ההבנה של תלמידים את הקשר בין
שברים פשוטים למספרים עשרונים
Students' Understanding of the Relationship
Between Fractions and Decimals

מאת: Zvia Markovits Judith T. Sowder

הופיע ב: Focus on Learning Problems in Mathematics,1991. Vol. 13, No. 1, pp. 3-11
תרגום: ברכה סגליס

לשברים פשוטים ומספרים עשרוניים תפקיד חשוב בתוכנית הלימודים במתמטיקה. תלמידים בכיתות ד' עד ו' מקדישים שעות רבות לעבודה עם סוגי מספרים אלה. יחד עם זאת, הם מקדישים מעט מאוד זמן, ללימוד הקשרים שבין שברים פשוטים למספרים עשרוניים. בדיקת שלושה ספרי לימוד חדשים בארה"ב, הנמצאים בשימוש רחב, העלתה שהם הקדישו עמוד אחד בלבד לכתיבת שברים פשוטים כמספרים עשרוניים וכתיבת מספרים עשרוניים כשברים פשוטים. פרט לכך לא נמצא שום עיסוק המקשר שתי צורות אלו של מספרים רציונליים. באופן דומה, מחקרים שנערכו בדקו את ההבנה של מספרים עשרוניים (לדוגמה, Wearne & Hiebert, 1988), או של שברים פשוטים (לדוגמה, Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983), אבל ליכולת של תלמידים לקשר בין שני פירושים אלה של מספרים רציונליים, ניתנה במחקרים תשומת לב מועטה. האם תלמידים מבינים שניתן לבטא מספר רציונלי גם בצורת שבר פשוט וגם בצורת מספר עשרוני? האם הם מסוגלים לטפל בשני הפירושים בו זמנית? הייברט מציין ש"מרבית התלמידים אינם מקשרים בין הבנתם את השבר לבין הסימול העשרוני" (Hiebert, 1984, p.505).

דו"ח מחקר זה מספק מידע נוסף אודות ההבנה של תלמידים את הקשר שבין שברים פשוטים לבין מספרים עשרוניים כפירושים למספרים רציונליים, כאשר שני הפירושים מוצגים בצורה סימבולית. (למרות שלייצוגים אחרים תפקיד חשוב ביצירה והבנה של המושגים, הרי שהייצוגים הסימבוליים הם השכיחים ביותר בשימוש אצל התלמידים). מחקר זה היה חלק מפרויקט מחקר גדול יותר ששתיים ממטרותיו היו, להגביר את ההבנה של מושגי גודל-המספר אצל תלמידי כיתה ו' ולחקור את השפעת הבנה זו על למידת אומדן של חישובים. תגובות שהתקבלו מראיונות לפריטים שכללו ייצוגים בשברים פשוטים ביחד עם ייצוגים במספרים עשרוניים, חשפו מספר הבנות שגויות לגבי האופן שבו ייצוגים אלה קשורים. החומרה של ההבנות השגויות הצדיקה עריכת מחקר נוסף לגבי פריטים אלה.

חקירה של סוגי השגיאות שהתלמידים עשו הביאה אותנו להאמין שתלמידים מתקדמים דרך רמות שונות של הבנה לגבי הקשר בין שברים פשוטים למספרים עשרוניים. שיערנו שישנן שלוש רמות כאלה:

1) ההבנה הבסיסית שיש קשר בין שברים פשוטים למספרים עשרוניים ושהם יכולים להופיע ביחד בביטוי מתמטי, למשל, שהביטוי $1/2 + 0.5$ מקובל, למרות שהתלמיד עלול לא לדעת כיצד לבצע את החיבור.

2) ההבנה שמותר לעשות העברה מייצוג סימבולי אחד למשנהו, למשל, מ- 1/2 ל- 0.5 ובחזרה, בתוך מצבי בעיה.

3) ההבנה המלאה של הקשר בין הייצוגים, המתבטאת, למשל, בבחירת הייצוג היעיל יותר במצב נתון, כמו השימוש ב- 1/2 במקום 0.5 כדי לאמוד את 789×0.52 .

