

# לימוד השפה המתמטית ב"טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה"

## Learning Mathematical Language in the Zone of Proximal Development

מאת : Diana F. Steele

הופיע ב: Teaching children mathematics, Vol. 6, No.1, September 1999, pp. 38-42

תרגום : ברכה סגליס

בעשור האחרון נערכו דיונים רבים בדבר ההשפעה של אינטראקציה חברתית על ההתפתחות של הבנה מתמטית. שורשי דיון זה נעוצים ברעיונות של לב ויגוצקי, פסיכולוג רוסי שערך מחקרים בשנות ה-20 וה-30. הוא התעניין באופן שבו ילדים ממשיגים את משמעות המילים. הוא הגיע למסקנה שאינטראקציה חברתית ותקשורת הינם מרכיבים חיוניים בתהליך המשגה זה. על מנת להראות כיצד ילדים לומדים שפה מתמטית, מדגים מאמר זה כיצד ניתן ליישם בכתה את הרעיונות של ויגוצקי, במסגרת הוראת המתמטיקה. מסמכי הסטנדרטים של ה-NCTM (1989, 1991) מדגישים את החשיבות של אינטראקציה חברתית ותקשורת בלימוד המתמטיקה. מתמטיקה כתקשורת הינה חוט מקשר העובר דרך כל הרמות של סטנדרטים אלו. "התקשורת משחקת תפקיד חשוב בסיוע לילדים לבנות קשרים בין המושגים האינטואיטיביים והלא פורמליים שלהם לבין השפה המופשטת והסימבולית של המתמטיקה; כמו כן יש לה תפקיד מפתח בסיוע לילדים לעשות קשרים חשובים בין ייצוגים של רעיונות מתמטיים פיזיים, מאוירים, גרפיים, סימבוליים, מילוליים, ומנטליים" (NCTM, 1989, 26). מה הקשר בין תקשורת ואינטראקציה בכתה לבין הרעיונות של ויגוצקי בדבר למידה של השפה המתמטית? באילו דרכים יש ללמוד מילים חדשות על מנת להעשיר את ההבנה של הילד במתמטיקה?

ויגוצקי (1994) האמין שכאשר ילדים מדברים, הם מפנימים את המשמעות של המילים שהם אומרים. השפה מופנמת רק דרך תקשורת של רעיונות. ילדים לומדים מילים חדשות כאשר הם עושים רפלקציה ומדמיינים את המשמעות של המילים בזמן שהם מתקשרים. ילדים מתחילים לפתח לעצמם חשיבה הגיונית דרך הבעה מילולית של מחשבות. כאשר ילדים מתחילים להשתמש במילים חדשות בנוכחות אדם אחר בעל ידע, הם מוצאים את עצמם לעיתים קרובות במה שויגוצקי מכנה "טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה" (ZPD), אזור למידה הנמצא בין ההבנה העכשווית של הילד לבין פוטנציאל ההבנה שלו (ויגוצקי, 1978). כאשר אדם בעל ידע מגיע ל-ZPD של הילד, הוא יכול להוסיף משמעות למה שכבר ידוע לו. בתוך טווח זה נפגשים המושגים הלא פורמליים העשירים אך לעיתים לא מאורגנים של הילד, עם החשיבה הפורמלית והשיטתית של האדם בעל הידע (ויגוצקי, 1994). תפיסה זו של ה-ZPD אומרת שהמורה יכול לעזור לילד בכך שיספק לו מידע חדש אותו יוכל להטמיע בידע הקיים שלו, ובכך להוסיף לבסיס הידע של הילד ולהוביל אותו מן המוכר אל הלא מוכר.

ילדים מפתחים שפה באמצעות התנסויותיהם. הם מפתחים, מבהירים, ומכלילים את המשמעות של המילים על ידי לימוד המילים כסמלים של המושגים שחוו ושימוש בהם בחברת אנשים אחרים המגיבים למילים אלו. הכללה של רעיונות באמצעות קומוניקציה הינה חיונית כאשר בונים שפה מתמטית. ילדים מתקשים לעתים בלמוד מילים חדשות, לא בגלל ההגוי של המילים, אלא בגלל שהמושגים שמאחורי מילים אלו עדיין לא התפתחו במלואם. טולסטוי אמר: "כמעט תמיד ישנה מלה זמינה כאשר המושג הגיע לבשלות"

1

Translated and reprinted with permission from *Teaching children mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. [www.nctm.org](http://www.nctm.org). All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

