

فهم التلاميذ للعلاقة بين الكسور العادية والكسور العشرية

Students' Understanding of the Relationship Between Fractions and Decimals

بقلم Zvia Markovits and Judith T. Sowder

نُشر في: Focus on Learning Problems in Mathematics, 1991. Vol. 13, No. 1, pp. 3-11

ترجمة: كميل ظاهر

تلعب الكسور العادية والكسور العشرية دورًا هامًا في مناهج الرياضيات. ويقضي التلاميذ من الصف الرابع حتى الصف السادس ساعات طويلة في العمل مع هذا النوع من الأعداد. ولكنهم يقضون القليل من الوقت في تعلّم العلاقة بين الكسور العادية والكسور العشرية. يخصص كل واحد من ثلاثة كتب التدريس للصف السادس نُشرت مؤخرًا، ويتبع جميعها لسلسلة من الكتب المعدّة للاستخدام الواسع في الولايات المتحدة، صفحة واحدة تمامًا لكتابة الكسور العشرية ككسور عادية والكسور العادية ككسور عشرية. ولم يتم العثور على أي عمل آخر يتعلق بهذين النوعين من الأعداد النسبية في الكتب الثلاثة. وبشكل مشابه، أجريت دراسات تبحث في فهم الكسور العشرية (على سبيل المثال، Behr, Lesh, Post, & Silver, 1988) والكسور العادية (على سبيل المثال، Wearne & Hiebert, 1983)، إلا أنه لم تحصل قدرة التلاميذ على الربط بين هذين التفسيرين من الأعداد الحقيقية إلا على القليل من الاهتمام البحثي. هل يفهم التلاميذ أنه يمكن التعبير عن العدد النسبي بشكل كسر عادي أو كسر عشري على حد سواء؟ هل هم قادرين على التعامل مع هذين التفسيرين في الوقت نفسه؟ يشير هيبيرت إلى أن "معظم التلاميذ لا يربطون بين فهمهم للكسور العادية وبين رموز الكسور العشرية" (Hiebert, 1984, p.505).

تقدم الدراسة المعروضة هنا معلومات إضافية حول فهم التلاميذ للعلاقة بين تفسيرات الكسور العادية والكسور العشرية للأعداد النسبية، حيث يتم عرض نوعي التفسير بشكل رمزي. (على الرغم من أن التمثيلات الأخرى تلعب دورًا هامًا في تشكيل المفاهيم وفهمها، إلا أن التمثيلات الرمزية هي التي يستخدمها التلاميذ على نحو واسع.) تشكل هذه الدراسة جزءًا من مشروع بحثي كبير. وتضمنت أهداف المشروع هدفين وهما: زيادة فهم مفاهيم كسر-العدد لدى تلاميذ الصف السادس، والبحث في تأثير هذا الفهم على تعلّم التقدير الحسابي. وكشفت الإجابات على مقابلة حول العناصر التي تتضمن تمثيلات الكسور العادية والكسور العشرية على حدٍ سواء عن عدد من نقاط سوء الفهم المتعلقة بكيفية ارتباط هذه التمثيلات. وبدت نقاط سوء الفهم هذه على أنها تحتاج إلى المزيد من البحث في هذه العناصر.

أدى بنا البحث في أنواع الأخطاء التي ارتكبها التلاميذ إلى الاعتقاد بأن التلاميذ يتقدمون من خلال مستويات مختلفة من فهم العلاقة بين الكسور العادية والكسور العشرية. وقد قدرنا أن هنالك ثلاثة من تلك المستويات:

- (1) الفهم الأساسي بأن هنالك رابط بين الكسور العادية والكسور العشرية التي يمكنها أن تتواجد سوياً في التعبيرات الرياضية، على سبيل المثال، التعبير $0.5 + \frac{1}{2}$ هو تعبير مقبول، حتى لو لم يكن يعلم الطالب كيفية إجراء عملية الجمع هذه؛
- (2) الفهم بأن من المتاح الانتقال من تمثيل رمزي واحد إلى تمثيل رمزي آخر، على سبيل المثال، من $\frac{1}{2}$ إلى 0.5 وبالعكس، أثناء وضع حلّ المسائل؛
- (3) يتم إظهار الفهم الكامل للعلاقة بين التمثيلات، على سبيل المثال، من خلال اختيار التمثيل الأكثر نجاعة في وضع معيّن مثل استخدام $\frac{1}{2}$ بدلاً من 0.5 من أجل تقدير 0.52×789 .

