרוב לודאי לא יקרה אם המורה אינו מודע לריבוי הייצוגים או חושב שהרעיונות נמצאים "שם" בתוך החומרים.

איור 1 מוצע בדרך כלל על ידי ספרי לימוד ועל ידי מורים כדי להמחיש 3/5, בלבד. למעשה, נדיר למצוא ספרי לימוד או מורים הדנים בהבדלים בין חשיבה על 3/5 כ"שלוש מתוך חמש" לבין חשיבה עליו כ"שלוש חמישיות". לאופן שבו תלמיד מבין את **איור 1** ביחס לשבר 3/5 יכולות להיות השלכות עצומות. כאשר תלמידים חושבים על שברים כ"כמות מסוימת מתוך כמות מסוימת", זה מוצדק שהם נבוכים לגבי שברים כמו 6/5. איך לוקחים ששה דברים מתוך חמישה?

הדוגמה השנייה ממשיכה את הדיון בשברים. היא מדגימה שלאופן שבו אנו חושבים על חומרים במצב מסוים יכולות להיות השלכות לגבי האופן שבו אנו חושבים על הפעולות שלנו עם החומרים. נניח, ב**איור 3**, שהאוסף העליון הוא דוגמה ל 3/5, והאוסף התחתון הוא דוגמה ל 3/4. עכשיו חברו את שני האוספים. האם האוסף הכולל יוצר דוגמה ל $3/5 + 3/4$? כן ולא. אם היינו חושבים על 3/5 ועל 3/4 כיחסים (כמות מסוימת מתוך כמות מסוימת), אז $3/5 + 3/4 = 6/9$ (שלוש מתוך כל חמש ביחד עם שלוש מתוך כל ארבע נותנים שש מתוך כל תשע, כמו בחישוב ממוצעי קליעה לסל). אם הבנו שה 3/5 ו- 3/4 באיור 3 הם שברים, אז אין שום הגיון לדבר על צירוף שלהם. זה יהיה כמו לשאול, "אם נצרף שלוש חמישיות של פיצה גדולה עם שלושה רבעים של פיצה קטנה, כמה פיצה יהיה לנו?" כמה **מאיזה סוג** של פיצה? הגיוני לצרף כמויות הנמדדות בשברים אך ורק כאשר שניהם נמדדים ביחידה משותפת. שתי התשובות (6/9 ו- "השאלה לא הגיונית") נכונות – כל אחת בהקשר לדרך מסוימת של הבנת החומר המוחשי בהתחלה.

איור 3: שלוש חמישיות ושלושה רבעים מצורפים לאוסף אחד



שימוש בחומרי המחשה בהוראה

לא קל להשתמש בחומרי המחשה כהלכה, וקל מאוד להשתמש בהם בצורה לא ראויה. מחקרים אחדים טוענים שעלול להיות שימוש לרעה בחומרי המחשה כאשר המורה חושב שהתלמידים ילמדו לבצע איתם איזו שהיא פעילות מוכתבת מראש (Boyd 1992; Resnick and Omanson 1987; Thompson and Thompson 1994). מצב זה קורה לרוב כאשר מורים משתמשים בחומרים מוחשיים כדי ל"הדגים" (to model) פרוצדורה סימבולית. לדוגמה, מורים רבים משתמשים בבדידי בסיס עשר כדי ללמד חיבור וחיסור של מספרים שלמים. תלמידים רוצים לרוב להתחיל לעבוד מהבדידים הגדולים, כמו לחבר או לחסר את האלפים בשני המספרים. מורים אומרים לרוב, "לא,

תתחילו מהבדידים הקטנים ביותר, מהיחידות. צריך ללכת מימין לשמאל.״ האם זו שגיאה להתחיל מהבדידים הגדולים ביותר? לא, זה יהיה לא מקובל, אבל זאת לא שגיאה.

מאחר שהשאלה העיקרית שלנו צריכה להיות ״מה אני רוצה שהתלמידים שלי **יבינו**?״ במקום ״מה אני רוצה שהתלמידים שלי **יעשו**?״ הרי זה מצב בעייתי כאשר למורים יש בראש מרשם פעולה מסוים – אלגוריתם סטנדרטי – ומבלי לחשוב הם דוחים פתרון בעיות יצירתי כאשר הוא אינו מתאים למקובל או למרשם. במצבים בהם פעולות של תלמידים שאינן מקובלות, אבל לגיטימיות, נידחות על ידי המורה, התלמידים לומדים שוב ש״להבין״ פירושו לשנן מרשם פעולה מסוים.

