

הערכת יכולת התלמידים להעלות שאלות מתמטיות

Assessing Students' Mathematical Problem Posing

מאת : Edward A. Silver and Jinfa Cai

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 12 No. 3, Oct. 2005, pp. 129-135

תרגום: ברכה סגליס

העלאת שאלות הינה פעילות אינטלקטואלית בעלת חשיבות מרובה במחקר מתמטי ובחקירות מדעיות. למעשה, יש הטוענים שהעלאת שאלות, כחלק מחקירה מדעית או מתמטית, חשובה לפחות כמו פתרון בעיות (Einstein and Infeld 1938, Hadamard 1945) לפתרון בעיות יש היסטוריה ארוכה בחינוך המתמטי כחלק מתוכנית הלימודים וכמטרת הוראה. לעומת זאת, העלאת שאלות קיבלה הרבה פחות תשומת לב. בשנים האחרונות יש עלייה במידת תשומת הלב שמקבל הנושא של העלאת שאלות בקהיליית החינוך המתמטי (ראה Brown & Walter [1990], [1990] NCTM; [1989, 2000] Silver; [1994] Silver) - הן כאמצעי הוראה (כדי להביא את התלמידים ללימוד מושגים ומיומנויות חשובים וכדי לקדם את היכולת שלהם לפתור בעיות) והן כמטרת הוראה בפני עצמה (לפתח את מיומנות התלמידים בהעלאת שאלות מתמטיות). חסידי העלאת שאלות נוהגים לטעון שניסיון בהעלאת שאלות מתמטיות מקדם את התלמידים בפעילות מתמטית אותנטית; מאפשר להם להיפגש עם בעיות, שיטות ופתרונות רבים במקום רק עם אחד מכל סוג; ומקדם את היצירתיות של התלמידים - הנטייה לחפש בעיות חדשות, שיטות אלטרנטיביות ופתרונות חדשים. כאשר העלאת שאלות נכללה באופן שיטתי בהוראת המתמטיקה לתלמידים, אפילו בדבר פשוט כמו לבקש מהתלמידים להמציא סיפורים חשבוניים, התוצאות שדווחו היו בדרך כלל חיוביות, כולל השפעה חיובית על הישגי התלמידים בפתרון בעיות ועל היחס שלהם למתמטיקה (ראה Hashimoto [1987]; Healy [1993]; Silverman, Winograd, and Strohauser [1992]; Whitin [2004]).

למרות שחלה התקדמות ניכרת בפיתוח גישות הוראה הכוללות יצירת שאלות כחלק מהפעילות הכיתתית (ראה Brown & Walter [1990], Silverman, Winograd, and Strohauser [1992]; Skinner [1991]), וחלה התקדמות מה בחקירת היבטים אחדים של תהליכי העלאת שאלות ואת הקשר שלהם לפתרון בעיות (ראה Cai and Hwang [2002]; English [1997]; Silver and Cai [1996]), הרי שניתנה הרבה פחות תשומת לב להעלאת שאלות והערכה. אם הפעילות של העלאת שאלות היא חלק אינטגרלי מההוראה, האם לא צריך לכלול אותה בדרך כלשהיא גם בהערכה הכיתתית כאמצעי לבדיקת ההבנה או הבקיאות של התלמידים? אם כן, כיצד ניתן לעשות זאת? ואם מתייחסים להעלאת שאלות כמטרת הוראה בפני עצמה, האם לא צריך להעריך ההשפעה של הוראה זו על יכולתם של התלמידים להעלות שאלות? אם כן, כיצד? שאלות אלה הן הגורם המניע של מאמר זה.

נתייחס תחילה להערכה עם העלאת שאלות, לאחר מכן נתייחס להערכה של העלאת שאלות. לבסוף, נפנה את תשומת הלב לקריטריונים כלליים בהם ניתן להשתמש כדי להעריך תגובות של תלמידים.

הערכה עם העלאת שאלות

כאשר משתמשים בכיתה בהעלאת שאלות כאמצעי להפעיל את התלמידים בלמידת מושגים ומיומנויות חשובים וכדי לקדם את היכולת שלהם לפתור בעיות, מורים עשויים לשקול גם שימוש בפעילויות יצירה כחלק מההערכה הכיתתית הקשורה לאותם מושגים, כישורים ויכולות. לדוגמה, חשבו על המטלה המופיעה באיור 1. ניתן להשתמש במטלה זו בהערכה כיתתית לאחר לימוד יחידה העוסקת בחילוק עם שארית.