تمّ استخدام المستويات المقدّرة هذه لتفسير إجابات التلاميذ في هذه الدراسة.

الطريقة

العينة

أجري البحث في مدرسة إعدادية كبيرة (بين الصفين السادس والثامن). يأتي تلاميذ المدرسة من العديد من مناطق المدينة، لكنهم يأتون، بشكل عام، من عائلات الطبقة الوسطى والطبقة الدنيا في الأساس. وتقسم المدرسة التلاميذ إلى مستويات: متقدمون، متوسطون ومستصعبون. وشارك في هذه الدراسة تلاميذ شعبتين من الصف السادس من المستوى المتوسط. تم اختيار عشرة تلاميذ من كل صف للدراسة. واستخدمت الإجابات على استبيان يختبر فهم القيمة المنزلية، الكسور العادية والكسور العشرية من أجل اختيار التلاميذ ذوي مستويات القدرات المختلفة ضمن كل صف. كذلك استخدم في عملية الاختيار استعداد التلاميذ للتعاون والتعبير الشفهي عن التفكير، استناداً إلى الملاحظات في غرفة الصف. وتم جمع المعطيات عن هؤلاء التلاميذ العشرين فقط، على الرغم من أن جميع التلاميذ كانوا قد تلقوا وحدات الإرشاد.

وحدات الإرشاد

تم إعداد وحدتين للتلاميذ، وحدة حول الكسور العادية وأخرى حول الكسور العشرية. وأعدت هاتان الوحدتان للمشروع الكبير الذي أخذت منه هذه المعطيات. وتتمحور الوحدتان في معنى الكسور العادية والكسور العشرية، التي تم عرضها من خلال استخدام التمثيلات المختلفة، بما في ذلك عملية الضرب. وتضمنت كل وحدة دروساً في مقارنة الأعداد وترتيبها. وتطرق قسم واحد من أحد الدروس في الوحدة الثانية إلى العلاقة بين تمثيلات الكسور العادية والكسور العشرية للأعداد النسبية. وتضمن هذا الدرس مسائل حول مقارنة كسر عادي وكسر عشري وحول ترتيب الكسور العادية والكسور العشرية على محور أعداد مشترك. وتم عرض فكرة وجود عدد لا نهائي من الكسور العادية والكسور العشرية بين أي كسرين عاديين أو عشريين ولكن لم يتم عرض هذه الفكرة بعمق. وتم تدريس الوحدتين على أنهما مقدمتان للكسور العادية والكسور العشرية ثم تلتهما فصول نصّية تتعامل مع عمليات تُجرى على الكسور العادية والكسور العشرية.

أساليب القياس

تم تقييم قدرة التلاميذ على الانتقال بين التمثيلات الرمزية للأعداد النسبية من خلال سلسلة من المقابلات الفردية مع كل واحد من التلاميذ العشرين في العينة. أجريت المقابلات الأولى في كانون الثاني قبل عرض وحدات الإرشاد، وأجريت المقابلات الأخيرة في حزيران، بعد أربعة أسابيع من إنهاء وحدات الإرشاد. وتضمنت المقابلات مسائل ذات أعداد مختلفة الكبر، ولكننا نعرض في هذه المقالة تلك العناصر في المقابلات الأولى والأخيرة التي تتضمن العلاقة بين الكسور العادية والكسور العشرية.

أسئلة المقابلة والنتائج

أعطي التلاميذ، على مدار أربع مقابلات، ثماني أسئلة تتعلق بالكسور العادية والكسور العشرية. وقام التلاميذ، خلال وحدات الإرشاد، بحل عدد من الأسئلة التي تشبه أسئلة المقابلة: 1، 2، 3، 5، 6 و 7، ولكنهم لم يحلوا أسئلة تشبه السؤالين 4 و 8. تم تصنيف الأسئلة هنا وفقاً لتشابه مهامها. ويتم عرض ملخص إجابات التلاميذ لكل مجموعة من الأسئلة أدناه.