ברמות משוערות אלה השתמשנו כדי לפרש את תגובות התלמידים במחקר זה.

שיטה

המדגם

המחקר נערך בבי״ס גדול של חטיבת הביניים (כיתות ו׳ עד ח׳). התלמידים בבית ספר זה הגיעו מכל חלקי העיר אך היו ברובם ממשפחות של המעמד הבינוני והנמוך. בית הספר מחלק את התלמידים לכיתות ברמה גבוהה, כיתות ברמה ממוצעת וכיתות ברמה נמוכה. במחקר זה השתתפו תלמידים משתי כיתות ו׳ מהרמה הבינונית.

מכל כיתה נבחרו עשרה תלמידים עבור המחקר. הבחירה נעשתה על סמך מבחנים שבדקו הבנה של ערך המקום, שברים פשוטים ומספרים עשרוניים. על פי תוצאות המבחנים נבחרו מכל כיתה תלמידים בעלי רמות יכולת שונות. בתהליך הבחירה נלקחה בחשבון גם נכונות התלמידים לשתף פעולה ולבטא את דרך חשיבתם, שהתבססה על תצפיות שנערכו בכיתה. עשרים תלמידים אלה היו היחידים אודותם נאספו נתונים, למרות שכל התלמידים קיבלו את יחידות ההוראה.

יחידות ההוראה

הוכנו שתי יחידות הוראה עבור התלמידים, אחת על שברים פשוטים ואחת על מספרים עשרוניים. יחידות אלה הוכנו עבור פרויקט המחקר הגדול יותר אשר ממנו נלקחו נתונים אלה. היחידות התמקדו במשמעות של שברים פשוטים ומספרים עשרוניים, אשר הוצגו תוך שימוש בייצוגים שונים, כולל אמצעי המחשה. כל יחידה כללה שיעורים בהשוואה וסידור של מספרים. רק חלק אחד של אחד השיעורים ביחידה השנייה עסק בקשר שבין שברים פשוטים למספרים עשרוניים כייצוגים של מספרים רציונליים. שיעור זה כלל בעיות בהשוואת מספר בייצוג של שבר פשוט למספר עשרוני ובסידור שברים פשוטים ומספרים עשרוניים על ציר מספרים משותף. הרעיון שישנם אינסוף שברים פשוטים ומספרים עשרוניים בין כל שני שברים פשוטים ומספרים עשרוניים, הוצג אבל לא טופל לעומק. היחידות ניתנו כמבוא לנושא של מספרים מסוג שברים פשוטים ומספרים עשרוניים ובהמשכם נלמדו פרקים העוסקים בפעולות בשברים פשוטים ובמספרים עשרוניים.

דרכי המדידה

הערכת היכולת של תלמידים לעשות העברה בין ייצוגים סימבוליים של מספרים רציונליים נעשתה באמצעות סידרת ראיונות אישיים שנערכו לכל אחד מעשרים התלמידים שבמדגם. הראיונות הראשונים, בחודש ינואר, נערכו לפני הצגת יחידות ההוראה, והראיונות האחרונים, בחודש יוני, נערכו כחודש אחרי שיחידות ההוראה הסתיימו. הראיונות הכילו בעיות במספרים שונים, אבל במאמר זה אנו מציגים רק את הפריטים מהראיונות הראשונים והאחרונים העוסקים בקשר שבין שברים פשוטים למספרים עשרוניים.

הבעיות שהוצגו בראיון והתוצאות

במהלך ארבעת הראיונות שהתלמידים עברו, הוצגו להם שמונה בעיות העוסקות בשברים פשוטים ובמספרים עשרוניים. במסגרת יחידות ההוראה תלמידים פתרו מספר בעיות דומות לבעיות 1,2,3,5,6,7 של הראיונות, אבל לא פתרו בעיות דומות לבעיות 4 ו- 8. הבעיות מוצגות להלן כשהן מקובצות לפי הדמיון במשימה. תגובות התלמידים מסוכמות מתחת לכל קבוצה של בעיות.

