מספרים רציונאליים במשמעות של מנה ומדידה

Quotient and Measurement Interpretations of Rational Numbers

מאת: Alfinio Flores, Jeffrey Samson, and H. Bahadir Yanik

הופיע ב: Teaching Children Mathematics , Vol. 13 No. 1, Aug. 2006, pp. 34-39

תרגום: ברכה סגליס

הוראה של מושגים הקשורים למספרים רציונאליים הינה משימה לא קלה עבור מרבית המורים. על פי המבחנים הארציים בארה"ב, לתלמידים רבים יש הבנה דלה של המספרים הרציונאליים. לדוגמה, במבחן של NAEP שנערך ב- 1996, רק 50% מתלמידי כיתה ד' ענו נכון על השאלה כמה רבעים יש בשלם, רק 45% ידעו לזהות תרשים של שני שברים שקולים, רק 21% ידעו להשוות בין שברים, ורק 10% יכלו להראות כיצד ניתן לחלק 3 צורות (Arbaugh et al. 2004; Wearne and Kouba 2000).

המודל השכיח ביותר להוראת שברים הוא של היחס חלק-שלם. בגישה זו, מחלקים עצם או קבוצה לחלקים שווים בגודלם, ומשווים חלקים אלה אל היחידה השלמה. חלק מהרעיונות החשובים של מודל זה הם ההבנה שחלקי השבר שווים בגודלם, והבנת הסימונים המתאימים (לדוגמה, מכנה ומונה). לעיתים קרובות הוראת שברים מתבססת אך ורק על הבנת השבר כחלק משלם. עם זאת, מחקרים מראים שפירוש זה אינו מהווה בסיס מספק למערכת המספרים הרציונאליים (Lamon 2001). מספרים רציונאליים הם מורכבים מאוד, והוראה של מודל החלק משלם בלבד, אינה יוצרת הבנה מספקת.

בנוסף למשמעות של חלק משלם, ניתן לפרש מספרים רציונאליים בדרכים אחרות. שבע פיצות המחולקות בין ארבעה אנשים (7 : 4) הוא דוגמה להקשר של מנה - כלומר, השבר הוא מנה של מספרים המבוטאת כ- 7/4. שבעה רבעים של כוס קמח הוא דוגמה למשמעות של מידה. קביעה שיש בבתי הספר במחוז, 7 מורות על כל 4 מורים, היא דוגמה ליחס או פרופורציה. חשיבה על 7/4 כהקטנה פי 4 ואחריה הגדלה פי 7 , היא דוגמה לאופרטור, או לקשר של פונקציה. תלמידים העובדים עם משמעויות אלה של המספרים הרציונאליים ומקבלים זמן לחקור את כולן, יפתחו בסיס ידע מובנה ושימושי למספרים רציונאליים, יותר מתלמידים העוסקים כל הזמן רק במודל של חלק משלם.

במאמר זה אנו מציעים מספר רעיונות להוראת משמעויות נוספות של שברים: מנה ומדידה. כמו בכל שאר המשמעויות של מספרים רציונאליים, תלמידים לומדים על המשמעויות של מנה ומדידה טוב יותר כאשר הם פועלים עפ"י העקרונות הבאים המבוססים על מחקר וניסיון (Cramer et al. 1997, p.2):

תלמידים לומדים הכי טוב דרך מעורבות פעילה עם מודלים קונקרטיים מרובים;

א. עזרי למידה פיזיים הם רק מרכיב אחד ברכישת המושגים. חשוב גם להביא ייצוגים מילוליים, מצוירים, סימבוליים, ומחיי היומיום;

ב. תלמידים צריכים לקבל הזדמנויות לשוחח זה עם זה ועם המורה אודות רעיונות מתמטיים;

ג. תוכנית הלימודים צריכה להתמקד בפיתוח ידע מושגי לפני העבודה הפורמלית עם סמלים ואלגוריתמים.