- | | |
|--------------------|---|
| (المقابلة الأولى) | هل $1/4$ و 0.4 هما نفس الشيء أم يختلفان؟ |
| (المقابلة الأخيرة) | هل $1/4$ و 1.4 هما نفس الشيء أم يختلفان؟ |
| (المقابلة الأولى) | هل $1/7$ و 1.7 هما نفس الشيء أم يختلفان؟ |
| (المقابلة الأخيرة) | هل 0.5 و $6/12$ هما نفس الشيء أم يختلفان؟ |

لم يتلقَ الجزء الأول من السؤال 1 في المقابلة الأولى سوى 17 من مجموع 20 طالبًا. (تمت إضافة هذا السؤال إلى مجموعة أسئلة المقابلة بعد أن تمت مقابلة عدد من التلاميذ فقط.) أجاب أربعة تلاميذ من هؤلاء الـ 17 بأن $1/4$ و 0.4 هما نفس الشيء، بينما أجاب 13 طالبًا بأن الكسرين يختلفان. أجاب 12 طالبًا من بين التلاميذ الـ 14 الذين تلقوا الجزء الثاني من السؤال 1 بأن $1/4$ و 1.4 هما نفس الشيء. ويوضح هذا السؤال التعقيد الكامن في استخدام الرموز المختلفة لتمثيل ذات الفكرة والرموز المتشابهة بشكلها لتمثيل الأفكار المختلفة.

في المقابلة الأولى، أجاب طالبان من بين الـ 20 طالبًا بأن $1/7$ و 1.7 هما نفس الشيء. ومن بين الـ 18 طالبًا الذين أجابوا بأن الكسرين يختلفان، عرف 17 طالبًا منهم بأن 1.7 هو أكبر من $1/7$ أيضًا. وأدرك 11 طالبًا أن 0.5 و $6/12$ هما نفس الشيء، بينما قال خمسة تلاميذ بأن $6/12$ هو الأكبر. (شرح أحد التلاميذ أن $6/12$ يساوي 0.6). واعتقد التلاميذ الأربعة الباقون بأن 0.5 هو أكبر من $6/12$.

(3) رتب الأعداد التالية من الأكبر إلى الأصغر:

0.99, $14/13$, $5/8$, 0.48 (المقابلة الأولى)

قام تسعة تلاميذ بترتيب الأعداد بشكل صحيح، عن طريق استخدام النصف والواحد كمرجعين. ومن بين الـ 11 طالبًا الذين قاموا بترتيب الأعداد بشكل غير صحيح، قام 8 تلاميذ بترتيب الكسرين العاديين أولاً ثم الكسرين العشريين، أو الكسرين العشريين أولاً ثم الكسرين العاديين، أي أنهما فصلًا بين الكسرين العاديين والكسرين العشريين في كلتا الحالتين.

4) أي واحد من الخيارات التالية هو الجواب الصحيح على
 $5 + 1/2 + 0.5 = ?$ (ما قبل وما بعد المقابلات)

أ) لا يمكن حل هذه المسألة

ب) 5

ج) 5.5

د) $5 \frac{1}{2}$

هـ) 6

و) 10

تظهر نتائج المقابلتين في الجدول 1.

الجدول 1: إجابات التلاميذ على سؤال 4

المقابلة الأخيرة	المقابلة الأولى	خيارات الإجابة
-	3	لا يمكن حل هذه السؤال
3	6	5.5
9	1	6
6	9	شيء آخر
2	1	لم يعرف كيف يجيب

قال ثلاثة تلاميذ في المقابلة الأولى أنه لا يمكن حلّ السؤال لأن "... هذا كسر عادي وهذا كسر عشري"، أو لأنك "... تتعامل مع ثلاثة أشياء مختلفة." ويبدو أن جميع التلاميذ الذين اختاروا الجواب 5.5 تبعوا نفس مسارات التفكير. على سبيل المثال، قال باري في المقابلة الأولى:
 باري: 5.5 ... لقد أخذت هذه الـ 5 (من 0.5) ووضعتها هناك (5.5).