1) האם 1/4 ו- 0.4 הם אותו דבר או שהם שונים? (ראיון ראשון)
האם 1/4 ו- 1.4 הם אותו דבר או שהם שונים? (ראיון שני)

2) האם 1.7 ו- 1/7 הם אותו דבר או שהם שונים? (ראיון ראשון)
האם 0.5 ו- 6/12 הם אותו דבר או שהם שונים? (ראיון שני)

רק 17 מתוך 20 תלמידים קיבלו את החלק הראשון של בעיה 1 מהראיון הראשון. (בעיה זו נוספה לראיונות רק אחרי שמספר תלמידים כבר רואינו). מתוך ה- 17, ארבעה אמרו ש- 1/4 ו- 0.4 הם אותו דבר, בעוד ש- 13 אמרו שהם שונים. מתוך 14 התלמידים שקיבלו את החלק השני של בעיה 1, 12 אמרו ש- 1/4 ו- 1.4 הם אותו דבר. בעיה זו ממחישה את המורכבות שבשימוש בסמלים שונים כדי לייצג אותו רעיון וסמלים הנראים דומים כדי לייצג רעיונות שונים.
בראיון הראשון, רק שניים מתוך 20 התלמידים אמרו ש- 1.7 ו- 1/7 הם אותו דבר. מתוך ה- 18 שאמרו שהם שונים, 17 ידעו גם ש- 1.7 גדול יותר מ- 1/7. אחד עשר תלמידים הבחינו ש- 0.5 ו- 6/12 הם אותו דבר, בעוד שחמישה אמרו ש- 6/12 גדול יותר. (תלמיד אחד הסביר ש- 6/12 שווה ל- 0.6). יתר ארבעת התלמידים חשבו ש- 0.5 גדול יותר מ- 6/12.

3) סדרו את המספרים הבאים מהגדול ביותר לקטן ביותר: 0.99, 14/13, 5/8, 0.48 (ראיון אחרון).

תשעה תלמידים סידרו את המספרים נכון, כשהם משתמשים בחצי ובאחד כנקודות ייחוס. מבין ה- 11 שלא סידרו את המספרים נכון, 8 סידרו קודם את שני השברים הפשוטים ואחריהם את שני המספרים העשרוניים, או את שני המספרים העשרוניים קודם ואחריהם את השברים הפשוטים. בכל מקרה הם עשו הפרדה בין השברים הפשוטים למספרים העשרוניים.

4) איזה מבין האפשרויות הבאות היא התשובה ל- ? = 5 + 1/2 + 0.5 (ראיון ראשון וראיון אחרון).

א. לא ניתן לפתור זאת	ב. 5	ג. 5.5
ד. **5** 1/2	ה. 6	ו. 10

תוצאות שני הראיונות מוצגים בטבלה 1.

טבלה 1: תגובות התלמידים לבעיה 4

אפשרויות תשובה	ראיון ראשון	ראיון אחרון
לא ניתן לפתור זאת	3	-
5.5	6	3
6	1	9
משהו אחר	9	6
לא ידע כיצד לענות	1	2

שלושה תלמידים בראיון הראשון אמרו שלא ניתן לפתור את הבעיה מפני ש״...זה שבר פשוט וזה מספר עשרוני" , או מפני ש"...זה עוסק בשלושה דברים שונים". נראה של התלמידים שבחרו 5.5 כתשובה שלהם פעלו על פי אותה דרך חשיבה. לדוגמה, בארי, אמר בראיון הראשון:

בארי: 5.5 ... ואני פשוט לקחתי את ה- 5 הזה (שב- 0.5) ושמתי אותו שם (5.5).

מראיין: ומה בקשר לזה (1/2)?

בארי: אני לא רואה איפה זה נכנס ביחד עם האחרים, אבל אני לא בטוח.