מספרים רציונאליים במשמעות של מנה

בניית בסיס להבנה מוצקה של מספרים רציונאליים במשמעות של מנה מתחילה בכיתות הנמוכות (Lamon 1999). הבנת השבר כמנה מבוססת על הרעיון שניתן להסתכל על שבר כתוצאה של פעולת חילוק. לדוגמה, אם מחלקים שלושה תפוחים בין ששה אנשים, כל אחד מקבל 3/6 של תפוח. גם בהקשר של השבר וגם בזה של החילוק משתמשים באותם סימנים. לעיתים קרובות משתמשים בקו נטוי (/) כדי לייצג שברים, ובמחשבונים אחדים הוא משמש לייצוג מקש החילוק. עם זאת, אל לנו להניח שילדים יבחינו מיד שהם יכולים לעבור מהקשר אחד לשני. חלק מהתלמידים מופתעים לגלות שהתוצאה של ביטוי חילוק כמו 4 **:** 7 הוא שבר 7/4 שבו מופיעות אותן ספרות, אחת כמונה ואחת כמכנה (Flores and Klein 2005). תלמידים אחדים יתנגדו לשימוש בשברים בהקשר של חילוק (Toluk 2001), במיוחד אם הם למדו חילוק בהקשרים בהם חילוק היחידה אינו הגיוני. לדוגמה, 3/4 של גולה איננו תשובה מעשית במיוחד. Behr ואחרים (1992) טוענים שכדי שתלמידים יקבלו תמונה מלאה של המספר הרציונאלי במשמעות של מנה, הם צריכים להתייחס גם לעצמים רציפים וגם לעצמים בדידים, ולדרכים שונות אפשריות ליצירת יחידות עבור המונה והמכנה.

פעילויות של חלוקה הן התחלה טובה להבנת מספרים רציונאליים במשמעות של מנה. פעילויות בהן התלמידים ממציאים אסטרטגיות ליצירת מנות שוות, יכולות במיוחד לעזור להם לפתח חשיבה גמישה (Empson 2002). עם זאת, המשמעות של מושג החלוקה שונה מעט מהפירוש שלו במצבים של חלק שלם, בכך שהמשמעות של מנה מקורבת מאוד למאפיינים של חילוק (de Silva 2001). במשמעות של מנה, המחולק והמחלק מייצגים לרוב דברים שונים (למשל 7 פיצות המחולקות בין 4 אנשים). Lamon (1999) מציעה לשאול שאלות המדגישות את ההיבט של המנה, כמו, "כמה הם **מנה אחת**?" או "כמה מקבל **אדם אחד**?" כדי להדגיש את יחסי החלק - שלם ניתן לשאול, "איזה חלק מהפיצה יקבל כל אחד?"

חלוקה (partitioning) כוללת שני סוגים של חילוק: חילוק לחלקים (למס' משתתפים מסוים) וחילוק להכלה (למנות בגודל מסוים). חילוק לחלקים עוסק במצבים של חלוקה שווה. לדוגמה, בביטוי החילוק

4 **:** 7, המחולק 7 מייצג את גודל הכמות (היחידה) והמחלק 4 מייצג את מספר הקבוצות או החלקים. השבר 7/4 מייצג את הגודל של כל חלק. בחילוק להכלה, המחלק מייצג את הכמות שבכל קבוצה, כלומר את גודל יחידת המדידה. תלמידים אינם מתבקשים לפתור בעיות של חילוק להכלה

באותה שכיחות שהם מקבלים בעיות של חילוק לחלקים (Lamon 1999). דוגמה לבעיה של חילוק להכלה היא זו:

אם לצורך הכנת חבילה של עוגיות נדרשות 6 אונקיות של חמאה, כמה חבילות ניתן להכין מ- 3 אונקיות של חמאה?

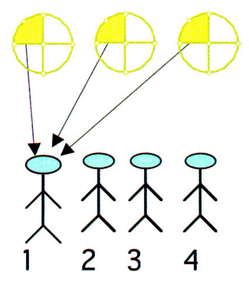
אחת הבעיות בהוראת חילוק היא שלא כל התלמידים יבחינו בהבדל בין בעיות של חילוק לחלקים לבעיות של חילוק להכלה. אם הם אינם מבחינים בכך, המורים צריכים לשקול מתי להסב את תשומת ליבם לכך. בבעיית חבילת העוגיות, המחלק הוא 6 והמחולק הוא 3.

על פי Behr ואחרים (1992), המודל של חילוק לחלקים נותן שני סוגים של מספרים רציונאליים. סוג אחד קשור ליחידה בודדת, ואילו השני קשור ליחידות מורכבות. חשבו על הדוגמה הבאה:

ארבעה אנשים רוצים לחלק ביניהם 3 פיצות. כיצד ניתן לחלק את הפיצות כך שכל אחד יקבל אותה כמות?

