להמריא אל האלגברה מן ההתחלה

A flying start to Algebra

נכתב ע"י : Mollie MacGregor and Kaye Stacey

הופיע ב : Teaching Children Mathematics,Vol. 6, No. 2, October 1999, pp. 78-85

תרגום ע"י : ברכה סגליס

ללימוד האלגברה יש שורשים כבר בכתות הנמוכות, כאשר ילדים מבחינים בחוקיות על פיה נוהגים המספרים. מהתחלה זו הם מפתחים ידע על המאפיינים של מספרים ופעולות, המוכללים מאוחר יותר לאלגברה. במשך מספר שנים ערכנו מחקרים על תלמידי חטיבת הביניים והחטיבה העליונה הלומדים אלגברה (MacGregor & Stacey 1993, 1995, 1997; Stacey & MacGregor 1997a, 1997b).

אחד הממצאים שהינו מעניין במיוחד למורי ביה"ס היסודי הינו החשיבות של הבנת התלמידים את המספרים. תלמידים מתקשים בלימוד האלגברה כאשר הם לוקים בידע של מאפייני מספרים ופעולות פשוטות. על מנת שיצליחו באלגברה הם צריכים ללמוד על ההשפעות הכלליות של הפעולות על המספרים ולא למקד את תשומת לבם רק על מציאת תשובות לחישובים. יתרה על כך, הם צריכים להרגיש נוח כאשר הם עובדים עם מספרים גדולים, שברים פשוטים ועשרוניים, כך שיהיו מסוגלים לזהות מתי הכללה או חוק מתאימים לכל טווח המספרים.

הגילויים של ילדים בדבר האופן שבו מספרים פועלים, מהווים את אבני הבניה של הידע המוכלל על מספרים, אותו מפתחים ומבטאים באלגברה בשנים הבאות.

במאמר זה נראה כיצד העבודה עם מספרים בביה"ס היסודי ניתנת להרחבה על מנת להכין תלמידים ללימודי האלגברה.

אנו מציעים כמה דרכי פעולה מעשיות המתמקדות על חמישה אספקטים של הידע על מספרים שהינו הכרחי ללמוד האלגברה:

- הבנת המשמעות של שוויון
- זיהוי הפעולות
- שמוש בטווח רחב של מספרים
- הבנת התכונות החשובות של המספרים
- תאור דפוסים ופונקציות

מורים יכולים לשלב בנקל אסטרטגיות אלו בתוכנית ההוראה הקיימת. למשל, לעיתים קרובות כדאי להקדיש זמן למשתנים של בעיה אחת, ולעודד את התלמידים לגלות מה קורה כאשר משתמשים במספרים שונים או כאשר מרחיבים את הדפוס של הבעיה.

דרכים רבות נוספות שבהן אפשר להעשיר את תוכנית הלימודים ליסודי על מנת להכין תלמידים לאלגברה, מופיעות במהדורה של חודש פברואר 1997 של עתון זה שהתמקדה בנושא של חשיבה אלגברית.

הבנת יחסים שקולים

הבעיה

שפת החשבון מתמקדת בתשובות. שפת האלגברה מתמקדת ביחסים. למשל, השווה את הביטוי החשבוני $287+146 = 433$ לביטוי אלגברי טיפוסי $2(x+1)=2x+2$. הביטוי החשבוני נותן תשובה והסימן "=" מציין שתשובה זו נמצאה. כאשר ילדים לומדים חשבון הם מפרשים את סימן השוויון כאומר: "מצא את התשובה". למשל, כאשר הם רואים את המשוואה $4+7 =$ ____ , הם כותבים "התשובה היא": 11. הם רואים את הצד השמאלי של המשוואה כשאלה ואת הצד הימני כתשובה, שלפי ניסיונם הינה תמיד מספר יחיד. פרוש זה, אם הוא ממשיך גם בכתות הגבוהות, מהווה מכשול רציני להבנה כיצד פועלים באלגברה.