או תום, שאמר בראיון הראשון:

תום: 5.5, קודם אני חיברתי 1/2 **5** = 1/2 + 5 , אחרי זה אני הוצאתי את החצי מפני שאף פעם לא שמעתי שזה יהיה חמש נקודה חמש וחצי.

בראיון האחרון, אותו תום, עדיין לא היה מסוגל להתמודד עם 1/2:

תום: 5.5 , משום שהחצי לא ממש נכנס כאן.

תשובות אלה מעלות אפשרות שתלמידים רבים לא השיגו את הרמה הראשונה של הבנה, כלומר, הם עדיין מאמינים שמספרים עשרוניים ושברים פשוטים אינם צריכים להופיע ביחד באותו ביטוי.

תלמידים אחדים נתנו תשובות שלא עלה בדעתנו לרשום בין האפשרויות. לדוגמה:

"6/7. 5/5 = 5 + 0.5 ו- 6/7 = 1/2 + 5/5"

"11/13. 5/10 = 1/2 + 5/1. (מחברים את המונים ומחברים את המכנים)"

בשיטה זו (שהביאה לתוצאה של 11/13) השתמשו ארבעה תלמידים בראיון האחרון. בתקופה שבין שני הראיונות סיימו ללמוד בכיתה פרק העוסק בפעולות בשברים פשוטים.

5) האם יש שברים פשוטים כלשהם בין 1/4 ל- 3/4 ?

האם יש מספרים עשרוניים כלשהם בין 1/4 ל- 3/4 ? (ראיון ראשון)

6) האם יש שברים פשוטים כלשהם בין 2/5 ל- 3/5 ?

האם יש מספרים עשרוניים כלשהם בין 2/5 ל- 3/5 ? (ראיון אחרון)

7) האם יש מספרים עשרוניים כלשהם בין 0.46 ל- 0.47 ?

האם יש שברים פשוטים כלשהם בין 0.46 ל- 0.47 ? (ראיון אחרון)

אם תלמידים אמרו ״לא״, הם נשאלו מדוע אמרו לא. אם הם אמרו ״כן״, הם התבקשו לתת דוגמה ולומר כמה שברים פשוטים או מספרים עשרוניים יש בין שני המספרים הנתונים.

טבלה 2 מסכמת את תגובות התלמידים לשאלה האם יש או אין מספר בין שני המספרים הנתונים.

טבלה 2: תגובות תלמידים לבעיות 5, 6 ו- 7

תשובות התלמידים		בעיות		
		5: בין 1/4 ל 3/4	6: בין 2/5 ל 3/5	7: בין 0.46 ל 0.47
עבור מס' עשרוניים	**עבור שברים פשוטים**	**ראיון ראשון**	**ראיון אחרון**	**ראיון אחרון**
כן	כן	8	6	9
כן	לא	2	2	4
לא	כן	10	3	1
לא	לא	0	6	5
משהו אחר		0	3	1

התשובות של כן - לא ושל לא - כן מציינות שתלמידים אינם מכירים בכך שאם יש שבר פשוט בין שני מספרים אז צריך להיות גם מספר עשרוני בין שני המספרים, ולהיפך. שימו לב ש- 12 תגובות של תלמידים לבעיה 5 וחמש תגובות של תלמידים לבעיות 6 ו- 7 נמצאות באחת משתי קטגוריות אלה. פרוטוקול הראיון הבא נותן מעט תובנה לגבי החשיבה של תלמידים על בעיות אלה.

מראיין: האם ישנם מספרים עשרוניים בין 1/4 ל 3/4 ?

ק. מספרים עשרוניים? לא, זה נראה מוזר שיהיו כאלה.

מראיין: האם ישנם מספרים עשרוניים בין 0.46 ל 0.47 ?

ר. כן, 0.461.

מראיין: האם תוכל לתת דוגמה אחרת?

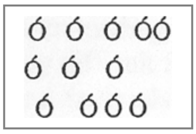
ר. 0.463.