(ויגוצקי 1994, 8). לכן, משמעות של מילה הינה צרוף של מחשבה, שפה, נסיון וקומוניקציה. ככל שהתלמידים מתקדמים בביה"ס, כך מבשילים יכולת החשיבה המופשטת שלהם ויכולתם לתקשר בשפה מתמטית. השפה המתמטית מבלבלת לעיתים קרובות את הילדים, כאשר מציגים בפניהם שפה שאינה מוכרת להם ללא מעורבות שלהם בהתנסויות המתוארות בשפה זו. ילדים צריכים לעבור התנסות פעילה ופיזית בכלים או עצמים בזמן שהם נחשפים למושגים המבוטאים באותה שפה (Straker, 1993). שפה ומשמעות מתפתחים ביחד רק כאשר אוצר מילים חדש מוצג בקונטקסט משמעותי, דהיינו, ב-ZPD של הילד. לקונטקסט יש חשיבות משום שילדים רוכשים אוצר מילים המבוסס על הקונטקסט שבו הוא מופיע. בשלבים המוקדמים של לימוד המתמטיקה, חשוב לקשר בצורה מירבית בין ההתנסויות של הילדים לבין השפה שבה משתמשים לתאר התנסויות אלו, משום שפעילות בסביבה קונקרטיה הינה הדרך הטובה לפתח משמעות למילים חדשות. בתאור הכתה המובא להלן, המורה מעודדת את התלמידים לחשוב על, לדבר על, וללמוד אוצר מילים מתמטי באופן שמתאים לרעיונות של ויגוצקי. התלמידים מבהירים ומתקשרים את הרעיונות שלהם תוך כדי עריכת דיון על בעיה שהמורה מציגה. הילדים מציירים דיאגרמות ועובדים עם כלים על מנת לפתח אוצר מילים המתחס לגאומטריה ולמדיות.

#### **תאור הנעשה בכתה הלומדת אוצר מילים חדש:**

על הלוח בכתה ד' מוצגת הבעיה הבאה: "אם יש לכם מעגל המצויר על דף ניר. כיצד תוכלו למצוא את מרכז המעגל, אם לא ידוע לכם היכן הוא צריך להיות?" הילדים רגילים לעבוד באופן עצמאי בבעיות אתגר, הם יודעים שיש להם זמן לנסות גישות שונות לפתרון הבעיה ולעשות רפלקציה של האסטרטגיות שבהן השתמשו, לפני שמתחיל הדיון בכתה. הילדים מתעדים את החשיבה שלהם ואת הפתרונות שלהם בעתונים המתמטיים שהם מכינים, כשלעיתים קרובות הם כותבים פסקאות שלמות על דרכי החשיבה שלהם. למורה שלהם יש חוק ברזל שתלמיד לא יכול להגיש פתרון ללא הסבר שלו. התלמידים עובדים על מושג גאומטרי חשוב: למעגל יש רק מרכז אחד. המורה מבקשת מהתלמידים לחשוב על המושג "מרכז" של מעגל, בזמן שהם יוצרים מעגל כזה. הילדים נלהבים לשתף זה את זה בפתרונותיהם. המורה קוראת תחילה לגלית להסביר את דרך הפתרון שלה. גלית מצירת מעגל על הלוח בעזרת מכסה של מיכל מפלסטיק ולאחר מכן משתמשת בסרגל לצייר את הרדיוס. גלית אומרת: "לוקחים סרגל ומוצאים נקודה שחושבים שהיא המרכז ומסמנים אותה. אח"כ מזיזים את הסרגל מסביב ומסמנים, וממשיכים לעשות זאת". גלית מודדת מהנקודה שהיא סימנה כמרכז עד למעגל ומקבלת 5 אינטש. היא מצירת מספר רדיוסים משוערים (ראה איור מס' 1).

מורה: איך ידעת לבחור מאיפה להתחיל?

גלית: כי זה נראה כאילו זה האמצע.