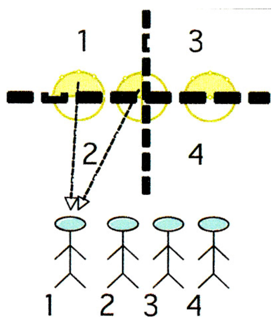
בגישה הראשונה, היחידה הבודדת היא פיצה שלמה אחת. במצב זה, כל אחד מקבל רבע מכל פיצה (ובסה״כ שלושה רבעים) (**איור 1**). בגישה השנייה, היחידה המורכבת היא שלוש הפיצות. במצב זה, כל אחד מקבל 1/4 מכל הפיצה (המורכבת משלוש יחידות) (**איור 2**). יש מספר דרכים לייצג את החלקים השווים שכל אחד מקבל, אבל בסופו של דבר כל אחד מארבעת האנשים מקבל אותה כמות של פיצה.

איור 1: שלוש פעמים רבע כאשר היחידה הבודדת היא הפיצה השלמה



כל אחד מקבל 1/4 של כל אחת מ- 3 הפיצות, או בסה"כ ארוחה של 1/4+1/4+1/4=3/4 פיצה.

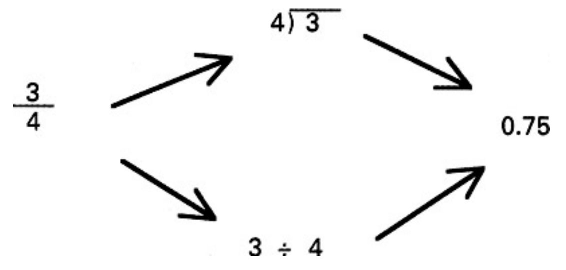
איור 2: רבע של 3 כאשר היחידה המורכבת היא 3 פיצות



כל אחת מהכמויות המופרדות על ידי הקווים המקווקווים היא 1/4 מ- 3 הפיצות המקוריות. כל אחד מקבל 1/2 של פיצה אחת ו- 1/4 של פיצה נוספת, שזה בסה"כ 1/4+1/2=3/4.

המשמעות של מנה חשובה גם ביצירת הקשר בין הייצוג של המספרים הרציונאליים כשברים פשוטים לבין ייצוגם כשברים עשרוניים, על ידי שימוש באלגוריתם של החילוק הארוך, או במקש החילוק שבמחשבון (**איור 3**). המשמעות של מנה יכולה לחזק את הקשר דרך השברים השקולים, כמו למשל 3/4 = 75/100. ניתן להקל על מציאת שבר שקול לשבר נתון שיש לו 100 במכנה, על ידי התבוננות בתוצאת החילוק. עיסוק בתוצאה של החילוק יעזור לתלמידים גם לראות את השבר כמספר יחיד.

איור 3: הקשר בין שברים פשוטים, חילוק ושברים עשרוניים



חשיבה על שברים כחילוק יכולה גם לסייע לתלמידים לפתח יותר גמישות. כאשר היידי התבקשה למצוא שבר בין 1/5 ל- 1/4, היא מיד כתבה 1/4.5 , ולאחר מכן כתבה את השבר השקול 2/9. כדי למצוא את השבר שביניהם, היידי השתמשה ביחס ההפוך שבין גודל המחלק לבין תוצאת החילוק (כאשר המחולק נשאר שווה). יהיה קשה לחשוב על 1/4.5 כאשר משתמשים במודל של חלק - שלם.

מספרים רציונאליים במשמעות של מדידה

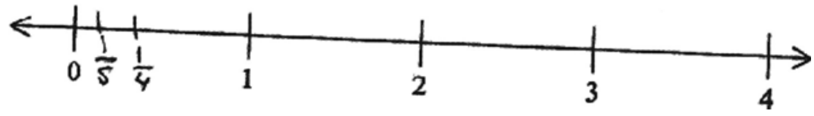
התנסויות מחיי היומיום הדורשות מדידות הן נקודת התחלה טובה להוראת המשמעות של מדידה של המספרים הרציונאליים. דיונים במצבים אלה מובילים לרעיונות העיקריים המשתלבים בנושא זה: 1) דיוק המדידה; 2) צפיפות המספרים הרציונאליים; 3) חלוקות חוזרות;

4) שקילות שברים. המשמעות של מדידה נשענת על שני עקרונות של מדידה. האחד הוא היחס ההפוך שבין גודל יחידת המדידה לבין מספר הפעמים שהיא מופיעה במדידת כמות נתונה. השני הוא האפשרות לחלק את יחידת המדידה לחלקים יותר ויותר קטנים, עד שניתן לשער בקרוב כמות נתונה בכל מידת דיוק שרוצים.