איור 1: מטלת הערכה של בעיות חילוק עם שארית

העלו שאלות שניתן לפתור אותן בעזרת **אותו תרגיל חילוק**: $540 : 40 = ?$
כמה שאלות שונות תוכלו להעלות ולפתור?
שתי בעיות יחשבו שונות רק אם יש להן **תשובות שונות**.

תלמיד עשוי להציע בעיה שהתשובה הנכונה שלה היא 13 (לדוגמה, "אם יש לך 540 דיסקים ואתה שם בכל קופסה 40 דיסקים, כמה קופסאות תוכל למלא?") ושאלה אחרת שהתשובה שלה היא 14 ("אם יש לך 540 דיסקים ובכל קופסה אפשר לשים לא יותר מ-40 דיסקים, מהי הכמות הקטנה ביותר של קופסאות שצריך בשביל כל הדיסקים?"). תלמיד אחר יכול להעלות שאלה עם התשובה 13 ושארית 20 ("אם יש לך 540 דיסקים, ואתה שם 40 דיסקים בדיוק בכל קופסה, כמה קופסאות תוכל למלא וכמה דיסקים יישארו אחרי שתמלא את הקופסאות?"). תלמיד אחר עשוי להעלות שאלה שהתשובה שלה היא $13 \frac{1}{2}$ ("אם גיוש מרוויח \$40 ביום בעבודת הקיץ שלו, כמה ימים יצטרך לעבוד כדי להרוויח \$540?"), ויתכן שיש עוד בעיות עם תשובות הגיוניות אחרות. כך, מהווה בעיה זו דרך טובה להעריך האם התלמידים מבינים שבכל תרגיל חילוק ניתן להשתמש להצגת סיטואציות בעיה רבות ושהתשובה לסיטואציות החילוק שבבעיה תלויה במידה רבה במאפייני הסיטואציה ובטבען של הכמויות המעורבות בה. ניתן כמובן לבחון ידע זה בדרכים שונות, אבל נראה שלמטרת מבחן זו המטלה של העלאת שאלות מתאימה במיוחד.

הערכה של העלאת שאלות

כאשר העלאת שאלות הינה מטרה בפני עצמה בתוכנית ההוראה, המטרה הגלויה של המורה היא לפתח את המיומנות של התלמידים בהעלאת שאלות מתמטיות. אם כך, נראה מתאים, ואפילו הכרחי, להעריך את השפעת ההוראה על היכולת של התלמידים להעלות שאלות. חשבו, לדוגמה, על המטלה המופיעה באיור 2. ניתן להשתמש במטלה זו בהערכה כיתתית בעקבות יחידת הוראה העוסקת בהעלאת שאלות בהקשר לנושא של חיבור וחיסור מספרים דו-ספרתיים.

איור 2: הערכה של חיבור וחיסור מספרים דו-ספרתיים

לאן יש 34 גולות, לבילי יש 27 גולות ולכריס יש 23 גולות. כתבו ופתרו כמה שיותר שאלות המשתמשות במידע זה.

תלמידים יכולים לייצר עבור מטלה זו מספר שאלות אפשריות (ויתכן גם שאלות בלתי אפשריות אחדות!!). כאשר אחד מכותבי מאמר זה נתן את המטלה לתלמידים בכיתה ג', הם ייצרו מספר תגובות מעניינות, אחדות מהן מופיעות באיור 3.

איור 3: השאלות שתלמידים ייצרו למטלה שבאיור 2

- כמה גולות יש לכולם ביחד?
- כמה גולות יש לבילי יותר מאשר לכריס?
- כמה גולות הם עוד יצטרכו ביחד, כדי שיהיה להם אותו מספר גולות שיש לסמי, שלו יש 103?
- האם אן יכולה לתת לבילי ולכריס גולות כדי שלכולם יהיה אותו מספר גולות? אם כן, כיצד?
- נגיד שבילי נותן כמה גולות לכריס. כמה גולות הוא צריך לתת לו כדי שיהיה להם אותו מספר של גולות?
- נגיד שאן נותנת כמה גולות לכריס. כמה גולות היא צריכה לתת לו כדי שיהיה להם אותו מספר של גולות? [שימו לב שלא ניתן למצוא לבעיה זו פתרון ישיר, אבל ניתן לחשוב על אפשרויות יצירתיות!]