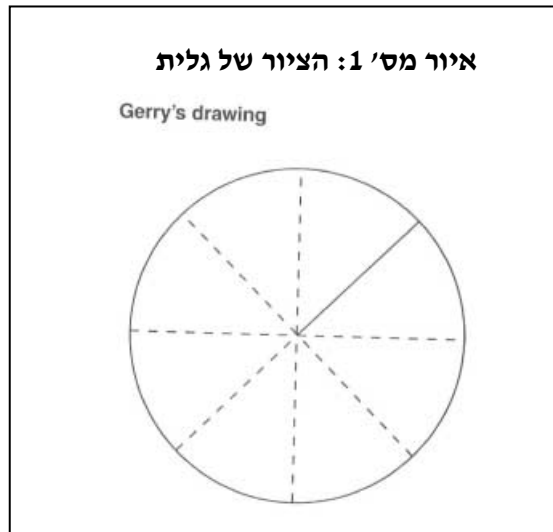
מורה: היא בוחרת נקודה ומנחשת איפה המרכז יהיה, היא מתבוננת בזה ומסובבת את הסרגל מסביב על מנת לראות אם זה (הרדיוס) נשאר תמיד ב- 5. אבל תסתכלי כאן, גלית, יש פה בעיה. פה זה יותר מ- 5.

גלית מנסה לעשות התאמות ע"י מדידה חוזרת במספר מקומות.

מורה: מה קורה בקצה השני של הסרגל, גלית?

גלית: זה יוצא קצת החוצה.

מורה : האם היד שלך מחליקה? האם קשה לך להחזיק את הסרגל באותו מקום?  
גלית : כן.



מורה : אוקיי. אפשר לעשות זאת בדרך זו. הבעיה היא שצריך לעשות התאמות וקשה להחזיק את הסרגל באותו מקום בזמן שמסובבים אותו מסביב. אם נעבוד על זה, נוכל ככל הנראה למצוא את המרכז, נכון? המורה נותנת תוקף למחשבות של גלית, אבל גם עוזרת לה לעשות הערכה של השיטה שבחרה בכך שהיא אומרת לה לשים לב למה שקורה כאשר היא מזיזה את הסרגל מסביב למעגל. על מנת לעזור לילדים לחשוב על הגישות האפשריות שלהם, המורה משוחחת עם הילדים על כמה מהחסרונות של שיטה זו של נסוי וטעיה. המורה : האם יש למישהוא הצעה אחרת? ניר?

ניר : אני חושב שהיה טוב יותר אם היינו מוצאים חצי של זה.

ניר : הולך ללוח ומסובב את הסרגל כך שהקצה המוביל נמצא על המעגל.

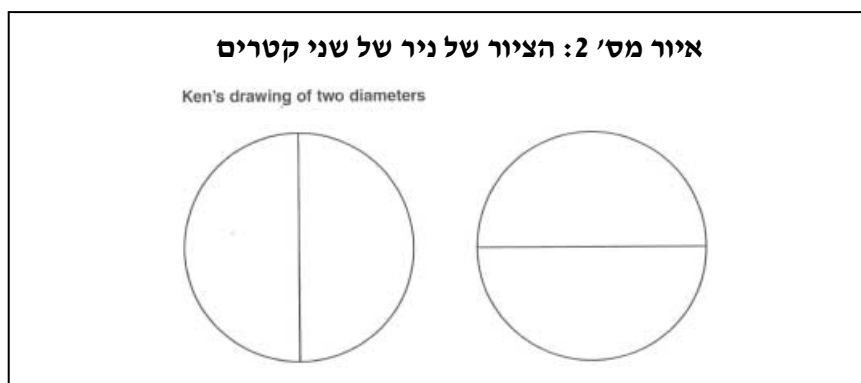
המורה שואלת מדוע הפך את קצוות הסרגל.

ניר : כי היה לי "12" למעלה ואני הייתי צריך שזה יהיה בהתחלה. (ניר מודד קוטר של 9 אינצ'ס). זה 9. אז חצי מתשע זה ארבע וחצי.

מורה : בואו נחשוב מה ניר עשה. כאשר הוא מדד מנקודה אחת על המעגל לנקודה אחרת על המעגל, מה הוא מדד?

תלמיד : קוטר. (תלמידים אחדים אמרו אלכסון אבל רוב התלמידים אמרו זאת נכון).

ניר מצייר את הקוטר. לאחר מכן הוא מצייר עוד אחד (ראה איור 2).



מורה : ניר, מדוע השתמשת בעוד קוטר?  
ניר : כדי לראות אם הם אותו דבר.  
מורה : האם זה חשוב? ומה היה קורה אם הוא היה עושה את זה יותר למטה? אם ניר היה חושב שצריך לצייר את זה יותר למטה האם זה היה משנה?  
תלמידים : כן.