מציאת שברים שקולים על ישר המספרים, תוך שימוש בכלים מתמטיים כמו רצועות שברים או לוחות שברים, יכול להקים גשר בין משמעות השבר כחלק משלם לבין המשמעות של מדידה. שימוש בציר המספרים הוא דרך מצוינת לדון על שברים. לתלמידים יש ניסיון עם ישר המספרים ועם מדידות סטנדרטיות ולא סטנדרטיות, החל מגיל צעיר. מציאת נקודות ייחוס מוכרות, כמו 1/2, 1/4, ו- 3/4 שניתן לקבלם על ידי חצייה ומיקומם על ישר המספרים, הינה דרך טובה לעשות את המעבר למדידה של מספרים רציונאליים.

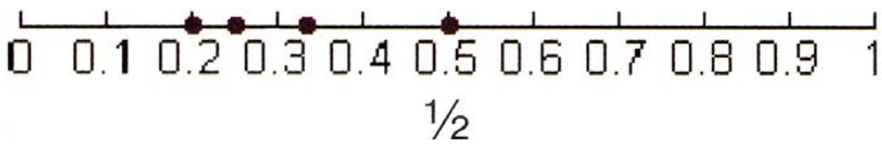
עם זאת, איננו יכולים להניח שתלמידים ישלבו מיד את כל ההיבטים של מדידת מספרים רציונאליים הנחוצים לייצוג מדויק של שברים על ישר המספרים. **איור 4** מראה את המאמץ של אביגיל לייצג 1/5 ו- 1/4 על ישר מספרים (Rothery 2006). למרות שהשרטוט שלה מראה נכון ששני שברים אלה גדולים מ- 0 וקטנים מ- 1, וש- 1/5 קטן מ- 1/4, הרי שהיא לא ייצגה באופן מדויק את המרחקים שבין השברים. המרחק בין 0 ל- 1/4 צריך להיות רבע המרחק שבין 0 ל- 1. המרחק בין 1/5 ל- 1/4 צריך להיות הרבה יותר קטן מהמרחק בין 0 ל- 1/5.

איור 4 : הייצוג של אביגיל ל-1/5 ו-1/4 על ישר המספרים

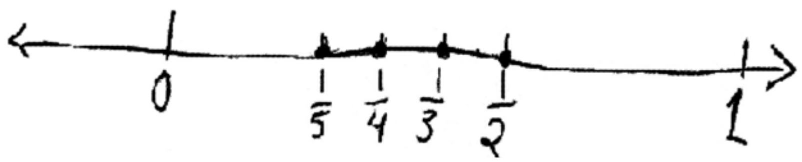


תלמידים אינם שמים לב באופן אוטומטי לאותם מאפיינים של מספרים בישר המספרים להם שמים לב המבוגרים. בעזרת תוכנת מחשב, אביגיל קיבלה גרף המייצג את 1/5, 1/4, 1/3, ו- 1/2 (**איור 5**). המורה שלה ביקשה ממנה לשחזר את הגרף ללא המחשב. אביגיל שינתה באופן נכון את המספרים העשרוניים בחזרה לשברים פשוטים, והציגה באופן נכון את הסדר שלהם (**איור 6**). עם זאת, היא לא שמה לב למרחקים שבין הנקודות שהופיעו בתצוגה של המחשב. בגרף שלה המרחקים בין 1/5 ו- 1/4, בין 1/4 ו- 1/3, ובין 1/3 ו- 1/2 הם כמעט באותו אורך. למרות זאת, הגרף שלה לא היה תוצאה של ציור פזיז. הייצוג של אביגיל מגלה שילדים לא תמיד מפנימים תכונות של מספרים, כמו המרחקים ביניהם, רק מהתבוננות בתמונה על מסך המחשב.