שימוש ראוי בחומרי המחשה נעשה עבור שתי מטרות. ראשית הם מאפשרים למורה ולתלמידים לנהל דיונים מנומקים אודות משהו ״מוחשי״. אופי הדיון צריך להיות א) כיצד לחשוב על החומרים ו- ב) המשמעות של פעולות שונות עם החומרים. דיונים כאלה הם חלק ממה ש- Wearne and Hiebert (1988) מכנים שלב ה״קישור״ בלמידה מתמטית – יצירת קשרים חזקים בין דרכי חשיבה אודות מצבים מוחשיים לבין השפה והסימון המתמטיים המקובלים. שאילת השאלות ״כיצד אנו **חושבים** על זה? כיצד אנו **יכולים לחשוב** על זה? וכיצד **נחשוב** על זה?״ היא הליבה של מה ש- Thompson et. Al. (1994) מכנים הוראה ״מכוונת למושגים״ ("conceptually oriented" instruction).

שנית, חומרי המחשה מספקים משהו איתו יכולים התלמידים לפעול. המטרה הפדגוגית היא שהם יחשבו על הפעולות שהם עושים ביחס לרעיונות אותם ניסה המורה לבסס וביחס לאילוצי המשימה כפי שהם תופסים אותה. הדיון של איור 3 מבליט מצבים בהם המורה והתלמידים עשויים לחשוב על ההשלכות של הבנות שונות אודות כמויות שבריות ומה המשמעות של צירוף שתי קבוצות.

חומרי המחשה יכולים להיות עזרה יעילה לחשיבה של תלמידים ולהוראה מוצלחת. אבל יעילות תלויה במה שמנסים להשיג. כדי להפיק תועלת מרבית משימוש של תלמידים בחומרי המחשה, על המורה להציב באופן קבוע את פעולותיו מול השאלה, ״מה אני רוצה שהתלמידים שלי **יבינו**?״

ביבליוגרפיה

Beecher, W.J., and G.B. Faxon, eds. *Practical Methods and Devices for Teachers*. Dansville, N.Y.: F.W. Owens Publishing Co., 1918.

Boyd, Barbara A. "The Relationship between Mathematics Subject Matter Knowledge and Instruction: A Case Study." Master's thesis, San Diego State University, 1992.

Bruner, Jerome. *The Process of Education*. New York: Vintage Books, 1961.

Dienes, Zoltan. *Building up Mathematics*. London : Hutchinson Educational, 1960.

Fennema, Elizabeth H. "Models and Mathematics." *Arithmetic Teacher* 18 (December 1972): 635-40.

Fuson, Karen, C., and Diane J. Briars. "Using a Base Ten blocks Learning/Teaching Approach for First and Second-Grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction." *Journal for Research in Mathematics Education* 21 (May 1990): 180-206.

Hiebert, James, Diana Wearne, and Susan Taber. "Fourth Graders' Gradual Construction of Decimal Fractions during Instruction using Different Physical Representations." *Elementary School Journal* 91 (March 1991): 321-41.

Labinowicz, Edward. *Learning from Children: New Beginnings for Teaching Numerical Thinking.* Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley Publishing Co., 1985.

McKillip, William D., Thomas J. Cooney, Edward J. Davis, and James W. Wilson. *Mathematics Instruction in the Elementary Grades*. Morristown, N.J.: Silver burdett Co., 1978.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston,Va.: The Council, 1991.

Resnick, Lauren, and Susan Omanson. "Learning to Understand Arithmetic." In *Advances in Instructional Psychology*, vol. 3, edited by Robert Glaser, 41-95. Hillside, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

Suydam, Marilyn M., and John L. Higgins. *Activity-Based Learning in Elementary School Mathematics: Recommendations from the Research.* Columbus, Ohio: ERIC/SMEE, 1977.

Thompson, Alba G., Randolph A. Philipp, Patrick W. Thompson, and Barbara A. Boyd. "Calculational and Conceptual Orientations in Teaching Mathematics." In *Professional Development for Teachers of Mathematics*, 1994. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Douglas B. Aichele. Reston, Va.: The Council, 1994.

Thompson, Patrick W. "Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (March 1992): 123-47.

Thompson, Patrick W., and Alba G. Thompson. "Talking about Rates Conceptually. Part I: A Teacher's Struggle. *Journal for Research in Mathematics Education* 25 (May 1994): 279-303.

Wearne, Diana, and James Hiebert. "A Cognitive Approach to Meaningful Mathematics Instruction: Testing a Local Theory Using Decimal Numbers." *Journal for Research in Mathematics Education* 19 (November 1983): 371-84.