כפי שממחישות תגובות אלה, המורה יכול להחליט להעריך את עבודת התלמיד במספר דרכים שונות - להתמקד על מספר השאלות שנוצרו, או על מספר השאלות שנוצרו וניתנות לפיתרון, או על נכונות הפתרונות שהתלמיד כתב, או על שילוב כלשהו של מאפיינים אלה. בחלק הבא אנו מציעים קריטריונים כלליים אחדים שניתן ליישם בהערכת תגובות של תלמידים למטלות של העלאת שאלות.

קריטריונים כלליים להערכה

כפי שמציעות הדוגמאות שלעיל, יש בדרך כלל מספר דרכים להעריך את תגובות התלמידים למטלות של העלאת שאלות. בשל האופי הפתוח של מטלות כאלה, יש לעיתים קרובות שונות רבה בתגובות שהתלמידים מייצרים. למרות שהיבט זה רצוי מנקודת מבט של ההוראה, הרי מנקודת המבט של ההערכה הוא מציב אתגרים. מורים צריכים לקבל החלטות באילו מטלות להשתמש וכיצד להעריך את תגובות התלמידים למטלות כאלה, תוך התחשבות במטרות ההוראה והציפיות, ובמאפיינים המיוחדים של המטלה. אף על פי כן, אנו חושבים שיהיה זה מן המועיל להציב כמה קריטריונים כלליים אותם ניתן ליישם באופן סלקטיבי למרבית המטלות של העלאת שאלות כאשר הן משמשות למטרות הערכה. לתכלית זו אנו מציעים שלושה קריטריונים: כמות, מקוריות ומורכבות.

כמות

המאפיין הכי מובן מאליו, בו ניתן להשתמש כדי להעריך תגובות של תלמידים למטלות העלאת שאלות, הוא מספר התגובות שהתלמיד ייצר. תכונה מהותית של מטלות אלה היא שהן מאפשרות יצירת מספר רב של תגובות נכונות. לכן, אחת הדרכים להבחין בין עבודות של שני תלמידים, או להשוות עבודה של תלמיד בנקודת זמן מסוימת במהלך השנה עם עבודה שעשה מוקדם יותר בשנה, או להשוות את מה שעשה השנה עם מה שעשה בשנה שעברה, היא לספור את מספר התגובות למטלה מסוימת. אם ניתן להבחין בין תגובות נכונות לתגובות לא נכונות, אז יתכן שהמורה יעדיף לספור

ולהשוות רק את התגובות הנכונות. יתר על כן, כפי שניתן לראות במטלה שבאיור 1, המורה יכול לנסח מטלה באופן שמאפשר להבחין בין תגובות נכונות **שונות**.

הקביעה האם שתי תגובות הן שונות הינה לעיתים אתגר עבור מי שנותן ציון על העבודה. עם עושים הערכה לתגובות שונות באותה מטלה אז צריך להבהיר לתלמידים כיצד להחליט אם שתי תגובות הן שונות או שהן אותו דבר. לדוגמה, נניח שתלמיד כתב למטלה שבאיור 2 את שלוש התגובות הבאות:

(א) כמה גולות יש לכולם ביחד? (ב) אם שמים את כל הגולות בערימה אחת גדולה, כמה גולות יהיו שם? (ג) מהו סכום כל המספרים של הגולות? כל תגובה שונה מן האחרות בניסוח המילולי, אבל הרעיון המתמטי המונח ביסודן והפעולה הינם זהים. האם תגובות אלה זהות או שונות? מהו הטעון לקבלתן כזהות? כיצד תוכלו להעביר טעון זה לתלמידים? האם יתכן מצב שבו תרצו להתייחס לתגובות אלה כשונות?