איור 5: ייצוג מחשב של השברים 1/5, 1/4, 1/3, ו- 1/2



איור 6: שחזור הגרף של המחשב על ידי אביגיל



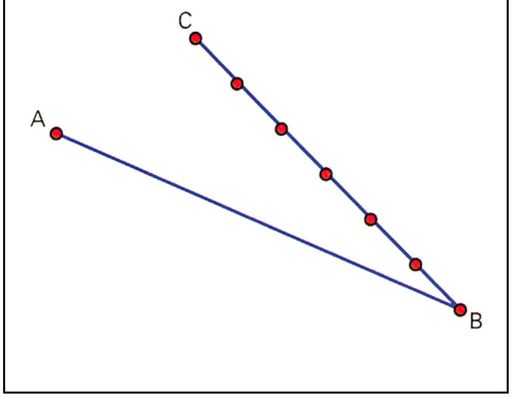
מורים צריכים להדגיש את החשיבות של התייחסות למרחקים בין נקודות המייצגות מספרים רציונאליים, ולא רק לסדר היחס שלהם. תלמידים צריכים להשתמש בכלים כמו סרגלים כדי לחלק קטעים באופן ידני לחלקים בעלי מידות שונות ולקבל חלוקות חוזרות. סרגלים בשיטה האנגלית נוחים לצורך חלוקה ל- 2, 4, ו- 8 חלקים. סרגלים מטריים, שיש עליהם מילימטרים, מתאימים לחלוקה ל- 2, 5, ו- 10 חלקים. סרגלים שיש עליהם חלוקות ההולכות וגדלות והניתנים לחפיפה (כמו סרגלי שברים) יכולים לסייע לתלמידים לראות שקילות של שברים ולהתמקד במרחקים שבין השברים. המורה או התלמידים בעצמם יכולים להכין קטעים מתאימים, כך שיתאפשר לתלמידים לחלק אותם באופן שווה למספר חלקים אחר בעזרת סרגלים.

תלמידים בכיתות הגבוהות של ביה"ס היסודי, יכולים גם לחלק קטעים באמצעות שרטוט של קווים מקבילים. שיטה זו מאפשרת להם לחלק קטע למספר שרירותי של חלקים. זה מסייע גם לבניית תשתית למושגים גיאומטריים חשובים, כמו שוויון זוויות מתאימות והקשר בין קווים מקבילים במשולשים והקטעים הפרופורציונאליים שהם יוצרים.

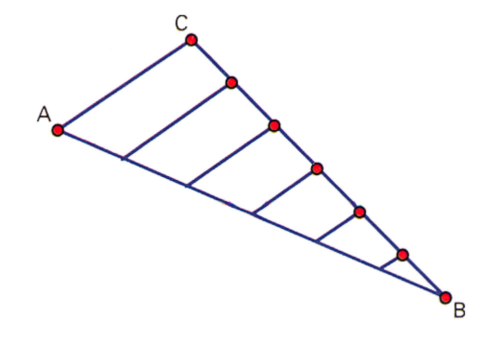
חישבו על הבעיה הבאה:

כדי לחלק את הקטע AB לששה חלקים שווים, שרטטו קטע עזר מ- B וסמנו עליו בעזרת סרגל ששה מרווחים שווים (**איור 7**). חברו את C, נקודת הקצה של המרווח השישי, עם A ושרטטו קוים מקבילים ל- AC. נקודות החיתוך של קוים אלה עם הקטע AB יחלקו את AB לששה חלקים שווים (**איור 8**).