בביטוי האלגברי $2(x+1)=2x+2$, למרות שתלמידים יכולים לפרש את $2(x+1)$ כשאלה, הרי ש $2x+2$ אינו נראה כמו תשובה. במקום זה יש לנו ביטוי אודות שוויון: שתי הכמויות שוות, וניתן להחליף אחת בשניה אם צריך. תלמידים צריכים ללמוד כיצד לכתוב שוויונים. הם גם צריכים ללמוד ליצור שרשראות של ביטויים לוגיים שקולים, כמו -

אם	$(8x-3):3=2x$
אז	$8x-3=6x$
ולכן	$8x-6x-3=6x-6x$
לכן	$2x-3=0$
לכן	$2x=3$
ולכן	$x=1.5$

תלמידי אלגברה מתחילים מתקשים לעיתים קרובות להתמודד עם צורה זו של חשיבה לוגית. אם כבר ראו והשתמשו בביטויים של שוויון במסגרת לימוד החשבון, זה יהיה להם לעזר.

מה צריכים לעשות המורים כאשר תלמידים משתמשים בסימן השוויון כדי לקשר צעדים בתוך חישוב? כאשר הם רושמים, למשל, $5+23 = 28 \times 3 = 84$, הם רושמים בדיוק מה שהם עושים במחשבונים שלהם. אז איך יכול להיות שזו טעות? המחשבון מפרש את סימן השוויון כ"בצע את הפעולה", אבל במתמטיקה פורמלית סימן זה מקשר בין שני ביטויים שיש להם אותו ערך בדיוק. ישנם מורים שמסבירים את שתי המשמעויות השונות האלה ומבקשים מן התלמידים להשתמש בסימן אחר, אולי סימן שימציאו בעצמם, לקשר צעדים בעבודתם. למשל, הם יכולים להשתמש בסימן של חץ במשמעות של "נותן", ואז הבטוי $5+23 \rightarrow 28 \times 3 \rightarrow 84$, אומר: "5 ועוד 23 נותן 28, שכאשר כופלים אותו ב 3 נותן 84".

הצעות אחדות

- בקשו מילדים לכתוב ביטויים של שוויון שבהם ה"תשובה" מופיעה בהתחלה. למשל, במקום [ ] =5+9, שיכתבו 5+9= [ ].

- השתמשו בלוח מסמרים (geoboard) ובחתיכת חוט באורך 24 יחידות אורך של לוח זה, על מנת ליצור מלבנים שונים. הילדים יראו שלכל המלבנים השונים יש אותו היקף, 24 חידות. יתכן שהם גם יבחינו שלמלבנים השונים שטחים שונים למרות שההיקפים שווים. הדגש העיקרי בפעילות זו הוא ברישום הביטויים השונים של השוויון, למשל:

24 = 2+10+2+10

24 = 4 x 6 = 6+6+6+6 = 12+12

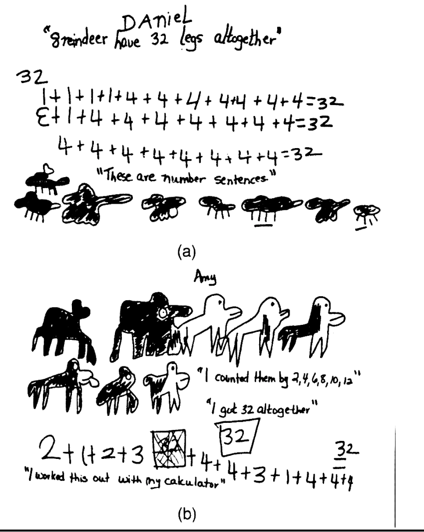
3+9+3+9 = 4+8+4+8

וכן הלאה. על מנת לראות את הסיבות העומדות מאחורי יחסים אלו, יש צורך לעשות הכללה הקשורה בתכונות של מספרים, שהינה אלגבראית במהותה. התיחסות לאורך הקבוע של החוט מסייעת לילדים להבין את השוויון. במאמר של Erna Yackel במהדורה של פברואר 1997 של עתון זה מופיעות פעילויות דומות וכן דיון על חשיבותן לפיתוח חשיבה אלגברית (Yackel 1997). אם רוצים להציע פעילות מאתגרת יותר לתלמידים גדולים, אפשר להחליט שהיחידות של לוח המסמרים תהיינה בעלות ערך שונה מ- 1 . נסו למשל 0.2 או 1/2 .