יש החושבים שמניית מספר התגובות של התלמיד לשם הערכת עבודתו היא טריוויאלית. אנו מסכימים שכמות בהחלט אינה הדרך היחידה להעריך תגובות, או שהיא הקריטריון היחיד הראוי לתשומת לב כאשר מעריכים תגובות. אף על פי כן, חשוב להכיר בכך שמספר התגובות יכול להגיד לנו משהו. אחרי הכל, השטף של יצירת תגובות נחשב כבר זמן רב כמדד להרבה תכונות אנושיות בעלות ערך, כולל יצירתיות (Guilford 1967). מעניין לציין שמטלות של העלאת שאלות היו בין סוגי המטלות השכיחות ביותר לצורך זיהוי אנשים יצירתיים (Getzels and Jackson 1962). למעשה, מבחן טורנס לחשיבה יצירתית (Torrance 1966), אשר היה בזמנו כלי הערכה מאוד פופולארי לזיהוי אנשים יצירתיים, כולל בתוכו מספר משימות מתמטיות ולשוניות של העלאת שאלות. הגישות העכשוויות כבר לא מקבלות את התפיסות אודות יצירתיות ואינטליגנציה שהיו ביסוד מבחני היצירתיות של שנות השישים. אף על פי כן, נוכל לשפר את העניין בהעלאת שאלות אם נתחשב במגוון דרכים להערכת יכולת זו. לכן, חשוב שנתייחס לערך הפוטנציאלי של מדידת שטף, על ידי ספירת מספר התשובות (הנכונות) השונות למטלה של העלאת שאלות.

מקוריות

כאשר מטלות של העלאת שאלות ניתנו כחלק ממבחן יצירתיות, מאפיין נוסף שהוערך היה מקוריות התגובות. מאחר שמבחנים אלה ניתנו לכמות גדולה של אנשים, ניתן היה ליצור קבוצה גדולה של תגובות טיפוסיות. כתוצאה מכך ניתן היה להשוות כל תגובה נתונה לקבוצת התגובות הטיפוסיות ולראות אם תגובה זו אינה טיפוסית. בצורה כזו, ניתן לערוך ספירה של התגובות הלא-טיפוסיות, כלומר המקוריות.

למרות שלמורה בכיתה אין בדרך כלל מדגם מוכן של תגובות טיפוסיות, הרי שניתן להתאים את התהליך שתיארנו קודם וליישם אותו כמעט בכל כיתה. לדוגמה, מורה יכול לחפש תגובות יוצאות דופן, שניתנו רק פעם אחת על ידי תלמידו או על ידו. אם מורים אחדים משתמשים באותה מטלה, ניתן לאסוף את כל התגובות שניתנו בכיתות השונות וליצור קבוצה של תגובות טיפוסיות שתסייע בזיהוי התגובות הלא שגרתיות. באותו האופן, מורה שעובד לבד יכול להשתמש באותן מטלות, או במטלות דומות, במשך מספר שנים, ולאסוף את תגובות התלמידים במהלך השנים ליצירת קבוצה של תגובות טיפוסיות.

למרות שלעוסקים במדידת יצירתיות היה עניין מיוחד במקוריות, ברור לנו שלמורה בכיתה, המחפש להעריך את יכולת התלמיד להעלות שאלות, היא לא חייבת להיות בעלת חשיבות קריטית. עם זאת, יהיו מצבים בהם רצוי ומתאים להתייחס למקוריות בהערכת תגובות של תלמידים למטלות של העלאת שאלות.

נפנה כעת את תשומת ליבנו למורכבות השאלה - מאפיין שעשוי להיות בעל עניין לכל המורים המשתמשים במטלות של העלאת שאלות כמרכיב הערכה בכיתה.

מורכבות

ניתן לבחון את מורכבות השאלות שתלמידים מעלים ממספר היבטים שונים. ניתן להתייחס למידת התחכום של היחסים המתמטיים הטבועים בשאלות. לדוגמה, אפשר לטעון ששאלות העוסקות ביחסים בין יותר משתי כמויות הן בדרך כלל, אם כי לא תמיד, מורכבות יותר מאלה שעוסקות רק בשתי כמויות. באופן דומה, ניתן לקבוע ששאלות שעוסקות ביחסים כפליים בין הכמויות, יהיו על פי רוב יותר מתוחכמות משאלות העוסקות ביחסים חיבוריים. היבט נוסף שניתן להתייחס אליו כאשר בודקים מורכבות של העלאת שאלות הוא קושי השאלה. כדי להדגים כיצד ניתן להעריך את המורכבות של תגובות תלמידים למטלת העלאת שאלות, נתמקד על המטלה שמוצגת באיור 4. במטלה זו, תלמידים נדרשים להעלות שלוש שאלות שניתן לענות עליהן על סמך המידע המופיע בסיפור הקצר אודות שלושה אנשים הנוהגים בטיול. מטלה זו שימשה במחקר שערכנו כדי לבדוק את הלמידה והחשיבה המתמטית של תלמידים, וסקימת הניתוח שאנו מציעים כאן עובדה מתוך אותו מחקר שנערך לתלמידים בכיתות הביניים (Silver and Cai 1996).