مجري المقابلة: وماذا بشأن هذا (1/2)؟

لا أرى أين يمكن ملاءمته مع الأعداد الأخرى، ولكنني غير متأكد بالنسبة لذلك.

أو توم الذي قال في المقابلة الأولى:

توم: 5.5، جمعت أولاً $5 \frac{1}{2} = 5 + 1/2$ ، ثم تخلصت من النصف لأنه لم أسمع من قبل خمسة نقطة خمسة ونصف.

واستمر توم، في المقابلة الأخيرة، في كونه غير قادر على التعامل مع 1/2:

توم: 5.5 لأن النصف لا يمكنه الدخول هنا.

وتقترح هذه الإجابات أن العديد من التلاميذ لم يصلوا إلى المستوى الأول من الفهم، أي أنهم لا يزالون يعتقدون أن الكسور العادية والكسور العشرية يجب ألا تظهر سوياً في نفس التعبير.

أعطى بعض التلاميذ إجابات لم يخطر ببالنا إدراجها. على سبيل المثال:

$$6/7. \quad 5 + 0.5 = 5/5 \quad \text{و} \quad 5/5 + 1/2 = 6/7$$

$$11/13. \quad 5/10 + 1/2 + 5/1 \quad (\text{جمع البسوط، جمع المقامات}).$$

استخدم الطريقة الأخيرة (التي أنتجت 11/13) أربعة تلاميذ في المقابلة الأخيرة. أنهى التلاميذ في الفترة بين المقابلتين تعلم فصل حول العمليات على الكسور.

- (5) هل توجد هنالك أية كسور عادية بين $1/4$ و $3/4$ ؟
 هل توجد هنالك أية كسور عشرية بين $1/4$ و $3/4$ ؟
 (المقابلة الأولى)
- (6) هل توجد هنالك أية كسور عادية بين $2/5$ و $3/5$ ؟
 هل توجد هنالك أية كسور عشرية بين $2/5$ و $3/5$ ؟
 (المقابلة الأخيرة)
- (7) هل توجد هنالك أية كسور عشرية بين 0.46 و 0.47 ؟
 هل توجد هنالك أية كسور عادية بين 0.46 و 0.47 ؟
 (المقابلة الأخيرة)

إذا كانت إجابة التلاميذ "لا"، سألناهم لماذا أجابوا بلا. أما إذا كانت الإجابة "نعم"، طلبنا منهم إعطاء مثال والإجابة عن عدد الكسور العادية أو العشرية الموجودة بين العددين المذكورين في السؤال.

الجدول 2 يلخص إجابات التلاميذ على السؤال هل يوجد عدد بين عددين معطيين.

الجدول 2 إجابات التلاميذ للأسئلة 5 و 6 و 7

الأسئلة			إجابات التلاميذ	
5: بين $1/4$ و $3/4$	6: بين $2/5$ و $3/5$	7: بين 0.46 و 0.47	بالنسبة للكسور العادية	بالنسبة للكسور العشرية
8	6	9	نعم	نعم
2	2	4	لا	نعم
10	3	1	نعم	لا
0	6	5	لا	لا
0	3	1	شيء آخر	

تشير الأجوبة نعم-لا و لا-نعم إلى أن التلاميذ لم يدركوا أنه في حال وجود كسر عادي بين عددين يجب أن يكون بينهما كسر عشري أيضاً، والعكس صحيح. لاحظ أن إجابات 12 طالباً على السؤال 5 وخمسة إجابات على السؤالين 6 و 7 هي تابعة لأحدى هاتين الفئتين.

يلقي محضر المقابلة التالي الضوء على تفكير بعض التلاميذ حول هذه الأسئلة.

مجري المقابلة: هل توجد هنالك أية كسور عشرية بين $1/4$ و $3/4$ ؟

ك: كسور عشرية؟ لا، سيبدو من الغريب وجود مثل هذه الكسور.

مجري المقابلة: هل توجد أية كسور عشرية بين 0.46 و 0.47 ؟

ر: نعم. 0.461.

مجري المقابلة: هل يمكنك إعطاء مثال آخر؟

ر: 0.463.