מורה : מה קורה למעגל כשמתרחקים מהמרכז?  
דני : הוא מתעגל יותר, הוא מתעגל ככה ויורד למטה (הוא מדגים בידי כיצד המרחק נעשה קטן יותר).  
המורה עוזרת לתלמידים להבין שצריך לצייר את קווי הקוטר מנקודות על המעגל שהן במרחק הרחב ביותר. היא מקשיבה להסבר של דני וצופה בהדגמה שלו כיצד מעגל נעשה קטן יותר ככל שהוא מתעגל כלפי מטה. היא מדגימה את הרעיון של דני על ידי ציור של מיתר ואומרת לתלמידים שקו זה נקרא **מיתר** ושהוא שונה מהקוטר (ראה איור 3).

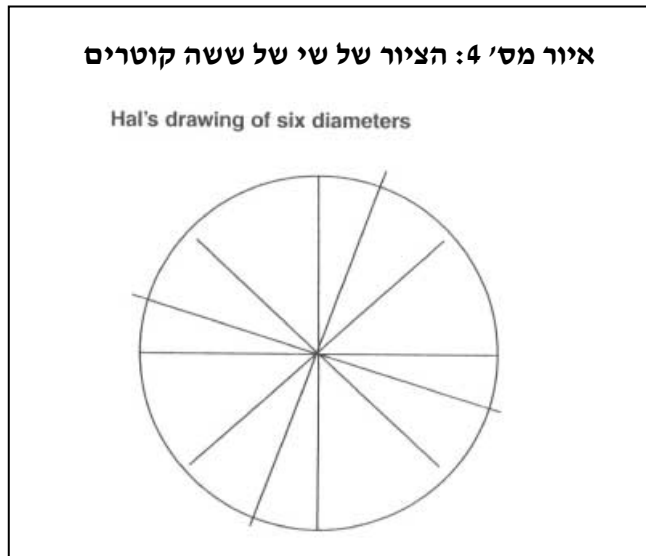


המורה : ככל שאנו מתרחקים מן הקוטר, המרחקים בין נקודות נעשים קטנים יותר. האם הייתם אומרים שהקוטר הוא החלק הרחב ביותר של המעגל?  
תלמידים : כן.

המורה : אז הוא (ניר) בדק שני מקומות על מנת לראות אם הקוטר אותו הדבר. מה עשית אחרי זה, ניר?  
ניר : אני עשיתי חצי של תשע וזה יוצא ארבע וחצי, וסימנתי אותו באמצע.  
המורה : המרחק מנקודת האמצע של העגול אל המעגל נקרא **רדיוס**.

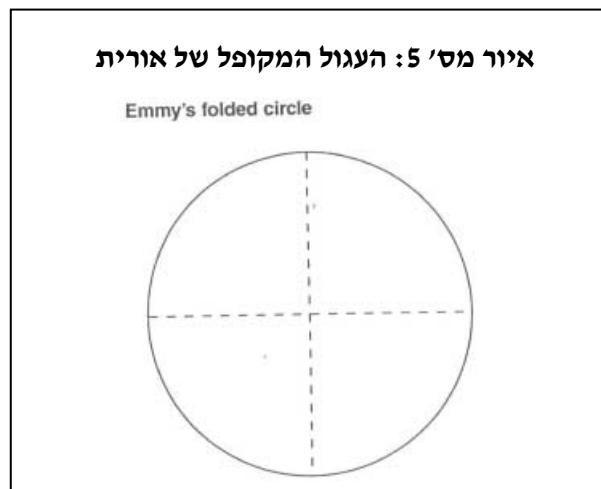
הרעיון הגדול של ניר שלקוטר יש אותה מידה, הינו מושג מפתח ונותן למורה את ההזדמנות לעזור לתלמידים להבין את משמעות הקוטר באופן מדויק יותר. השיטה של ניר למצוא את מרכז המעגל שונה באופן מובהק מהשיטה של גלית שהתחילה עם ניחוש של נקודת האמצע וממנה ציירה קוים אל הקצוות, ומאפשרת למורה לקשר בין מושג הרדיוס למושג הקוטר. ההצעה של ניר מאפשרת לה גם להגיד לתלמידים שהמלה ל- חצי של הקוטר היא – רדיוס.

כאשר המורה מבקשת מניר למדוד שוב את הקוטר השני שלו, הוא מגלה שהמידה שלו שונה מזו של הקוטר הראשון. המורה שואלת מי מוכן לעזור לו. שי ניגש ללוח, מצייר ששה קוטרם ומודד אותם על מנת לוודא שהם באותו אורך (ראה איור 4).