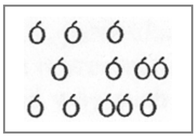
מראיין: האם ישנם שברים פשוטים בין 0.46 ל 0.47 ?

ר. לא, כי שברים פשוטים הם דברים שונים. אי אפשר לצרף אותם ביחד.

ברור שתלמידים אשר נתנו תשובות של כן-לא או לא-כן, ודאי אינם פועלים עדיין ברמה 2, ואולי אפילו לא ברמה 1. העובדה ש- 12 תלמידים נתנו תגובות כאלה בראיון הראשון אבל רק 5 בראיון האחרון, נובעת אולי מכמות ההוראה המועטה שניתנה בנושא זה או להבדלים בין הבעיות, כלומר, קל יותר למצוא שבר בין 1/4 ל 3/4 מאשר בין 2/5 ל 3/5.

אפילו כאשר תלמידים נתנו תשובות של כן, הדוגמאות שנתנו היו לרוב שגויות. לדוגמה, נאמר ש 2/6 נמצא בין 2/5 ל 3/5; 2.4 בין 1/4 ל 3/4; 1/2 בין 0.46 ל 0.47. כמו כן, תלמידים רבים אשר אמרו שיכול להיות שבר פשוט או מספר עשרוני בין שני מספרים נתונים, חשבו שיש רק מספר אחד כזה, ולא שיש אינסוף מספרים.

8) האם תוכלו לצבוע 0.5 של  ? (ראיון ראשון וראיון אחרון)

האם תוכלו לצבוע 1/2 של  ? (ראיון אחרון בלבד)

טבלה 3 מציגה את התוצאות עבור החלק הראשון של בעיה 8.

טבלה 3: תגובות תלמידים לבעיה 8

תשובות	ראיון ראשון	ראיון אחרון
6 תפוחים	1	6
5 תפוחים	11	7
לא ניתן לבצע	3	6
משהו אחר	5	1

בראיון האחרון , החלק השני של בעיה 8 ניתן לאותם 14 התלמידים שלא ענו נכון על החלק הראשון. חשבנו שבעיה זו תגרום לקונפליקט קוגניטיבי שיוביל את התלמידים להבחנה ששתי הבעיות הן זהות, אבל טכניקה זו לא עבדה. כל ה- 14 צבעו ששה תפוחים אבל לא הצליחו לראות את הקשר שבין 1/2 ל 0.5. התלמידים נשאלו לאחר מכן בכוונה, "מה אתה יכול לומר על 1/2 ו- 0.5?" שני תלמידים לא ענו, וחמישה אמרו ש- 1/2 > 0.5, אבל שבעה אמרו ש- 1/2 = 0.5. שלושה מתוך השבעה היו מסוגלים אחרי זה לראות את הקשר בין שתי הבעיות.

הקטע הבא מתאר מה שקרה עם ארבעת התלמידים שלא יכלו לקשר את העובדה ש- 1/2 = 0.5 לבעיה שקיבלו.

מראיין: האם תוכל לצבוע 0.5 מאלה (12 התפוחים)?
תלמיד: לא, יש יותר מדי.
מראיין: האם תוכל לצבוע 1/2 מאלה (12 תפוחים)?
תלמיד: (צובע 6 תפוחים).
מראיין: מה אתה יכול לומר על 0.5 ו- 1/2 ?
תלמיד: שניהם חצי.
מראיין: אבל אתה לא יכול לצבוע 0.5 מאלה (12 התפוחים)?
תלמיד: זה עדיין יהיה, א.. חמש עשיריות ואין 10 תפוחים, יש שנים עשר.