- בקשו מילדים לכתוב את תשובותיהם בדרכים אלטרנטיביות, למשל, במקום 5+9=14 הם יכולים לרשום 10+4 = 5+9 או 5+9=2x7, וכך הלאה. ילדים יכולים להעריך כבר מגיל צעיר שיש הרבה דרכים בהם אפשר לבטא מספרים. מורים צריכים לעודד אותם להציג הבנה זו. איור 1 מציג את דרכי הפתרון של 2 ילדים בכתה א׳ , דניאל ואיימי, כאשר הכתה נתבקשה לצייר את 8 הצבאים של סנטה קלאוס, למנות את רגליהם, לכתוב ביטוי מספרי המראה כיצד בצעו את המניה ואח״כ לרשום ביטויים מספריים אחרים שיראו דרכים אחרות לבצע את המניה. המשפטים המופיעים באיור 1 נכתבו ע״י המורה בעקבות ההסברים שנתנו הילדים. שימו לב שלמרות שאיימי אמרה שהיא חישבה את הביטוי המספרי בעזרת המחשבון, הרי שתחילה היא גילתה את המספרים ע״י יצירת קבוצות של רגלי הצבאים בדרכים שונות - 1, 2, 3 ו- 4 , מנתה אותם ואח״כ בדקה את התוצאה בעזרת המחשבון.

איור 1

First graders find different ways to count the reindeers' legs.



זיהוי הפעולות

הבעיה

הסטנדרטים לתוכנית הלמודים ולהערכה של מתמטיקה בביה״ס שקבעה המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה (NCTM 1989, 1991) , מציינים שיש לתת לתלמידים בכתות ה-ח את ההזדמנות ״להבין כיצד פעולות החשבון הבסיסיות מתיחסות זו לזו״. הבנה זו מתפתחת לאט ותלויה תחילה בזהוי ארבע הפעולות ובמה הן שונות זו מזו. בעיות רבות שנדרשים לפתור בביה״ס או מחוצה לו, לא מצריכות, לעיתים קרובות, ידיעה באיזה פעולות משתמשים, משום שהן נעשות באופן מנטלי (חישוב בע״פ). בחיי היום יום משתמשים לעיתים קרובות בשיטות המבוססות על מניה, הוספה, הכפלה וחציה. במצבים כאלה שוברים בעיה מורכבת לצעדים קטנים כך שהפתרון הופך להיות אוסף של חישובים פשוטים.

לעומת זאת, כאשר משתמשים באלגברה לשם פתרון בעיה, הדגש איננו על קבלת תשובה מספרית בכל צעד של הפתרון אלא על הפעולה שבה משתמשים. יחסים ופרוצדורות צריכים להיות מזוהים ומבוטאים בצורה מפורשת. לכן חשוב שתלמידים ירכשו נסיון בזהוי הפעולה שבה הם משתמשים לצורך פתרון בעיה. כפי שמצוין בסטנדרטים שהוזכרו לעיל (עמ׳ 42): ״יש לשים דגש על יצירת קשרים בין מבנים של בעיות לבין הפעולות המתאימות, אצל ילדי כתות א׳ - ד׳, הן לגבי בעיות חד-שלביות והן לגבי בעיות דו-שלביות״.

אחד המכשולים ללימוד האלגברה בכתות חטיבת הבינים הינו ההבנה המוגבלת של כפל ושל חילוק. תלמידים המתיחסים לכפל רק כחיבור חוזר, מסוגלים לחשוב על 3x4 כ 4+4+4 , אבל לא מסוגלים להבין את המשמעות של mx4 משום שלא נאמר כמה פעמים צריך לחבר 4. באותו האופן יש להבין את החילוק כפעולה שעומדת בזכות עצמה, ולא רק בהתיחסות לחיסור חוזר. ניתן לתת לתלמידים בעיות שיצעידו אותם קדימה, מעבר לשמוש בשיטות פרימיטיביות המבוססות על מניה, חיבור וחיסור. הם צריכים להכיר האת המושגים של כפל ושל חילוק אותם יצטרכו בשביל אלגברה.