המורה : ומה אמור לקרות עם הקוטרים במרכז?  
 שי : כולם אמורים לעבור דרך המרכז ולחתוך זה את זה.  
 המורה : כאשר הם עוברים במרכז המעגל הם חותכים זה את זה. כמה קוטרים אתה חושב שאתה צריך לצייר, עד שתגיע להחלטה שהנקודה היא המרכז?  
 שי : (מונה) שש.  
 המורה : האם אתה חושב שכדי למצוא את המרכז אתה צריך לצייר בדיוק ששה קוטרים? לא יכולת לעשות זאת עם חמישה או ארבעה?  
 שי : לא, .... זה לא יהיה מספיק.

המורה שואלת את הכתה מה יכול להיות המספר הקטן ביותר של קוטרים ששי צריך לצייר על מנת למצוא את המרכז. לאחר דיון, מראים מספר תלמידים את הפתרונות שלהם. אורית מצאה את המרכז של העגול שלה לאחר שגזרה אותו מתוך הדף וקיפלה אותו לחצי ואחר כך לרבעים (ראה איור 5). ההדגמה של אורית משכנעת את רוב התלמידים שרק שני קוטרים נדרשים על מנת למצוא את מרכז המעגל.



המורה השתמשה בחקירה על מנת לעזור לתלמידים לבנות את המשמעות של המושג מרכז המעגל, כשהיא עושה את המעבר מהליכים קונקרטיים לחשיבה מופשטת. תוך כדי בניית משמעות המושג, התלמידים עצבו לעצמם דרכים למציאת מרכז המעגל ואחרי זה שיתפו את התלמידים האחרים בדרך החשיבה שלהם. חקירת בעיה זו עזרה לתלמידים להבין איך מוצאים את מרכז המעגל תוך כדי לימוד השפה המתמטית הנדרשת – קוטר, רדיוס ומיתר, הקשורה ישירות לבעיה זו. מהתבוננות בדוגמאות על דרכי החשיבה של תלמידים לבעיה זו, ראתה המורה שתלמידיה התחילו להבין שקוטרים הם תואמים ושהרדיוס הוא מחצית הקוטר.

## מסקנות

התאור שהובא להלן שופך אור על אספקטים חשובים של הוראה מתמטית טובה. כדי לתקשר על האסטרטגיות השונות שבהן השתמשו, התלמידים היו צריכים להסתמך על שפה. כאשר תלמידים משתמשים בשפה כדי לתאר את מחשבותיהם, המורים שלהם זוכים במידע רב ערך על מה שהם מבינים. מורים צריכים לעשות שמוש בשפה המדוברת של התלמידים בזמן פעילותם בכתה, על מנת לספק קונטקסט משמעותי ללמידה (Corwin, Storegard & Price 1996). יחד עם זאת, יש להמנע מהעברת התלמידים מהר מדי לשפה מתמטית חדשה מבלי לתת להם את ההזדמנות לחקור, לבדוק, לתאר ולהסביר רעיונות. הארגון מחדש של מושגים מתרחש בזמן פעילויות אלו. תלמידים צריכים ללמוד שפה מתמטית לתאור פעולות על העולם האמיתי הקשורות להתנסויות האישיות שלהם.

כאשר נותנים לתלמידים שפה מתמטית בתוך קונטקסטים בעלי משמעות, מסייעים להם להעביר את מחשבותיהם לאחרים בצורה בהירה יותר. כאשר תלמידים משתמשים במונחים מתמטיים נכונים, המורה יכולה לשים לב למה שנאמר, וכתוצאה מכך, למה שהובן או נלמד (Duckworth 1987). הדאגה העיקרית של המורים צריכה להיות איך ומתי להגיד לתלמידים מילים חדשות. מורים אינם צריכים להכניס מילים חדשות באמצעות דרישה מהתלמידים לשנן הגדרות לצורך הצלחה במבחנים. היחיד לומד את המשמעות של בטויים טכניים באמצעות שינוי שלהם והשתנות על ידם בתהליך של הפנמה (Vigotsky 1994). עבור ויגוצקי, רק ב"טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה" יכול היחיד להפנים את הכוונות של החברה.