איור 4: מטלה להערכת מורכבות התגובות של התלמיד

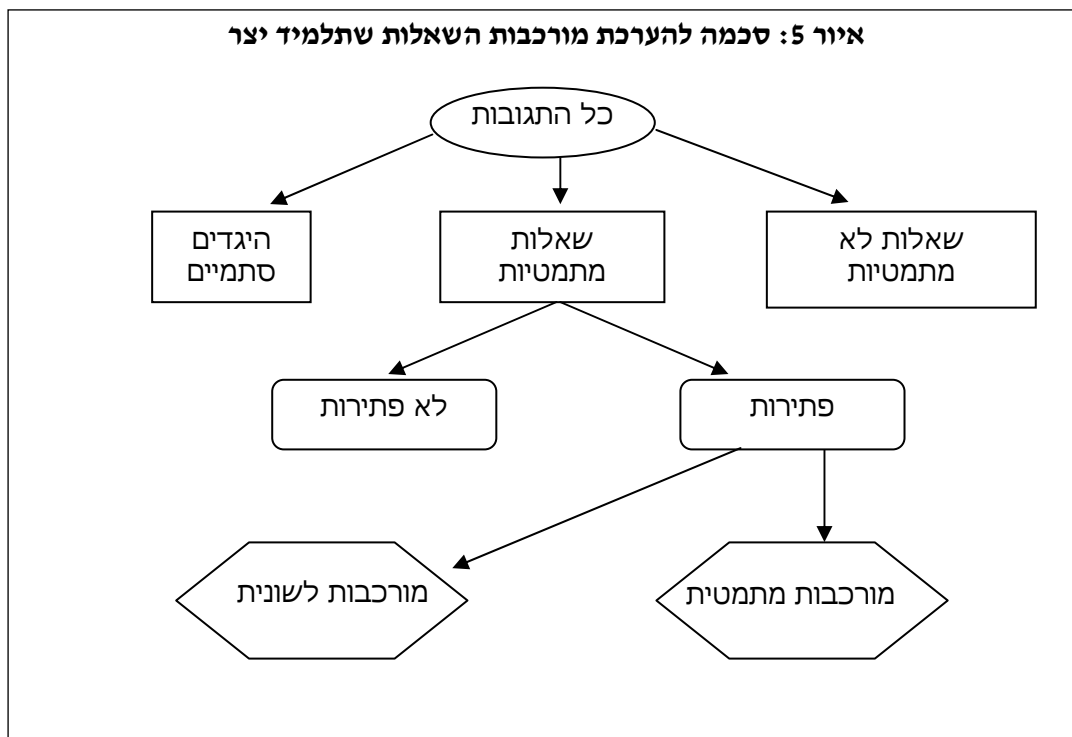
כתבו שלוש שאלות שונות שניתן לענות עליהן על סמך המידע הבא:
ג'רום, אליוט וירתורו התחלקו ביניהם בנהיגה בחזרה הביתה מטיול
שערכו. ארתורו נהג 80 מייל יותר מאליוט. אליוט נהג כמות כפולה של
מיילים יחסית לג'רום. ג'רום נהג 50 מייל.

אחד ההיבטים של מורכבות שאלה שעשוי להיות מעניין הוא מורכבות לשונית. מורה יכול להעריך מורכבות על ידי התמקדות במבנה הלשוני, כמו למשל נוכחות של משפטי חיווי, יחס או תנאי בהיגדים המתמטיים של השאלה. משפט חיווי הינו היגד כמו "כמה מייל הם נהגו בסך הכל?" משפט יחס הינו היגד כמו "כמה מייל ארתורו נהג יותר מג'רום?" משפט תנאי הינו היגד כמו "אם ארתורו נהג 80 מייל יותר מאליוט, כמה מייל ארתורו נהג?"
חוקרים מצאו שמורכבות שאלה קשורה למורכבות לשונית, בכך ששאלות עם משפטי יחס ותנאי, קשות יותר לפתרון עבור תלמידים מאשר שאלות הכוללות רק משפטי חיווי (Mayer 1987; Silver and Cai 1996). לכן, נוכחות משפטי יחס ותנאי יכולה להוות אינדיקציה למורכבות השאלה.