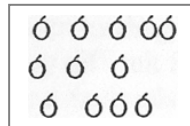
مجري المقابلة: هل توجد هنالك أية كسور عادية بين 0.46 و 0.47؟

ر: لا، لأن الكسور العادية هي أشياء مختلفة تمامًا. لا يمكن دمجها مع بعضها البعض.

من الواضح أن التلاميذ الذين أعطوا الإجابات نعم-لا و لا-نعم لم يكونوا يعملون على المستوى 2، وربما ليس على المستوى 1. ويمكن أن يكون السبب في إعطاء 12 طالبًا لمثل تلك الإجابات على أسئلة المقابلة الأولى و5 فقط على أسئلة المقابلة الأخيرة هو كمية الإرشاد القليلة حول هذا الموضوع أو الاختلافات بين الأسئلة، أي أنه من الأسهل العثور على الكسر العادي الواقع بين $1/4$ و $3/4$ مما هو عليه بين $2/5$ و $3/5$.

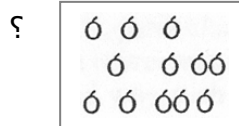
حتى عندما أعطى التلاميذ إجابات "نعم"، عادة ما كانت أمثلتهم غير صحيحة. على سبيل المثال، قيل أن الكسر $2/6$ موجود بين $2/5$ و $3/5$ ؛ 2.4 بين $1/4$ و $3/4$ ؛ $1/2$ بين 0.46 و 0.47. كذلك فإن الكثير من التلاميذ الذين قالوا بأنه يمكن وجود كسر عادي أو كسر عشري بين عددين معطين اعتقدوا بأنه يوجد كسر واحد فقط، بدلاً من وجود عدد لانهائي من الكسور.

؟ (المقابلة الأولى والمقابلة الأخيرة)



8 هل يمكنكم تلوين 0.5 من

؟ (المقابلة الأخيرة فقط)



هل يمكنكم تلوين $1/2$ من

الجدول 3 يعرض نتائج القسم الأول من السؤال 8.

الجدول 8: إجابات التلاميذ على السؤال 8

المقابلة الأخيرة	المقابلة الأولى	الإجابات
6	1	6 تفاحات
7	11	5 تفاحات
6	3	لا يمكن القيام بذلك
1	5	شيء آخر

في المقابلة الأخيرة، أعطى القسم الثاني من سؤال 8 للتلاميذ الـ 14 الذين لم يجيبوا على القسم الأول بشكل صحيح. ساد اعتقاد بأن هذا السؤال قد يخلق صراعًا إدراكيًا يؤدي إلى أن يدرك التلاميذ أن كلتا المسألتين متماثلتان، ولكن لم تنجح هذه الطريقة. فقد قام التلاميذ الـ 14 بتلوين ست تفاحات لكنهم فشلوا في رؤية العلاقة بين $1/2$ و 0.5. وعندها سُئل التلاميذ، "ماذا يمكنكم القول عن

1/2 و 0.5؟" لم يجب طالبان على ذلك، وقال خمسة أن 1/2 أكبر من 0.5، وقال سبعة تلاميذ أن 1/2 = 0.5. واستطاع، عندها، ثلاثة من التلاميذ السبعة رؤية العلاقة بين السؤالين. يبين هذا الحوار ماذا حدث مع التلاميذ الأربعة الذين لم يستطيعوا ربط حقيقة كون 1/2 = 0.5 مع السؤال التي تلقوه.

مجري المقابلة: هل يمكنك تلوين 0.5 من هذه (12 تفاحة)؟
م: لا، يوجد الكثير منها.

مجري المقابلة: هل يمكنك تلوين 1/2 من هذه (12 تفاحة)؟
م: (لون 6 تفاحات).

مجري المقابلة: ماذا يمكنك أن تقول عن 0.5 و 1/2؟
م: كلاهما يساويان نصف.

مجري المقابلة: لكنك لا تستطيع تلوين 0.5 من هذه (12 تفاحة)؟
م: ستبقى، ممم، خمسة أعشار ولا يوجد هنالك 10 وحدات، بل 12.