הצעות אחדות

- איור 2 מראה 4 דרכים לפתרון בעית הכלובים, כל שיטה מבוססת על אחת מארבע פעולות החשבון. ילדים צריכים להבין את כל השיטות הללו. חשוב שהם ישתמשו בשיטות אלו במגוון של קונטקסטים וילמדו לבחור בשיטה המתאימה ביותר למצב מסוים. כאשר משתמשים בערכים מספריים, ניתן להפעיל כל אחת מן הפעולות, חיבור, חיסור, כפל וחילוק. מבחינה אלגברית רק פעולה אחת מתאימה - פעולת החילוק. אם הבעיה מתיחסת ל N צפורים, x לכל כלוב, אזי מספר הכלובים הוא N/x.

איור 2

"כלובים": בעיה הניתנת לפתרון באמצעות הפעולות - חיבור, חיסור, כפל וחילוק.

ג'וני צריך כלובים חדשים ל 96 התוכים שלו. הוא מתכנן לשים 6 תוכים בכל כלוב. כמה כלובים הוא צריך?

1. חיבור חוזר (בעזרת מחשבון):

$\boxed{6}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

הוספתי 6 שש עשרה פעמים.

2. חיסור חוזר (בעזרת מחשבון):

$\boxed{96}\ \boxed{-}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$

החסרתי 6 שש עשרה פעמים.

3. נסויים בכפל וחיבור (חישובים מנטליים): אני יודע ש 10 פעמים 6 הם 60 וש 5 פעמים 6 הם 30, 60+30=90, זה 15 כלובים. זה כמעט מספיק. צריך עוד כלוב אחד. ביחד זה יוצא 16 כלובים.

4. חילוק (בעזרת מחשבון):

$\boxed{96}\ \boxed{:}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{16}$

התשובה היא 16.

➢ על מנת לפתור את בעית הצפורים הנודדות (איור 3), ילדים יבחינו שאת הבעיה הראשונה ניתן לפתור בקלות ללא מחשבה על חילוק, אבל בשביל לפתור את הבעיה השניה, חילוק מהיר הינו מהיר יותר מחיבור חוזר או חיסור חוזר. בשתי הבעיות יש להשתמש בכפל לצורך בדיקת התשובה.

איור 3

"צפורים נודדות": שתי בעיות בחילוק

. בכל שנה כאשר מזג האויר בחצי הכדור הצפוני מתחיל להיות קר יותר, עוזבות צפורים מסוימות את אלסקה ועפות לאוסטרליה. יש להן דרך ארוכה לנדוד, כ12,000- קילומטר. אם נניח שהן עפות 300 ק"מ ביום, כמה זמן יארך מסע הנדידה שלהן.

חישוב בעל-פה של פעולות כפל והכפלה: ביום אחד הן עפות 300 ק"מ, אז ב10- ימים הן עפות 3,000 ק"מ. בהכפלה של מרחק זה מקבלים 20 ימים, 6,000 ק"מ. בהכפלה נוספת מקבלים 40 ימים, 12,000 ק"מ.

חישוב בעל-פה או שימוש במחשבון של פעולת חילוק: חלק 12,000 ב300-. 12,000: 300=40.

2. חלק מן הציפורים הנודדות מאלסקה לאוסטרליה בוחרות במסלול ארוך יותר, כ13,500- ק"מ. אם נניח שצפורים אלו עפות 230 ק"מ ביום, כמה ימים יארך המסע שלהן?