יש לשער כי מורים למתמטיקה ירצו להעריך את המורכבות המתמטית של השאלות שתלמידים מעלים אפילו יותר מאשר את המורכבות הלשונית שלהן. לשם כך, מורים צריכים קודם להחליט אילו תגובות

להעריך. במטלה זו, תלמידים אחדים עשויים להגיב בדרכים שאינן מתאימות לציפיות ושאינן ניתנות בקלות למיון לפי מורכבות. לדוגמה, תלמידים אחדים יציעו היגדים סתמיים (למשל, "שלושה אנשים נהגו במכונית"; ג'רום נהג 50 מייל") ותלמידים אחרים יציעו שאלות לא מתמטיות ("מדוע ג'רום לא נהג יותר מייל?" "לאן הם נסעו לטייל?"). אם מורה רוצה לנתח את המורכבות בשאלות שתלמידים מעלים, אנו מציעים שיוציא את שאלות ההיגדים הסתמיים והשאלות הלא-מתמטיות ויתמקד בשאלות המתמטיות שהתלמידים העלו.

בתוך קבוצת השאלות המתמטיות שתלמידים מעלים, ניתן כעת לזהות את אלה שאינן ניתנות לפיתרון. תלמידים יכולים להעלות שאלות (כמו, "האם ארתורו נהג מהר יותר מג'רום?") בעלות אופי מתמטי, אבל אין בהן מספיק מידע כדי להניב פיתרון מתמטי. השאלה שבדוגמה לא פתירה משום שלא ניתן מידע לגבי מהירויות או זמן. במחקר שערכנו נתקלנו גם בשאלות אחדות ("כמה מייל ג'רום נהג יותר מאליוט?") שאינן אפשרות לפתרון, גם אם מוסיפים מידע, בגלל אילוצי הבעיה. לבסוף, ניתן לבחון את כל השאלות המתמטיות הפתירות על פי המורכבות המתמטית או הלשונית שלהן. **איור 5** מסכם את שלושת הרבדים של הסכמה האנליטית המוצעת.



במחקר הקודם שלנו (Silver and Cai 1996), הראנו כיצד ניתן לבדוק את המורכבות המתמטית של שאלות שתלמידים העלו בתגובה למטלה שהוצגה באיור 4. הגישה שלנו, באותו מחקר, הייתה למיין את השאלות על פי מספר היחסים המבניים שהן הכילו. לשם כך השתמשנו בקטגוריות שפותחו על ידי Marshall (1995). היא הציעה למיין בעיות חשבוניות לחמישה יחסים מבניים סמנטיים בסיסיים: **שינוי** (change); **צרוף** (group); **השוואה** (compare); **השוואה כפלית** (restate) ו- **התאמה כפלית** (vary). אנו קבענו את המורכבות המתמטית של השאלות שהועלו, על ידי בדיקת מספר היחסים המבניים הסמנטיים שהן הכילו. אם ניתן לענות על שאלה מתמטית ישירות מתוך המידע הנתון, החשבנו אותה כשאלה עם 0 יחסים. שאלות שהיו בהן מספר גדול יותר של יחסים סמנטיים נחשבו למורכבות יותר

משאלות שהכילו פחות יחסים סמנטיים. **טבלה 1** מציגה דוגמאות אחדות של שאלות מתמטיות ואת מספר וסוג היחסים הסמנטיים בהתאמה.

טבלה 1: דוגמאות לבעיות מתמטיות ומספר היחסים הסמנטיים בכל אחת מהן	
מס' היחסים	דוגמאות
אפס	האם ארתורו נהג יותר מייל מאשר אליוט? (אין יחסים)
אחד	כמה מייל נהג אליוט? (השוואה כפלית)
שניים	כמה מייל נהג אליוט יותר מאשר ג'רום? (השוואה / השוואה כפלית)
שלושה	כמה מייל נהגו שלושת הבנים בסך הכל? (צרוף / השוואה כפלית / השוואה)
ארבעה	כמה פעמים הם יצטרכו למלא דלק, אם הם ממלאים אחרי כל 60 מייל? (התאמה כפלית / צרוף / השוואה כפלית / השוואה)
חמישה	האם ארתורו נהג זמן רב יותר מאשר הזמן שג'רום ואליוט נהגו ביחד באופן הרגיל? * (השוואה / השוואה / צרוף / השוואה כפלית / התאמה כפלית)

* הערת המתרגמת: יש להניח שהכוונה למהירות קבועה.

