מדוע ילדים מתקשים בשליטה בעובדות היסוד
וכיצד ניתן לעזור להם

Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them

מאת: Arthur J. Baroody

הופיע ב: Teaching Children Mathematics , Vol. 13, No.1, Aug. 2006, pp. 22-31

תרגום: ברכה סגליס

כריסטין, תלמידה בכיתה א', קובעת את הסכום של 6+5 על ידי אמירה חרישית, "שש" ואז בגניבה מתחת לשולחן זוקפת חמש אצבעות, זו אחר זו, וסופרת, "שבע, שמונה, תשע, עשר, **אחת-עשרה**" יולנדה, תלמידה בכיתה ב', מתמודדת עם 6+5 על ידי חישוב מנטלי שאם 5+5 הם 10 ו- 6 הוא 1 יותר מ- 5, אז 6+5 צריך להיות 1 יותר מ- 10, או **11**. זניה, תלמיד בכיתה ג', עונה באופן מיידי ומהימן "שש ועוד חמש הם אחת-עשרה".

שלוש הגישות שתוארו זה עתה ממחישות את שלושת השלבים המאפיינים את ההתקדמות של ילדים בדרך לשליטה בעובדות היסוד – צירופי החיבור והכפל של מספרים חד-ספרתיים והצרופים המשלימים להם של החיסור והחילוק:

- שלב 1: אסטרטגיות ספירה – תוך שימוש במניית חפצים (כגון, קוביות קטנות, אצבעות, קוים) או ע"י ספירה מילולית, לשם קביעת התשובה.
- שלב 2: אסטרטגיות חשיבה – שימוש במידע ידוע (כגון, עובדות ידועות ויחסים) כדי לקבוע באופן לוגי (להסיק) את התשובה לצרוף לא ידוע.
- שלב 3: שליטה – הפקה יעילה (מהירה ומדויקת) של תשובות.

אנשי חינוך מסכימים לרוב שילדים צריכים לשלוט בצרופים של עובדות היסוד, כלומר, צריכים להגיע לשלב 3 כפי שצוין קודם (כגון, NCTM 2000). לדוגמה בספר Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics (Kilpatrick, Swafford, and Findell 2001), ה- National Research Council (NRC) הסיקה שהשגת רהיטות חישובית – היישום היעיל, המתאים והגמיש של כישורי חישוב למספרים חד ורב-ספרתיים – הינו היבט הכרחי של מומחיות מתמטית.

עם זאת, ישנה אי הסכמה ניכרת לגבי האופן שבו יש ללמד את עובדות היסוד, הסיבות לקשיים בלימוד שלהם, ומהי הדרך הטובה ביותר לעזור לילדים להגיע לשליטה. התיאורים שיובאו להלן, המבוססים כולם על אנשים ומאורעות ממשיים, למרות היותם מוגזמים כדי להמחיש את המסר, ממחישים את **הגישה המסורתית** בסוגיות אלו או את ההשלכות המעשיות שלהן. (השמות שונו

כדי להגן על הסובלים). לאחר מכן נשווה גישה זו לגישה השונה במהותה (הגישה של תובנת המספר), שבמקורה קודמה ע"י Wiliam Brownell (1935) אך רק לאחרונה מקבלת תמיכה ממחקרים רבים.

תיאור 1: ילדים רגילים יכולים להגיע במהירות לשליטה בעובדות היסוד; אלה שאינם מסוגלים הם חלשים מבחינה שכלית, עצלנים, או לקויים בצורה אחרת.

אלן, תלמיד בכיתה ג', הופיע במשרדי כשהוא מאוד מודאג. החשש שלו לא היה מפתיע, מכיוון שרק עתה הוא סווג כבעל "לקויות למידה" ומשום שהוריו המודאגים דרשו זאת, הגיע אלי כדי לפגוש את "הדוקטור שמומחה בבעיות למידה". אמו דווחה לי שהבעיה העיקרית של אלן היתה חוסר יכולתו לשלוט בעובדות היסוד. לאחר שיחה ראשונית שנועדה לגרום לו להרגיש בנוח, שיחקנו בסדרת משחקים מתמטיים שתוכננו ליצור חוויה מהנה ולספק מידע דיאגנוסטי. אבחון זה גילה, בין היתר, שאלן שולט בחלק מעובדות הכפל, כלומר, בצרופים של $0\times n$, $1\times n$, $2\times n$, $5\times n$. התפקוד שלו אמנם לא עמד בציפיות של המורה שלו, אבל לא היה רחוק מאוד מהנורמה. (בכיתה של אלן הקדישו יום אחד בלבד ללימוד כל אחד מ- 10 סולמות הכפל מ- $0\times n$ עד $9\times n$, והמורה ציפתה מכל התלמידים לשלוט בזמן זה בכל 100 עובדות היסוד של הכפל . כאשר צוין בפניה ששליטה בעובדות אלה לוקחת בדרך כלל הרבה יותר מאשר עשרה ימים, המורה שיפרה את גישתה ואמרה, "טוב, אז אני אקדיש לעובדות הקשות כמו סולם ה- 9, יומיים".)