5 Translated and reprinted with permission from *Teaching children mathematics*,

שמוש בטווח רחב של מספרים

הבעיה

ישנם תלמידים המגיעים לחטיבת הבינים עם נסיון מועט ביותר במספרים השונים ממספרים שלמים קטנים. הם אינם בטוחים אם הפרוצדורות שלמדו להפעיל על מספרים אלו מתאימות גם למספרים גדולים, מספרים עשרוניים ושברים פשוטים. אי ודאות זו אינה מפתיעה, משום שתלמידים לומדים לבצע חישובים בכתב באופן שונה לכל סוג מספרים. למשל, חיבור שברים פשוטים שונה מחיבור שברים עשרוניים=, כפי שניתן לראות בדוגמאות הבאות:

שברים פשוטים:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$$

שברים עשרוניים:

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ +\ \underline{0.50} \\ 1.25 \end{array}$$

כאשר שוחחנו עם תלמידים בגיל 14, התברר שהם ציפו ששאלות המכילות מספרים עשרוניים תהיינה הרבה יותר קשות משאלות במספרים שלמים, או שהן דורשות שמוש בחוקים שונים. בקשנו מהם לתרגם כמה היגדים לשפה אלגברית. אחד ההיגדים היה:

אם מכפילים את Y ב- 8 התוצאה היא 24.

היגד אחר היה:

3 פעמים Y שווה ל 0.051

תלמידים אמרו שהשאלה הראשונה קלה. הם כתבו משוואות נכונות ללא הסוס, כמו 8xY=24 או 8Y=24. יחד עם זאת חלק מהם היו מוטרדים בקשר לשאלה השניה. תרגום היגד זה לשפה אלגברית ארך זמן רב יותר, למרות שלשניהם אותו מבנה, 3xY=0.051, או 3Y=0.051. תלמידים אחדים אמרו שאין להם שום מושג מה צריך לעשות. מריה אמרה מיד: "אני לא טובה בעשרוניים". לארי התבונן בשאלה ואמר: "המספר ההוא! אני לא אוהב את המספרים ההם, העשרוניים". בן אמר: "אני לא חושב שאני יודע איך לעשות את זה".

תלמידים כמו מריה לארי ובן צריכים לדעת שהפעולות שהם מבצעים על מספרים שלמים קטנים, עובדות בכל סוגי המספרים. לרוע המזל אחדים מהמורים ורוב ספרי הלימוד, נוטים להגביל את התנסויותיהם של התלמידים לשמוש במספרים שלמים קטנים במקום להשתמש בטווח רחב של מספרים. ניתן היה להצדיק גישה זו בעבר, בגלל הקושי לבצע חישובים מסוימים בעזרת ניר ועפרון. כיום, לעומת זאת, כשלתלמידים יש נגישות למחשבי כיס, אין סיבה מוצדקת להגביל את טווח המספרים שתלמידים משתמשים בהם.

הצעות אחדות

- השתמשו במספרים גדולים בבעיות. למשל, עברו מבעיות כמו: "3 אנשים חלקו ביניהם 15 תפוחים" לבעיות כמו: "3 אנשים חלקו ביניהם 42 שקלים". והלאה ל: "3 תרנגולות שוקלות 2710 גרם" ול: "400 צפרדעים אוכלות 90,000 זבובים". משתנים של אותה בעיה יסייעו לילדים להבחין בכך שבכולם נדרשת אותה פעולה, ללא קשר לגודלם של המספרים. השתמשו במחשבונים כדי שתשומת לב התלמידים תתמקד בפעולה ולא במספרים.
- סדרות מספרים יכולות לעזור לפיתוח רעיונות על מספרים עשרוניים (ראו איור 4). לעיתים קרובות מגבילים פעילות למספרים שלמים. ניתן לחקור חוקיות המתאימה למספרים שלמים ולבדוק האם היא עובדת גם במספרים עשרוניים, שברים פשוטים ומספרים שליליים.