סיכום

הערכה היא חלק אינטגרלי של הוראה. מאחר ופעילויות של העלאת שאלות נכללות במידה גוברת והולכת בהוראת המתמטיקה בכיתה, מורים צריכים לתת תשומת לב לסוגיות של הערכה. במאמר זה, השתמשנו בדוגמאות ספציפיות כדי לדון הן בהערכה עם העלאת שאלות והן בהערכה של העלאת שאלות. במיוחד הצענו קריטריונים כלליים להערכה של התגובות שתלמידים מייצרים במונחים של כמות, מקוריות ומורכבות. אנו מקווים שמורים ומורי מורים יוכלו לאמץ את הדוגמאות שהוצגו במאמר, כדי לעסוק בפעילויות של העלאת שאלות לצורכי הוראה והערכה. בנוסף, הקוראים יוכלו לאמץ את הקריטריונים להערכה המוצעים כדי להעריך את השאלות שתלמידים מעלים למצבי שאלה דומים.

ביבליוגרפיה

- Brown, Stephen I., and Marion I. Walter. *Problem Posing: Reflections and Applications*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1990.
- Cai, Jinfa, and Steven Hwang. "Generalized and Generative Thinking in U.S. and Chinese Students' Mathematical Problem Solving and Problem Posing." *Journal of Mathematical Behavior* 21 (2002): 401-21.
- Einstein Albert, and Lawrence Infeld. *The Evolution of Physics*. New York: Simon & Schuster, 1938.
- English, Lyn D. "The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities." *Educational Studies in Mathematics* 34 (1997): 183-217.
- Getzels, James, and Philip W. Jackson. *Creativity and Intelligence: Exploration with Gifted Students*. New York: John Wiley & Sons, 1962.
- Guilford, John. *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- Hadamard, Jacques. *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.
- Hashimoto, Yoshihiko. "Classroom Practice of Problem Solving in Japanese Elementary Schools." In *Proceedings of the U.S.-Japan Seminar on Mathematical Problem Solving*, edited by Jerry Becker and Tatsuro Miwa, pp. 94-119. Carbondale, IL: Southern Illinois University, 1987.
- Healy, Christopher C. *Creating Miracles: A Story of Student Discovery*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1993.
- Keil, Gloria E. "Writing and Solving Original Story Problems as a Means of Improving Verbal Problem Solving Ability." Unpublished doctoral dissertation, Indiana University, 1965.
- Kilpatrick, Jeremy. "Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From?" In *Cognitive Science and Mathematics Education*, edited by Alan Schoenfeld, pp. 123-47. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.
- Marshall, Sandra P. *Schemas in Problem Solving*. New York: Cambridge University Press, 1995.
- Mayer, Richard E. *Educational Psychology: A Cognitive Approach*. Boston: Little, Brown & Co. 1987.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NVTM, 2000.
- _____. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2000.
- Silver, Edward A. "On Mathematical Problem Posing." *For the Learning of Mathematics* 14 (January 1994): 19-28.
- Silver, Edward A., and Jinfa Cai. "An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students." *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (1996): 521-39.
- Silverman, Frederick L., Ken Winograd, and Donna Strohauer. "Student-Generated Story Problems." *Arithmetic Teacher* 39 (December 1992): 6-13.
- Skinner, Penny. *What's Your Problem? Posing and Solving Mathematical Problems, K-2*. Portsmouth, NH: Heinemann, 1991.
- Torrance, Edward P. *Torrance Tests of Creative Thinking: Norms-Technical Manual*. Englewood Cliffs, NJ: Personnel Press, 1966.
- Whitin, David. "Building a Mathematical Community through Problem Posing." In *Perspectives on the Teaching of Mathematics*, edited by Rheta Rubenstein, pp. 129-40. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2004.