

# אחד, כמה, או אף אחד: היופי שבאי הבהירות

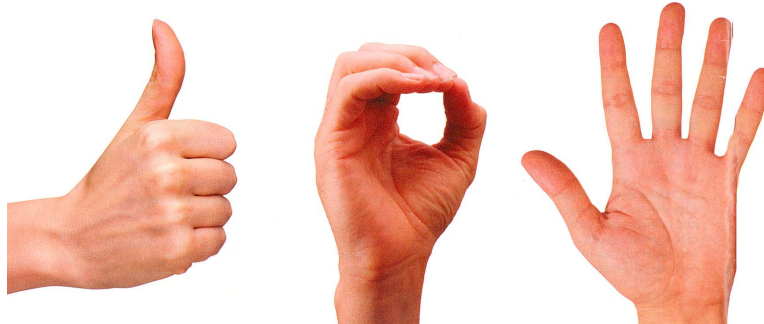
## One, Some, or None: Finding Beauty in Ambiguity

מאת : Robert M. Berkman

Mathematics Teaching in the Middle School, Vol.11 No.7, March. 2006, pp.324-327

תרגום : ברכה סגליס

להלן סצנה משיעור מתמטיקה בכיתה ה': התלמידים עובדים בזוגות ומשוחחים זה עם זה בלהיטות; כמה מהם משרטטים, אחרים מקפלים קשיות ומארגנים אותן על השולחן, עוד אחרים רושמים משהו על הדף. אחרי שתי דקות, אני מצלצל בפעמון ואומר, "או.קי. מתחרים, הגיע הזמן לערוך הצבעה, שימו ידיים מאחורי הגב!" בחדר משתררת שתיקה וכל הידיים מונפות לאחור. "כעת, בחרו!" אני קורא, והידיים מורמות אל-על. תלמידים אחדים מעגלים את אצבעותיהם כדי ליצור "אפס", אחרים זוקפים אגודל. יתר התלמידים מציגים אצבעות פרושות. ברור, שלגבי בעיה מסוימת זו אין הסכמה מוחלטת.



הפעילות בה עוסקים תלמידי נקראת "אחד, כמה או אף אחד". הסימנים של היד, המזכירים את הסימנים בהם נוהגים להשתמש בבורסה, מייצגים את ההצבעה החשאית של דעות התלמידים. הבעיה עליה הם עובדים העוסקת במשולש, מתבססת על שלושה רמזים שנשלפו באופן אקראי מתוך ערימת כרטיסים. הרמזים שהתלמידים קבלו היו:

יש לו בדיוק קו סימטריה אחד

שתיים מזוויותיו שוות

יש לו זווית קהה

ההצבעה השקטה, שבה האגודל הזקוף כלפי מעלה משמעותו "אחד", האצבעות הפרושות מייצגים "כמה", והאצבעות המעוגלות לצורת O משמעותם "אף אחד", עוזרת לי לסקור את מגוון הדעות של הקבוצה. שימוש בטכניקה זו מאפשר לי לסרוק את חדר הכיתה ולבחור תלמידים שיציגו את הצדדים השונים של הדיון שעומד להתרחש. התלמידים עובדים עם מגוון חומרים: חלק חותכים קשיות ומארגנים אותם בצורות שונות של משולשים, אחרים משתמשים בלוח מסמרים וגומיות, ואחדים עורכים שרטוטים בעזרת סרגל, נייר ועיפרון.

הדיון מתחיל. תלמיד אחד מסביר, "ובכן, הסתכלנו על הרמזים וזוהי התמונה היחידה שהצלחנו לקבל" והוא מציג ציור של משולש שווה שוקיים קהה זווית. תלמידה אחרת מצביעה ומוסיפה, "אנחנו לא מסכימים, זה צריך להראות כך" והיא מצביעה על קבוצת קשיות היוצרת משולש קהה זווית שונה צלעות. תלמיד שלישי אומר, "רגע, איך זה יכול להיות? האם למשולש קהה זווית יכולות להיות צלעות שאינן שוות?" התלמידים חולקים ביניהם את הראיות והדיון נע קדימה ואחורה במשך מספר דקות עד שהכיתה מגיעה להסכמה: ישנו רק סוג אחד של משולש - משולש שווה שוקיים קהה זווית - שניתן לבנות על פי שלושת הרמזים האלה. הפעילות שתוארה כאן הוצעה לי על ידי פרופסור אצלו למדתי בברוקלין קולג' לפני שנים רבות. הוא הזכיר פעילות שבה סדרת כרטיסים, המכילים רמזים שונים אודות צורה גיאומטרית, מונחים על השולחן כשפניהם כלפי מטה. הופכים שלושה כרטיסים לפני התלמידים, והם צריכים להחליט האם יש צורה יחידה שניתן לבנות על פי רמזים אלה, האם יש שתי צורות או יותר, או האם קיימת האפשרות שלא ניתן לבנות אף צורה שמספקת את כל הרמזים. המשחק נקרא, בהתאם, "אחד, כמה או אף אחד". אני יודע לזהות רעיון מבריק כשאני נתקל בו, אז טיפלתי בו קצת והתאמתיו אותו למשהו שניתן להפעיל עם כיתה שלמה, על ידי הוספת המרכיב של "הצבעה", כהכנה לדיון הכיתתי. בנוסף, הרחבתי את הפעילות וכללתי בה שברים פשוטים, שברים עשרוניים, כפולות וגורמים על יד הכנת סדרות נפרדות של כרטיסי רמזים. בכל הפיסת כרטיסים יש בין 20 ל-30 רמזים שונים. לדוגמה, הרמזים למספרים יכילו את התאורים הבאים: "יש לו בדיוק 3 גורמים", "גדול מ-10", "אחד הגורמים הוא 5".