איור 4

הרחבת דפוס של מספרים כדי לכלול בו מס' עשרוניים

השתמשו במחשבון ומצאו את המספר המתקבל כאשר הכלל הוא "חלקו ב-10"

המספר שמוכנס למחשבון	המספר שמתקבל
50,000	----
5,000	----
500	----
50	5
5	0.5
0.5	----
0.05	----
0.005	----

לפעמים מופיעות סיבות מעניינות מדוע החוקיות לא עובדת במספרים כאלה. דוגמא אחת, של תלמיד הרואה את החוקיות כ"הוספת 0" במקום הכפלה ב- 10, מופיעה בהמשך המאמר. דוגמא מעניינת אחרת ניתן למצוא במאמר "החוקיות של ליז" (Land and Becher 1997) במהדורה המוקדשת לחשיבה אלגברית של העתון Teaching Children Mathematics.

- נצלו הזדמנויות לעשות הכללות של רעיונות מתמטיים מעבר למספרים שלמים. עיינו בעתון שהזכרנו קודם בתאור של Lubinski and Otto על הרחבה שעשה תלמיד כתה א' ממספרים שלמים לחצאים ורבעים של העקרון המתמטי שהופיע בספור על חלוקת עוגיות. ככל שילדי הכתה המשיכו לעבוד על הסיטואציה של חלוקת 24 עוגיות בין יותר ויותר ילדים, הם התחילו להבין את היחס הכפלי ההפוך המקשר בין שני המשתנים - מספר הילדים ומספר העוגיות, או חלקי עוגיה, שכל ילד יכול לקבל. שאלות המורה מיקדו את התלמידים ביחסים שבין המספרים ולא רק במספרים עצמם.

הבנת תכונות של מספרים

הבעיה

אחת הפעולות האלגבריות הנפוצות ביותר הינה כתיבת הביטויים בדרך אחרת, למשל:

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

על מנת להבין מה קורה פה, צריכים התלמידים להבין כיצד פועל החיסור. אם הם שוכחים את החוקים של פעולות עם ביטויים אלגבריים, הם צריכים להיות מסוגלים לחזור לחשבון ולראות מה קורה במקרים ספציפיים כאשר משתמשים במספרים במקום באותיות. עם זאת, לעתים קרובות, הידע שיש לתלמידים על תכונות המספר אינו חזק דיו. ילדים צריכים לחזק את הידע האינטואיטיבי שלהם על תכונות המספר כך שידעו, למשל, "אם מפחיתים 1 פחות, אז התשובה תהיה 1 יותר". הם צריכים להיות בטוחים, מבלי לבדוק במחשבון, ש-

$$3037 - (258 - 1) = (3037 - 258) + 1$$

כך שיהיו מסוגלים בהמשך לעשות הכללה לבטוי האלגברי

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

פעילויות מן הסוג המופיע באיור 5 מסייעות לפיתוח ידע כזה.

ילדים בעלי הבנה חלשה של תכונות המספר לא חושבים בדרך כלל על ההשפעות של ארגון וסידור המספרים בדרכים שונות. אפילו בגיל חטיבת הביניים, ישנם ילדים שאינם מודעים לחשיבות של אופן הארגון של המספר או לסדר הפעולות בתרגיל. למשל, תלמידים בגיל 14 שנתבקשו לחשב את התרגיל $3 + 9 \times 5 \times 3$: הגיעו לשלוש תשובות שונות. בעיות מן הסוג המופיע באיור 6 יכולות לסייע לתלמידים להבין את החשיבות של ארגון וסדור המספר בדרכים שונות וכיצד הסוגריים משמשים להראות איזה פירוש יש לתת לסדר המספרים בתרגיל.