النقاش

تمّ، في المقدمة، تقدير وجود ثلاثة مستويات من فهم العلاقة بين الكسور العادية والكسور العشرية. المستوى الأول هو الفهم الأساسي بأن الكسور العادية والكسور العشرية يمكنها أن تتواجد سوية في تعبير رياضي. أنكر العديد من التلاميذ وجود مثل هذه الإمكانية قبل عرض وحدات الإرشاد. فقد قالوا، على سبيل المثال، أنه لا يمكن وجود كسور عشرية بين الكسور العادية (سؤال المقابلة 5) أو لا يمكن جمع الكسور العادية والكسور العشرية (سؤال المقابلة 4). على الرغم من تحسن أداء التلاميذ بعد الإرشاد، بقي بعض التلاميذ غير مقتنعين أنه من الممكن أن تتواجد الكسور العادية والكسور العشرية سوية (أسئلة المقابلة 2، 3، 6، 7). بالرغم من ذلك، وعلى نحو مفاجئ، فإن التلاميذ الذين لم يجيبوا على المسائل بشكل مرض في المستوى الأول من الفهم (على سبيل المثال، لم يتقبلوا تواجد الكسور العشرية والكسور العادية سوية في سؤال 4) لم يشكوا في إمكانية المقارنة بين الكسور العادية والكسور العشرية، وفي الحقيقة كان بعض منهم قادرًا على المقارنة بشكل صحيح، كما يظهر في سؤال المقابلة 2 هو سؤال نموذجي بشكل أكبر لأسئلة الكتب الدراسية التقليدية التي يقوم من خلالها التلاميذ بتحويل الكسور العشرية إلى كسور عادية وبالعكس، وكان يمكن حلها عن طريق استخدام القواعد التي تمّ تعلمها من النص. ووفر سؤال المقابلة 4 خيارات للتلاميذ، بما في ذلك خيارات تتعلق بعدم إمكانية حلّ السؤال أو أنه يمكن الوصول إلى الجواب من خلال التفاوض عن الكسور. وفي سؤال المقابلة 2، أعطى التلاميذ الخيارين، "نفس الشيء" و "يختلفان". ويخامر المرء شعورًا بأنه لو تمت إضافة خيار ثالث، "لا يمكن مقارنتهما"، كان سيختاره العديد من التلاميذ. يقتضي المستوى الثاني أن يقارن التلاميذ بين الكسور العادية والكسور العشرية في سؤال ما، أي تطبيق معرفتهم بطرق ذات معنى. ولم يكن بمقدور هؤلاء التلاميذ القيام بذلك كما تبين نتائج سؤال المقابلة 4.

يتناول المستوى الثاني من الفهم القدرة على التحويل من تمثيل رمزي إلى آخر ضمن أوضاع حلّ الأسئلة. وعلى الرغم من أن هؤلاء التلاميذ كانوا قد تعلموا الكسور العادية والكسور العشرية في

الصف الخامس، فقد بدى أن لديهم القليل من الفهم لمعنى الرموز التي يستخدمونها. وقد تحسّن هذا الوضع بشكل كبير بعد الإرشاد، ولكن كان تطبيق هذه المعرفة على حلّ الأسئلة التي تختلف عن الأسئلة التي اعتادوا حلّها صعبًا جدًا بالنسبة لهم. وتبيّن نتائج السؤال 4 أنه بدلاً من محاولة فهم ما يطلبه منهم السؤال أولاً، شعر التلاميذ بأنهم مرغمون على البدء بعمل شيء ما مع الأعداد، الأمر الذي حوّل سؤالاً بسيطاً، نسبياً، إلى سؤال أكثر تعقيداً. فهم التلاميذ مع الوصول إلى المقابلة الرابعة، على الأقل، أنه يمكن تحويل الأعداد إلى نفس التمثيل ومن ثم جمعها، وقاموا بتحويل 0.5 إلى 5/10.