איור 7: מרווחים שווים על קו עזר

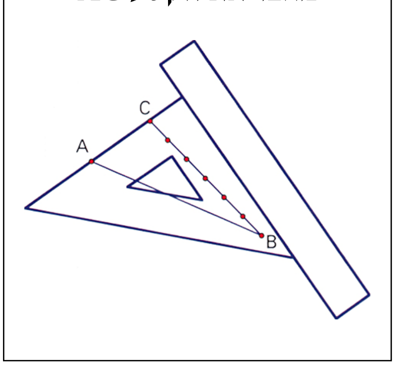


איור 8: קווים מקבילים מחלקים את הקטע AB

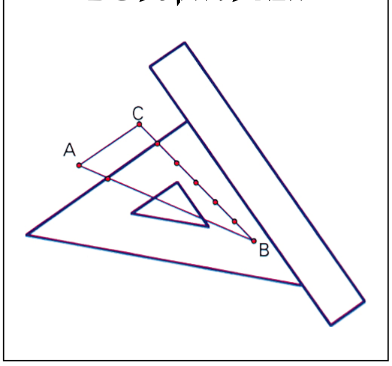


בגישה הקינסטטית לחלוקה, תלמידים יכולים להשתמש בסרגל רגיל ובסרגל משולש כדי לשרטט בקירוב את הקווים המקבילים. התהליך הוא כזה. בשלב ראשון הצמד קצה אחד של המשולש אל קטע AC (**איור 9**). כעת הנח את הסרגל לאורך הצד השני של המשולש והחזק אותו חזק במקומו. בשלב השני, תוך כדי החזקת הסרגל חזק במקומו, הזז את המשולש אל הסימון השני שעל קטע BC (**איור 10**). כעת, החזק את המשולש חזק ושרטט את הקו המקביל. בשלב השלישי, החזק שוב את הסרגל חזק במקומו והזז את המשולש עד לסימון הבא (**איור 11**).

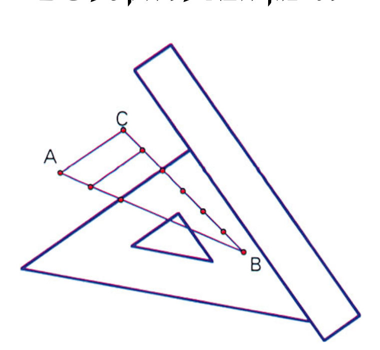
איור 9: הקצה של המשולש מחבר את הקטע AC



איור 10: המשולש זז לסימון הבא על הקטע BC



איור 11: עוד הזזה אחת לסימון הבא על הקטע BC

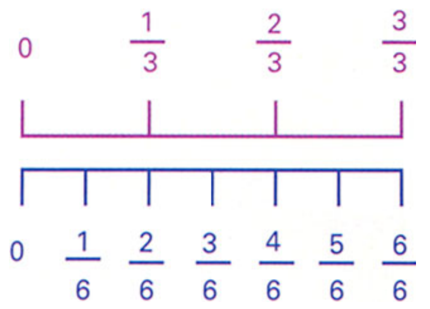


כאשר התלמידים יתעמתו עם מצבים הדורשים מדידות מדויקות יותר, הם יתחילו לעבוד עם המושגים של חלוקה ושקילות שברים. תלמידים צריכים להתמקד בחלוקה חוזרת של יחידה (Lamon 2001) עד שהם רואים שמספר החלקים שהם יוצרים יקבע את שמו של השבר. כדי להבין מושג זה, תלמידים צריכים התנסות מוחשית עם מכשירי מדידה למשך זמן רב, תוך כדי חקירה של מצבים מחיי היומיום.

יעד חשוב בהוראת המושג של מספרים רציונאליים, הוא לעזור לתלמידים לראות את המספר הרציונאלי, לא רק כקשר בין שני מספרים, אלא גם כמספר העומד בפני עצמו, כאובייקט יחיד. המשמעות של מדידה מדגישה שקילות של שברים באמצעות ישר המספרים.

קטעים המחולקים למספרים שונים של חלקים שווים והניתנים להשוואה זה לזה, יכולים לסייע לתלמידים לראות שברים שקולים. מכיוון שישנה רק נקודה אחת המתאימה למרחק נתון מהאפס, השברים המתאימים לאותה נקודה שקולים (**איור 12**).

איור 12: שברים שקולים: 1/3 = 2/6,
3/3 = 6/6 ,2/3 = 4/6



תלמידים צריכים למקם שברים על ישר המספרים שכבר נעשתה בו חלוקה, וגם על כאלה שלא נעשתה בהם חלוקה. בעיות הפוכות חשובות גם כן. בקשו מן התלמידים לקבוע איפה יהיה ה- 1, כאשר נתונים המיקום של ה- 0 ושבר המסומן על הישר, כמו למשל 1/2, 3/4, או 7/8. דרך טובה לפתח מיומנויות אלה היא באמצעות התנסות בציור של בעיות רבות שמתמקדות בחלוקה. כדי שהתלמידים יפתחו הבנה נכונה, הציורים שלהם צריכים להיות מדויקים.