איור 5

פיתוח בטחון בהבנת תכונות המספר: כאשר מחסירים יותר מקבלים פחות

פתרו את תרגיל החיסור הבא. העזרו במחשבון אם יש צורך.

$$\begin{array}{r} 3037 \\ - \\ \underline{258} \end{array}$$

כעת כתבו את התשובות לתרגילי החיסור הבאים, מבלי לחשב אותם. הסבירו כיצד ידעתם בכל תרגיל שהתשובה נכונה.

$$\begin{array}{r} 3037 \\ - \\ \underline{288} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3037 \\ - \\ \underline{158} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3037 \\ - \\ \underline{358} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3037 \\ - \\ \underline{268} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3037 \\ - \\ \underline{257} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3037 \\ - \\ \underline{259} \end{array}$$

פתרו את תרגיל החיסור הבא.

$$\begin{array}{r} 6214 \\ - \\ \underline{1989} \end{array}$$

איור 6

שלוש תשובות לבעיה אחת: ארגון וסידור המספרים בדרכים שונות

קלרה, דן ואלה פתרו את הבעיה הבאה: מה התשובה שמקבלים אם מתחילים ב-3,
מכפילים ב-5, מוסיפים 9 ומחלקים ב-3. הם רשמו את הבעיה כך: $3 \times 5 + 9 : 3$ אך קבלו תשובות שונות.

קלרה אמרה: "אני יודעת ש 3×5 זה 15, ואני יודעת ש $9 : 3$ זה 3, אז זה 15 ועוד 3. התשובה היא 18".

דן אמר: "לא, זה לא נכון. יש 3 בהתחלה ו-3 בסוף. השלוש של ההתחלה מבטל את השלוש של הסוף, ונשאר 9+5 שזה 14".

אלה אמרה: "אני חושבת שהתשובה היא 8 מפני שצריך לעשות את זה לפי הסדר. 3 פעמים 5 זה 15, אח"כ מוסיפים 9 ומקבלים 24 ואח"כ מחלקים ב-3 ומקבלים 8".

האם קלרה צודקת? האם דן צודק? האם אלה צודקת?

האם תוכלו לשנות את התשובה של התרגילים הבאים, כאשר תוסיפו סוגריים לחלק מן התרגיל?

(א) $6 \times 12 \times 3$ (ב) $6 \times 12 : 3$ (ג) $6 \times 12 - 3$ (ד) $6 \times 12 + 3$

נסו קבוצות אחרות של שלושה מספרים. האם הבחנתם במשהו? מה קורה כאשר משתמשים בשברים?

נסו: $3 \times \frac{1}{3} \times 6$ וגם $3 + \frac{1}{3} \times 6$

תאור דפוסים ופונקציות

הבעיה

כאשר עבדנו עם תלמידים בחטיבת הבינים, מצאנו שלעתים קרובות היחסים שהם רואים בסדרות מספרים הינם תקפים אבל לא ניתנים לבטוי בסמלים מתמטיים. למשל, לגבי הטבלה הבאה:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	9	19	29	39	49	59	69	79

ישנם תלמידים ששמו לב לחוקיות שבכל שורה: "X עולה באחדות ו-Y עולה בעשרות". תלמידים אחדים אמרו ש: "Y עולה ב-9", כלומר הם ספרו כמה מספרים חסרים בין המספרים 9 ו-19. כמה תלמידים הבחינו ש-Y גדל בקצב מהיר יותר מ-X: "לכל X יש 10 Y". תלמידים אחרים הבחינו בקשר שבין כל X ל-Y שמימינו: "ה-X אומר לנו מה תהיה ספרת העשרות ב-Y שאחריו". כמה

תלמידים מצאו חוקים המקשרים בין X ל-Y: "כדי לחשב את Y, הוסף 0 ל-X והורד 1". או "הורד 1 מ-X, וכתוב אחריו 9". אף אחד מתיאורים אלו לא מתאים לכתיבה אלגברית, למרות שהתלמידים יכלו להיעזר בהם על מנת להמשיך את הטבלה.
צריך לתת לתלמידים הזדמנויות לשוחח על הדפוסים שהם רואים ועל הדרכים שבהן ניתן לתאר אותם בשפה מתמטית. התלמיד שאמר: "הוסף 0 ל-X" צריך לדעת שהפעולה המתאימה לכך היא "כפול את X ב-10". התלמידים שחשבו שההפרש בין 9 ל-19 הוא 9, משום שספרו את 9 המספרים שחסרים ביניהם, צריכים לפתח את הבנתם לגבי המושג "ההבדל בין 2 מספרים" במונחים של חיבור וחיסור ולא לבצע מניה פשוטה.