## טיפול בחשיבה מתכנסת

המשחק "אחד, כמה או אף אחד" הינו פתרון לסוגיה שאני גורר איתי באופן קבוע כאשר אני מלמד מתמטיקה והיא: כיצד לטפל במשקל היתר שיש לחשיבה מתכנסת ברוב תוכנית הלימודים במתמטיקה. עובדה אומללה היא שמרבית התלמידים מאמינים שהמתמטיקה היא מציאת תשובה נכונה יחידה, על פי רוב תוך מספר דקות. הרעיון שלבעיה יכולים להיות מספר פתרונות, או אף פתרון, זר לתלמידים רבים, ומביא לתגובה מותנית המפחיתה בחשיבותה של ההנמקה. בשנים האחרונות חלה התקדמות רבה לגבי הצגת בעיות שלהן פתרונות רבים, אך הרעיון שלבעיה אין פתרון ידוע, נדיר. המטרה של "אחד, כמה או אף אחד" היתה להציג אלמנטים של אי בהירות מתמטית לתלמידים בכיתות הביניים, בדרך משעשעת ומעניינת תוך חיזוק מושגים שכבר נלמדו או אפילו הצגת מושגים חדשים בתחומים שונים של המתמטיקה. סוג כזה של הנמקה, המשולב עם הוכחה מתמטית, הינו מרכיב חיוני בסטנדרטים למתמטיקה של ה-NCTM. על פי הסטנדרטים להנמקה והוכחה לכיתות ו' - ח', "תלמידי כיתות הביניים יכולים לפתח נימוקים התומכים במסקנות שלהם בנושאים מגוונים, כמו תורת המספרים, תכונות של צורות גיאומטריות, והסתברות" (Principles and Standards for School Mathematics, p.264). על ידי הצגה **אקראית** של סדרת רמזים (או, כפי שנראה בהמשך, על ידי הצגת רמזים **סלקטיבית**), אנו מעודדים את התלמידים לפתח הנמקות לוגיות כדי להגיע למסקנה הנתמכת על ידי כל אחד מן הרמזים בנפרד ולאחר מכן במשותף.

התחלתי את השימוש ב"אחד, כמה או אף אחד" על ידי הכנת סדרת כרטיסים המכילים רמזים אודות משולשים (ראה **איור 1**). הסברתי לתלמידי את חוקי המשחק, והדגשתי שבמתמטיקה – לפעמים יש לשאלה יותר מתשובה אחת, בעוד שבפעמים אחרות אין לה תשובות כלל. הדגמתי את סימני הידיים עבור "אחד", "כמה", ו-"אף אחד", ותרגלתי זאת עם התלמידים. לקח זמן מה להרגיל את התלמידים לרעיון שאיננו מחפשים תשובה ספציפית, אלא "תשובה אודות התשובה", מאחר שהפתרון אינו מתכנס למספר או ל-כן ו-לא. התלמידים היו צריכים לשאול את עצמם, "האם סדרת הרמזים מובילה אותנו ליצירת סוגים שונים של משולשים, או שהם מצביעים על משולש יחיד, או שהם סותרים זה את זה כך שלא ניתן ליצור אף משולש?" גיליתי שעלי לעצור אחרי כל רמז כדי לאפשר לתלמידים לעכל מחשבתית מה שצוין ולמנוע מהם לענות תשובה מוקדם מדי. רק אחרי שהראיתי את כל שלושת הרמזים, הרשתי לתלמידים לגעת בחומרים ולהתמודד עם הפתרון.