أما بالنسبة للمستوى الثالث، التي يصح التلاميذ فيه قادرين على اختيار الطريقة الأنجع لتمثيل العدد النسبي بغية حلّ مسألة ما، تبيّن النتائج من السؤال 8 أن التلاميذ لا يتمتعون بالمرونة الضرورية لاستخدام تمثيل يختلف عن التمثيل المعطى في السؤال. لم يعرف بعض التلاميذ أن $0.5 = 1/2$ وكانوا قادرين على تلوين 1/2 الـ 12، لكنهم قالوا أنه من غير الممكن تلوين 0.5 من 12. وشكّلت حقيقة قراءة الكسور العشرية كأعشار عائناً إدراكياً لحل هذه المسائل. وقد لاحظ آخرون هذه الصعوبة أيضاً. ويقتبس هيرت (1984)، على سبيل المثال، قول طالب في الصف السابع: 0.6 هي ستة أعشار، وأنت تلفظ 6/10 بنفس الطريقة لكنها مختلفة" (ص. 505).

للتلخيص، يبدو أن فهم العلاقة بين الكسور العادية والكسور العشرية هو أمر صعب جداً بالنسبة لتلاميذ الصف السادس. من الواضح أننا لا نستطيع تدريس الكسور العادية والكسور العشرية كموضوعين منفصلين والتوقع بأن يقوم التلاميذ بإجراء الربط الملائم بينهما من خلال الأمثلة القليلة التي توفرها لهم النصوص المستخدمة حالياً، خاصة عندما تُظهر لهم هذه الأمثلة كيفية تحويل تمثيل إلى آخر بدون إعطاء الكثير من الشرح وسبب إجراء هذا التحويل. حصل التلاميذ في هذه الدراسة على القليل من الإرشاد حول هذه العلاقة ضمن وحدات الإرشاد التي صُممت لمشروع أكبر. وتبيّن أنه حتى القليل من الإرشاد كان مجدداً للتلاميذ، ربما لأنه أعطي بترافق مع الإرشاد الذي يشدد على مفاهيم كبر العدد وعلاقات الأعداد. من الواضح أن هنالك ضرورة لتخصيص المزيد من وقت التعليم للعمل التطويري المتعلق بمعنى الكسور العادية، الكسور العشرية، والعلاقة بينها. قد تكون مستويات الفهم التي تم تحديدها هنا مجددة لتوجيه البحث التطويري ودراسات تخطيط المنهاج. ويبدو أن من شأن الانتباه لهذه المستويات أن يكون مجدداً للمهتمين بتشخيص الصعاب التي يواجهها الطالب ومعالجتها. ويبدو من غير المؤكد أن يجد الطالب الذي يعمل في المستوى الأول الإرشاد المخصص للمستوى الثالث مجدداً. يمكن أن تشكل العناصر المستخدمة في هذه الدراسة قاعدة لتطوير عناصر من أجل اختبار المستوى الذي يعمل فيه الطالب، ويمكن، عندها، تصميم إرشادات تصحيحية لمساعدة الطالب على التقدم إلى المستوى التالي.

من المذهل أن نرى التأثيرات التي يحدثها القليل من الإرشاد التي وفرته هذه الدراسة على فهم العلاقة بين الكسور العادية والكسور العشرية. ويبدو أن الإرشاد الذي يتمحور حول معنى الكسور العادية والكسور العشرية يشكل قاعدة يُبنى عليها فهم العلاقة بينهما. ولا يوفر الإرشاد الذي يُبيّن كيفية الانتقال بين الكسور العادية والكسور العشرية فقط، كما هو موجود في الكتب الدراسية للصف السادس، قاعدة مفهومية حتى للمستوى الأول من الفهم.

هنالك حاجة للمزيد من البحث حول تطوير فهم هذه العلاقة، ويجب البحث، بشكل خاص، في طرق التغلب على العائق الإدراكي الذي تمّ تحديده في السؤال 8. وأخيرًا، يبدو، أيضًا، أن من شأن الفهم العميق للتحويل بين الأشكال المختلفة للأعداد النسبية واختيار التمثيل الأكثر ملاءمة أن يؤدي إلى الانتقال إلى العمل على مواضيع أخرى، مثل الدوال. ولكن يجب أن يكون هذا البحث طويل الأمد، لكنه قد يكون مثيرًا للاهتمام بشكل كبير.

المراجع

- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *The acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.
- Hiebert, Jr. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and understanding. *The Elementary School Journal*, 84, 496-513.
- Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). Constructing and using meaning for mathematical symbols: The case of decimal fractions. *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.220-235). Hillsdale, NJ: Erlbaum & Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.