כמה הצעות:

- אפשרו לילדים להכיר דרכים מגוונות שבהן ניתן לבטא יחסים בין מספרים. למשל, אם A=30 ו- B=15, נוכל לומר ש"A הוא פעמיים B", "B הוא חצי של A", "אם כופלים את B ב-2 מקבלים את A", "A הוא 15 יותר מ-B", "B הוא 15 פחות מ-A" ו-"המרחק (או ההפרש) בין A ל-B הוא 15". ילדים צריכים לשמוע את כל הדרכים הללו לבטא את היחס הנ"ל, מפי המורה או מפי עמיתיהם בכיתה, הם צריכים לבטא זאת בעצמם ולדעת כיצד ניתן לשנות צורת בטוי אחת לשניה.
- עודדו תלמידים להבחין ביחס שבין איבר אחד למשנהו ובחוקיות של סדרה כמו - 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3. בנוסף לידיעה ש"צריך להוסיף בכל פעם 3", הם צריכים לראות את הדפוס 1x3, 2x3, 3x3, 4x3 ולהבחין שהפעולה הינה "לכפול ב-3".
- עודדו תלמידים לחפש חוקיות ביחסים שבין שני משתנים במקום לחפש רק שינויים באחד המשתנים. למשל, השתמשו בטבלאות המראות קשר בין מספרים שאינם מסודרים כסידרה חשבונית. דוגמא לכך מופיעה באיור 7. ראו גם אצל Willoughby (1997) גישה מדורגת למושג הפונקציה לאורך כתות הלימוד.

איור 7

"מהו החוק? - תיאור קשר של פונקציה כחוק כללי"

המספר הנכנס	2	7	9	5	10	6	20	100
המספר היוצא	6	11	13	9	14	-	-	-

מהו החוק המקשר בין המספר הנכנס למספר היוצא? השתמש בחוק זה למציאת המספרים החסרים בשורת המספרים היוצאים. מה יהיו המספרים היוצאים של המספרים הנכנסים הבאים: 2.5? 0.7? 3999?

סיכום

אלגברה הינה אותו חלק בשפה המתמטית שתוכנן במטרה לבטא יחסים כלליים בין מספרים. על מנת ללמוד אלגברה, תלמידים צריכים שיהיה להם ידע על מספרים שהינו יותר מהיכולת לעשות חישובים ומיומנויות בסיסיות. באופן ספציפי, הם צריכים להבין תכונות כלליות הן של המספרים והן של הפעולות המקשרות ביניהן. הפעילויות המתוארות במאמר זה מציעות למורים רעיונות המאפשרים לתת לתלמידים להמריא אל האלגברה מן ההתחלה.

ביבליוגרפיה

Land, Jill, E., and Paul G. Becher. "Liz's Pattern". Teaching Children Mathematics 3 (February 1997): 301-304.

Lubinski, Cheryl A., and Alberto D. Otto. "Literature and Algebraic Reasoning". Teaching Children Mathematics 3 (February 1997): 290-295.

MacGregor, Mollie, and Kaye Stacey. "What is x?". Australian Mathematics Teacher 49 (4) (1993): 28-30.

_______,"Backtracking, Brackets, BOMDAS and BOMDAS". Australian Mathematics Teacher 51(3): 28-31.

_______,"Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15". Educational Studies in Mathematics 33 (1997): 1-19.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va: NCTM 1989.

Stacey ,Kaye, and Mollie MacGregor. "Building Foundations for Algebra". Mathematics Teaching in the Middle School 2 (February 1997a): 252-260.

_______,"Ideas about Symbolism that students bring to Algebra". Mathematics Teacher 90 (February 1997b): 110-113.

Willoughby, Stephen A.: Functions from Kindergarten though Sixth Grade." Teaching Children Mathematics 3 (February 1997): 314-318.

Yackel , Erna."A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades." Teaching Children Mathematics 3 (February 1997): 276-280.