ישר המספרים יעיל גם כאשר מלמדים תלמידים על תכונת הצפיפות של המספרים הרציונאליים: בין כל שני שברים נתונים יש שבר נוסף (ולכן יש מספר אינסופי שברים), ואנו יכולים למצוא שבר הקרוב לנקודה כלשהיא כרצוננו. תלמידים לא יבינו עיקרון זה רק משמיעה עליו. הם צריכים להתנסות בו בעצמם באמצעות פתרון בעיות, לדוגמה, מציאת שלושה שברים בין 1/3 ל- 1/4. מורים ידעו שהם העניקו לתלמידיהם בסיס מוצק של משמעות המדידה כאשר התלמידים מסוגלים א) לבצע בקלות חלוקות השונות מ- 1/2, ב) למצוא כל מספר של שברים בין שני שברים, ו- ג) להשתמש בקטע נתון כדי למדוד מרחק כלשהו (Lamon 2001).

סיכום

הוספת המשמעויות של מנה ומדידות למשמעויות שהתלמידים מפתחים עבור מספרים רציונאליים, תסייע להם לפתח הבנה עשירה יותר. מכלול הפירושים יסייע לגבש בסיס חזק יותר של הבנה. כפי שציינו קודם, הקשרים אחרים ומשמעויות אחרות של מספרים רציונאליים חשובים גם כן לתלמידים, דהיינו, יחס ואופרטור (ראה Lamon 1999, פרקים 7 ו- 11). ספר השנה 2002 של ה- NCTM הוא מקור מצוין לרעיונות נוספים (NCTM 2002).

מורים צריכים להבין שפיתוח הבנה רב-צדדית זו של מספרים רציונאליים לא תתרחש באופן אוטומטי, היא תארך מספר שנים. לכן, תלמידים צריכים להתחיל לפתח מושגים אלה בכיתות היסוד ולהמשיך בכך בכיתות הביניים.

ביבליוגרפיה

Arbaugh, Fran, Catherine Brown, Kathleen Lynch, and Rebecca McGraw. "Students' Ability to Construct Responses (1992-2000): Findings from Short and Extended Constructed-Response Items." In *Results and Interpretations of the 1990-2000 Mathematics Assessments of the National Assessment of Education Progress*, edited by Peter Kloosterman and Frank K. Lester, pp. 337-62. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2004. .

Behr, Merlyn J., Guershon Harel, Thomas Post, and Richard Lesh. "Rational Number, Ratio, and Proportion." In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws, pp. 147-64. New York: Macmillan, 1992 .

Cramer, Kathleen, Merlyn Behr, Richard Lesh, and Thomas Post. *The Rational Number Project Fraction Lessons: Level 1*. Dubuque, IA: Kendall-Hunt Publishing, 1997. http://www.education.umn.edu/rationalnumberproject/rnp1.html (Sept. 15, 2005)

de Silva, Teruni. "Quotient Construct, Inscriptional Practices and Instructional Design." PhD diss., Arizona State University, 2001 .

Empson, Susan B. "Organizing Diversity in Early Fraction Thinking." In *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Bonnie H. Litwiller, pp. 29-40. Reston, VA: NCTM, 2002.

Flores, Alfinio, and Erika Klein. "From Students' Problem-Solving Strategies to Connections in Fractions." *Teaching Children Mathematics* 11, no. 9 (2005): 452-57.

Lamon, Susan J. *Teaching Fractions and Ratios for understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

_____"Presenting and Representing from Fractions to Rational Numbers." In *The Roles of Representation in School Mathematics*. 2001 Yearbook of the national Council of Teachers of Mathematics, edited by Albert A. Cuoco, pp. 146-65. Reston, VA: NCTM, 2001.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*. 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by bonnie Litwiller, Reston, VA: NCTM, 2002.

Master Innovations. *The Master Ruler*. http://www.themasterruler.com (Sept. 18, 2005).

Rothery, Thomas G. "English as a Second Language Students using Technological Tools and Multiple Representations to Learn the Real Number Line." PhD diss., Arizona State University, 2006 .

Toluk, Zulbiye. "Children's Conceptualization of the Quotient Subconstruct of Rational numbers." PhD diss., Arizona State university, 2001.

Wearne, Diana, and Vicky L. Kouba. "Rational Numbers." In *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*, edited by Edward A. Silver and Patricia Ann Kenney, pp. 163-91. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.