דיון

במבוא הועלתה השערה בדבר שלוש רמות של הבנת הקשר שבין שברים פשוטים למספרים עשרוניים. הרמה הראשונה היתה ההבנה הבסיסית ששברים פשוטים ומספרים עשרוניים יכולים להופיע ביחד בביטוי מתמטי. לפני שהוצגה יחידת ההוראה, תלמידים רבים התכחשו לאפשרות כזו. הם אמרו, למשל, שלא יכולים להיות מספרים עשרוניים בין שברים פשוטים (בעיה 5), או שלא ניתן לחבר שברים פשוטים עם מספרים עשרוניים (בעיה 4). למרות שהביצוע אחרי ההוראה היה קצת יותר טוב, הרי שמספר תלמידים עדיין לא השתכנעו ששברים פשוטים ומספרים עשרוניים יכולים להופיע ביחד (בעיות 2, 3, 6, 7). יחד עם זאת, באופן מפתיע, תלמידים שתשובתם ברמת ההבנה הראשונה לא היתה מספקת (כמו למשל, בבעיה 4), לא התלבטו לגבי היכולת להשוות שבר פשוט למספר עשרוני, ולמעשה חלק מהם אף הצליחו לבצע את ההשוואה נכון, כמו למשל בבעיה 2. מתקבל הרושם שתלמידים אלה מסוגלים לפעול ברמת ההבנה השנייה אך לא ברמה הראשונה. מאידך, בעיה 2 של הראיון, אופיינית יותר לבעיות המסורתיות הניתנות בספרי הלימוד שבהם התלמיד נדרש לשנות שבר המוצג בצורת מספר עשרוני לצורה של שבר פשוט, ולהיפך, וניתן לעשותה תוך שימוש בכללים כתובים. כמו כן, בבעיה 4 היו לתלמידים אפשרויות בחירה, כולל האפשרויות שלא ניתן לפתור את הבעיה, או שניתן להגיע לתשובה תוך התעלמות מהשבר הפשוט. לעומת זאת, בבעיה 2, ניתנו לתלמידים רק אפשרויות של "דומה" או "שונה". יש לשער שאם האפשרות השלישית היתה "לא ניתן להשוות" היו תלמידים אחדים בוחרים בה. הרמה השנייה דורשת שתלמידים ישוו בין שברים פשוטים למספרים עשרוניים בתוך סיטואציה של בעיה, כלומר, שיישמו את הידע שלהם בדרכים בעלות משמעות. תלמידים אלה לא היו מסוגלים לבצע יישומים כאלה, כפי שמראות התוצאות שהוצגו בבעיה 4.

הרמה השנייה של הבנה עסקה ביכולת לעשות העברה מייצוג סימבולי אחד למשנהו בתוך סיטואציות של פתרון בעיות. למרות שתלמידים אלה למדו על שברים פשוטים ועל מספרים עשרוניים בכיתה ה', נראה היה שיש להם הבנה מועטה לגבי המשמעות של הסמלים שבהם הם משתמשים. מצב זה השתפר במידה רבה לאחר ההוראה, אבל היישום של ידע זה כדי לפתור בעיות השונות מן הבעיות המוכרות להם היה קשה מאוד עבורם. התוצאות שהוצגו בבעיה 4 מראות שבמקום לנסות תחילה להבין מה שואלים בבעיה, תלמידים הרגישו צורך להתחיל לעשות משהו עם המספרים, ובכך הפכו בעיה פשוטה יחסית לבעיה מורכבת יותר. בהגיעם לראיון הרביעי התלמידים ידעו לפחות שניתן להמיר את המספרים לאותו ייצוג ואז לבצע את החיבור, אז הם הפכו את 0.5 ל- 5/10 .

לגבי הרמה השלישית, שבה תלמידים מסוגלים לבחור את הדרך היעילה יותר לייצג מספר רציונלי כדי לפתור בעיה, התוצאות שהוצגו בבעיה 8 מרמזות שלתלמידים אין את הגמישות להשתמש בייצוג השונה מזה שניתן בבעיה. תלמידים אחדים ידעו ש $1/2 = 0.5$ והיו מסוגלים לצבוע 1/2 מ- 12, אבל יחד עם זאת אמרו שלא ניתן לצבוע 0.5 מ- 12. העובדה שמספרים עשרוניים נקראים כעשיריות יצרה מכשול קוגניטיבי לפתרון בעיות אלה. קושי זה צוין אצל חוקרים אחרים. Hiebert (1984), לדוגמה, מצטט תלמיד בכיתה ז': " 0.6 זה שש עשיריות, ו- 6/10 **אומרים** אותו דבר, אבל זה שונה" (עמ' 505).