התלמידים בכתה ד' זו בנו אמצעי רב עוצמה לחשיבה על מתמטיקה באמצעות אינטראקציות חברתיות עם אדם בעל ידע רב משלהם, המורה. ויגוצקי האמין שהיחידים יכולים להעלות את רמת ההישגים שלהם דרך אינטראקציה עם אחרים שיכולים לסייע להם לארגן את החשיבה שלהם ולעשות את המעבר מהמוכר לבלתי מוכר. באמצעות אינטראקציות כיתתיות היו לתלמידים הזדמנויות להבין את החשיבה שלהם, ליזום שנויים בידע שלהם ולבנות רמה גבוהה יותר של הבנה.

המורה בנתה את ההוראה שלה על הרעיונות של התלמידים ועזרה להם ללמוד לדבר ולכתוב באופן מתמטי בזמן שהיא עודדה את ההבנה שלהם במתמטיקה. בזמן שהתלמידים שוחחו על הלמידה שלהם, הם שתפו זה את זה בחשיבה שלהם ובכך הבינו את כוונות החברה בנושא זה.

שמוש נכון בשפה מתמטית לא בהכרח מבטיח למידה מתמטית, במיוחד עם המורה הוא היחיד שמתממש בשפה זו. שמוש לא הולם של אוצר המילים עלול אפילו להפריע לבניה נכונה של משמעויות מתמטיות. בשעור שהוצג כאן, היתה הקומוניקציה בשפה המתמטית מתאימה ומשמעותית.

## מחקר פעולה - רעיון א'

הקליטי שיעור מתמטיקה אחד בכל שבוע ופעלי כך :

- נתחי את האינטראקציות הנעשות בכתה מההיבטים הבאים : מי מנהל את מרבית השיחה בזמן השעור? איזה אחוז מזמן השעור מוקדש לאפשרות לתת לתלמידים לתאר את תהליכי החשיבה שלהם? האם אני מכניסה אוצר מילים חדש אחרי שהתלמידים פיתחו בעצמם את הקונטקסט באמצעות דיאלוג? האם אני עושה זאת רק אחרי שהיו להם התנסויות קונקרטיות בכלים מתמטיים ללמידה? במילים אחרות, העריכי האם את נמצאת ב"טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה" של תלמידך כאשר את מציגה לפניו אוצר מילים חדש.
- עשי רפלקציה על סוגי הבעיות המתמטיות שאת מבקשת מתלמידך לפתור. האם התלמידים לומדים בקונטקסט שבו הם יכולים לפתח משמעויות למילים חדשות לפני שאת מציגה להם את אוצר המילים המתמטי הפורמלי? האם התלמידים לומדים רעיונות מתמטיים בנושאים מבודדים?
- עשי רפלקציה על סוגי השאלות שאת שואלת את תלמידך. האם הן שאלות פתוחות המבקשות מהם לחשוב על רעיונות ותוצרים, או שהן שאלות הדורשות תשובות המכוונות למה שאת מובילה אותם? מה היחס בין שאלות פתוחות לשאלות הדורשות ידיעת עובדות? שאלי את עצמך, "האם אני מבקשת מן התלמידים להסביר מדוע השתמשו בשיטה או באסטרטגיה מסוימת?" "האם אני מבקשת מן התלמידים להעלות השערות?" "האם אני דורשת מהתלמידים להצדיק את התשובות שלהם?" "האם השאלות שלי עוזרות לתלמידים להעריך את הגישות שלהם?"

## מחקר פעולה - רעיון ב'

ספרי למנהל שלך או למורה עמית שהמטרה שלך בהוראה בכתתך היא להשתמש בפתרון בעיות על מנת לפתח מושגים מתמטיים והבנה של אוצר המילים בהתאם. בקשי מהם לצפות בשיעור מתמטיקה בכתתך ולתת לך משוב על מידת ההצלחה בהשגת המטרה שהצבת לעצמך. בקשי הצעות לשפור.

## ביבליוגרפיה

Corwin, Rebecca B., Judith Storygard, and S.L. Price, *Talking Mathematics: Supporting Children`s Voices*. Portsmouth, N.H.: Heinemann, 1996.

Duckworth, Eleanor. *The Having of Wonderful Ideas and Other Essays on Teaching and Learning*. New York: Teachers College Press, 1987.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Professional Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM, 1991.

Straker, Ann. *Talking Points in Mathematics*. Cambridge, Mass.: Cambridge University Press, 1993.

Vygotsky, L.S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.

Vygotsky, L.S. *Thought and Language*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1994.

7

Translated and reprinted with permission from *Teaching children mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. [www.nctm.org](http://www.nctm.org). All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.