**איור 1: רמזים למשולשים לכיתות ד' - ז'**

יש לו זווית ישרה	איו לו זווית ישרה
יש לו זווית חדה	איו לו זווית חדה
יש לו זווית קהה	איו לו זווית קהה
כל הצלעות שוות	יש לו שתי צלעות שוות
איו לו צלעות שוות	יש לו שתי זוויות זהות
כל שלוש הזוויות זהות	איו לו זוויות זהות

הדיון המתמטי המתגלה בפעילות כזו, עשיר מאוד, וממריץ את התלמידים להשתמש בשפה בדרכים מתוחכמות. התבוננו בסדרת הרמזים הבאה:

יש לו שתי צלעות שוות	אין בו אף קו סימטריה	כל הזוויות שוות
----------------------	----------------------	-----------------

תלמידים ציינו שהרמז הראשון מצביע על כך שהמשולש חייב להיות שווה-שוקיים, בעוד שהרמז האחרון מצביע על כך שהוא שווה צלעות, וזה העלה את השאלה האם ניתן לבנות משולש עם שתי צלעות שוות ושלוש הזוויות תהיינה חופפות. תלמיד אחד נאחז בפרט טכני. למרות שהרמזים מציינים שלמשולש צריכות להיות שתי צלעות שוות, הרי שלא נאמר דבר על הצלע השלישית. יתכן שצלע זו יכולה להיות שווה לשתי הצלעות האחרות. לבסוף, הרמז השני יישב את העניין: לא ניתן לצייר משולש ללא קווי סימטריה, אלא אם כן לכל צלע יש אורך שונה. ההצבעה כאן היא "אף אחד", משום שלא ניתן ליצור משולש תוך שימוש בשלושה רמזים אלה. ככל שהמשחק שבה יותר את ליבי, נוכחתי שניתן להשתמש בו לא רק לגיאומטריה. הכנתי סדרה נוספת של כרטיסים שבהם רמזים אודות תכונות של מספרים, ויצאנו לדרך (ראה **איור 2**). מצאתי שפעילות זו שימושית מאוד להצגת מושגים חדשים כמו מספרים ראשוניים ופריקים, כמו גם לסקירת מונחים מתמטיים שנלמדו קודם, כמו **גורמים ומחלקים**. יתר על כן, גיליתי שאני יכול

להציג פעילות זו לפני שאני מתחיל את השיעור היומי<sup>1</sup>. שלושת התלמידים הראשונים בכיתה זוכים לבחור את הרמזים מתוך חפיסת הכרטיסים ולתלות אותם עם אטבים על חוט המתוח לרוחב הלוח. בזמן שבדקתי נוכחות, התלמידים הכינו את הראיות, לאחר מכן ערכנו הצבעה מהירה. לפעמים קיימנו דיון קצר, או שערכתי מיני-מבדק בו בקשתי מהתלמידים לכתוב על דף "אחד", "כמה" או "אף אחד" ולהסביר מדוע בחרו להצביע כך.

איור 2: רמזים אחדים בתחום המספרים לכיתות ד' - ז'	
מספר אי זוגי	מספר זוגי
מספר פריק	מספר ראשוני
יש לו בדיוק 2 גורמים	יש לו יותר מ- 3 גורמים
יש לו יותר מ- 2 גורמים	מספר ריבועי
יש לו בדיוק 3 גורמים	אחד הגורמים שלו הוא 5
יש לו פחות מ- 3 גורמים	אחד הגורמים שלו הוא 3

## שינוי הפעילות

במהלך השנים, מתחתי פעילות זו ממבוא לאלגברה עד לגן הילדים וכיתה א'. עבור תלמידי האלגברה הכנתי רמזים תוך שימוש במשתנים ובסימני אי-שוויון (ראה איור 3), בעוד שילדי הגן וכיתה א' בדקו רמזים אודות בדידים צבעוניים (ראה איור 4). בכל רמת גיל התוכן זהה: סדרת רמזים מוצגת, ניתן זמן לחלוק רעיונות עם בן זוג, עורכים הצבעה, והדיון המסכם סוגר את המשימה.

העידון האחרון שלי לפעילות זו היה לבחור חלק מהרמזים כך שהתוצאות תובלנה לכיוון מסוים. עשיתי זאת משום שהיו פעמים בהם רציתי להציג מילה חדשה, סמל מתמטי, או מושג שאשתמש בו במהלך השיעור של אותו יום. לדוגמה, אחרי שערכנו מספר פעמים פעילויות עם אי-שוויונים  $(> - <)$ , הייתי מגניב פנימה כרטיסים שכללו את הסמל המתמטי ל-" $\geq$ " או ל-" $\leq$ ".

<sup>1</sup> הערת המתרגמת: בדומה לפעילויות לפתיחת שיעור המופיעות באתר של מרכז המורים הארצי.