לסיכום, נראה שהבנת הקשר בין שברים פשוטים למספרים עשרוניים קשה מאוד לתלמידים בכיתה ו'. ברור שאיננו יכולים ללמד שברים פשוטים ומספרים עשרוניים כנושאים נפרדים ולצפות שהתלמידים יעשו את הקישורים המתאימים על סמך דוגמאות מעטות המופיעות בספרי הלימוד של היום. במיוחד

כאשר דוגמאות אלה מראות רק איך לעבור מייצוג אחד למשנהו ללא הסבר מתי ומדוע צריך לעשות טרנספורמציות אלה. במחקר זה, תלמידים קיבלו מידה מועטה של הוראה לגבי קשר זה במסגרת יחידות הוראה שתוכננו עבור פרויקט בעל היקף רחב יותר. אפילו מידה קטנה זו של הוראה נמצאה מועילה לתלמידים, אולי משום שניתנה ביחד עם הוראה שהדגישה מושגים של גודל-מספר ויחסים בין מספרים. ניכר כי יש צורך להקצות בכיתה זמן רב יותר לעבודה התפתחותית על המשמעות של שברים פשוטים, מספרים עשרוניים ועל הקשרים ביניהם.

רמות ההבנה שזוהו כאן עשויות לסייע בהנחיית מחקרים התפתחותיים ובתכנון מחקרים העוסקים בתוכניות לימודים. תשומת לב לרמות אלה עשויה להביא במיוחד תועלת לעוסקים באבחון והוראה מתקנת של תלמידים מתקשים. ספק אם תלמיד הפועל ברמה הראשונה יוכל להפיק תועלת מהוראה המכוונת לרמה השלישית. הפריטים בהם השתמשנו בראיונות של מחקר זה, יכולים לשמש כבסיס לפיתוח פריטים אשר יאבחנו את הרמה שבה התלמיד הפועל, ואז ניתן יהיה לתכנן הוראה מתקנת אשר תסייע לתלמיד להתקדם אל הרמה הבאה.

נתון מרשים הוא מידת ההשפעה של כמות מועטה של הוראה אשר ניתנה במחקר זה, על הבנת הקשר שבין שברים פשוטים למספרים עשרוניים. נראה שהוראה המתמקדת על המשמעות של שברים פשוטים ושל מספרים עשרוניים, יוצרת בסיס עליו ניתן לבנות הבנה של הקשר ביניהם. הוראה שבה רק מראים כיצד לתרגם בין שתי הצורות, כפי שנמצאה בספרי הלימוד לכיתה ו' שנבדקו, לא מספקת את הבסיס המושגי אפילו עבור הרמה הראשונה של ההבנה.

נדרש מחקר נוסף לגבי התפתחות ההבנה של קשר זה. במיוחד יש לחקור דרכים להתגבר על המכשול הקוגניטיבי שזוהה בבעיה 8. לבסוף, נראה גם שהבנה עמוקה יותר של טרנספורמציה בין צורות שונות של מספרים רציונליים ושל בחירת הייצוג המתאים יותר, עשויה לגרום להעברה בשלב מאוחר יותר לפעילות בנושאים אחרים, כמו פונקציות. מחקר בנושא זה יצטרך להיות ארוך טווח, אך עשוי להיות מעניין ביותר.

ביבליוגרפיה

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Hiebert, Jr. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and understanding. *The Elementary School Journal*, 84, 496-513.

Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). Constructing and using meaning for mathematical symbols: The case of decimal fractions. *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.220-235). Hillsdale, NJ: Erlbaum & Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.