Translated and reprinted with permission from *Mathematics Teaching in the Middle School*, copyright © 2006 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. [www.nctm.org](http://www.nctm.org). All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

איור 3: רמזים לאלגברה בכיתות ז' - ח'

$$x > 10$$

$$x \geq 12$$

$$-20 \geq x < -12$$

$x$  אינו מספר שלם

$x$  הוא מספר שלם

$x$  הוא מספר שלילי

$$x \geq 3$$

$$5x > 40$$

$$\frac{2}{3}x \geq 9$$

$$0.2x \geq 12$$

$$x < -4 \text{ או } x > 7$$

$$8 \geq x > -8$$

איור 4: רמזים של בדידים צבעוניים לגילאי גן - ב'

לא ניתן לעשותו מבדידים  
אדומים

ניתן לעשותו מבדידים אדומים

אם לוקחים שלושה מהם, זה יוצא  
קצר יותר מבדיד שחור

אם לוקחים שניים מהם, זה יוצא  
ארוך יותר מבדיד כתום

לא ניתן לעשותו ממספר זוגי של  
בדידים לבנים

ניתן לעשותו ממספר זוגי של  
בדידים לבנים

קצר יותר משני בדידים שחורים  
ששמים קצה אל קצה

ניתן לעשותו רק מבדידים ירוקים  
בהירים

ארוך יותר מבדיד צהוב

קצר יותר מבדיד שחור

קצר יותר מבדיד כחול

ארוך יותר מבדיד ירוק בהיר

שיפור נוסף שערכתי לפעילות זו היה לקחת סדרת רמזים ולשאול איזה רמז צריך לשנות או להסיר כדי להביא לתוצאה אחרת.  
חשבו על שלושת הרמזים הבאים שנבחרו באקראי:

המספר גדול מ-10

יש לו בדיוק 3 גורמים

אחד הגורמים שלו הוא 6

תלמידים לעיתים קרובות תוקפים בעיה זו על ידי הכנת רשימה של כל הכפולות של 6: 12, 18, 24, 30 וכך הלאה. אולם, כאשר הם ממשיכים בחקירה, הם נוכחים לדעת שכל כפולה של 6 היא גם כפולה של 2 ושל 3, כך שזה בלתי אפשרי לקבל בדיוק שלושה גורמים. תסריט זה מוביל לפתרון של "אף אחד", משום שאין מספר יחיד שמספק את כל שלושת הרמזים בדיוק. כדי להציע אתגר נוסף, שאלתי את הכיתה איזה רמז צריך לשנות כדי שהפתרון יהיה "כמה". תלמידים אחדים ציינו שנוכל לשנות את הרמז השני מ-"בדיוק" ל-"יותר מ-", וזה יאפשר לנו להשתמש בכל כפולה של 6 הגדולה מ-10. אם היינו רוצים לשנות את התוצאה ל-"אחד", היינו צריכים רק לשנות את הרמז הראשון מ-6 ל-5, כי 25 הוא הכפולה היחידה של 5 הגדולה מ-10 ויש לה בדיוק 3 גורמים. האפשרויות פתוחות לדמיון התלמידים. הזמנה זו להכנסת חידושים מובילה לתסריט שבו תלמידים יכולים לשנות רמזים כדי לקבל פיתרון לפי בחירתם. בווריאציה האחרונה, אני מאפשר לתלמידים להמציא בעיות "אחד, כמה ו-אף אחד", על ידי בקשה מהם לכתוב שלושה רמזים משלהם. לאחר מכן אני מחביא את התשובה וההסבר בגב הכרטיס או מתחת לכרטיס אחר שניתן להפכו. לפעמים אני מבקש בעיה בשברים שתוביל למצב שאין אף פתרון (למשל, "השבר קטן מ-1", "המונה גדול מן המכנה" ו-"השבר מכיל שני מספרים ראשוניים"). היופי שבפעילות זו היא שהמורה יכול לגרום לה להיות מתכנסת או מסתעפת לפי רצונו. הרעיון נשאר זהה, מה שמשתנה מעט הוא התבנית. מה שתמיד הרשים אותי בפעילות "אחד, כמה, או אף אחד" הוא, שהיא גורמת לתלמידים להרגיש בנוח עם הרעיון של אי בהירות. דהיינו, לבעיה במתמטיקה לא חייבת להיות תשובה ברורה. אם התשובה היא "כמה", זה יכול להיות משום שיש בדיוק שתיים או שלוש תשובות, או משום שיש אינסוף תשובות. באותו הזמן, יתכן שיש רק תשובה אחת לסדרת רמזים, אבל יש סיבות רבות לתוצאה זו. עומק השיחות הנובע מפעילות זו מרשים אותי בכל פעם, בין אם הדיון נערך במשך חמש דקות או נמשך במשך שעה כתוצאה מגיוון הנושא. נדיר למצוא פעילות שעובדת בדרכים רבות כל כך מעבר לטווח גילאים כזה רחב.

## ביבליוגרפיה

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM, 2000.