תיאור 2: ילדים נוטים באופן טבעי לא לחשוב על מתמטיקה וצריכים תמריצים חזקים כדי ללמוד אותה.

המורה של ברידג'ט, תלמידת כיתה ד', היתה מאוכזבת ומתוסכלת מכך שתלמידיה החדשים שכחו ככל הנראה את רוב עובדות הכפל והחילוק שלמדו בשנה שעברה. מתוך כוונה לעורר מוטיבציה בתלמידיה, גב' ברנסייד הדליקה מצית ואיימה, "אתם תלמדו את עובדות היסוד של הכפל והחילוק, או שתישרפו בכיתה שלי!" ברידג'ט וחבריה לכיתה התייחסו לאיום באופן ממשי ולא בהשאלה, כפי שהמורה התכוונה.

תיאור 3: אסטרטגיות לא פורמליות הם הרגלים רעים המפריעים בהשגת שליטה וצריך למנוע אותם או להכריע אותם.

קרול, תלמידה בכיתה ב', זכתה באופן קבוע במשחק 'סביב העולם'. (במשחק זה התלמידים עומדים בשורה וכל תלמיד צריך לענות על תרגיל, לדוגמה, "כמה הם 5 + 8?" או "כמה הם 4 – 9?" אם התלמיד עונה תשובה שגויה או איטית מדי הוא יושב, עד שרק תלמיד אחד נשאר והוא הזוכה.) במטרה ללמד ולעורר מוטיבציה אצל תלמידיה, המורה של קרול שאלה אותה, "מה הסוד שלך שמאפשר לך לזכות? איך את מצליחה לתת תשובה מדויקת כל כך מהר?" קרול ענתה בכנות, "אני סופרת ממש מהר". מאוכזבת מתגובה זו, המורה כתבה פתק להוריה של קרול המסביר שהילדה מתעקשת על שימוש ב"אסטרטגיות לא בשלות" ועוד גאה בכך. לאחר שקראה את הפתק, אמה של קרול כעסה עליה ודרשה הסבר. הילדה הגיבה, "אבל אמא, אני סופרת ממש ממש מהר. אני כל כך מהירה שאף אחד לא יכול לנצח אותי".

תאור 4: שינון חוזר של עובדות היסוד באמצעות תרגול ואימון מוגברים, הינה הדרך היעילה ביותר לעזור לילדים להשיג שליטה.

דרל, סטודנט בקולג', עדיין מסוגל לזכור את התשובות לשורה הראשונה של עובדות יסוד בחילוק שבדף העבודה שקיבל בכיתה ה', אותו היה צריך למלא בכל יום במשך שבוע עד שהיה מסוגל למלא את כל דף העבודה תוך דקה. לצערו, הוא לא מצליח לזכור את התרגילים עצמם.

כיצד ילדים לומדים את עובדות היסוד

הגישה המסורתית והגישה של תובנת המספר שונות באופן דרמטי ביחס לתפקידם של שלבים 1 ו- 2 (ספירה ואסטרטגיות חשיבה) בהשגת שליטה, וביחס למהותו של שלב 3 (שליטה).

הגישה המסורתית: שליטה נובעת משינון עובדות בודדות באמצעות אימון חוזר ומתן חיזוקים.

למרות שרבים מחסידי הגישה המסורתית אינם מוצאים צורך בשלבים של הספירה והחשיבה, ישנם כאלה הרואים בשלבים המוקדמים הזדמנויות לתרגל את עובדות היסוד או להעניק להן משמעות, לפני שמשננים אותן. גם כך, כל חסידי הגישה המסורתית מסכימים ששלבים 1 ו- 2 אינם **הכרחיים** כדי להשיג את מחסן העובדות שהוא הבסיס לשליטה בצרופים. מסקנה זו היא ההשלכה ההגיונית של ההנחות המקובלות הבאות אודות שליטה בצרופי המספרים ומומחיות בחישובים מנטליים :

- לימוד של עובדת יסוד הינו תהליך פשוט של יצירת אסוציאציה או קשר בין ביטוי, כמו 7+6 או "שבע ועוד שש", והתשובה שלו 13 או "שלוש עשרה". בתהליך הבסיסי לא נדרשת הבנה מושגית או לקיחה בחשבון של המוכנות ההתפתחותית של הילד – הידע הלא פורמלי היומיומי הקיים אצלו או אצלה. כפי שהניחו המורות בתיאורים 1 ו- 4, יצירת קשר דורש רק אימון, תהליך שניתן להשיג באופן ישיר ובזמן קצר יחסית ללא ספירה או חשיבה, למשל באמצעות תירגולים בכרטיסי הברקה ומבחני זמן.
- לילדים בכלל ולילדים בעלי קשיי למידה בפרט יש מעט, או אין בכלל, עניין ללמוד מתמטיקה. לכן, מורים צריכים להתגבר על חוסר עניין זה או באמצעות תהליך נדיב של חיזוקים (כגון, מדבקה, חיוך, ממתק, זמן משחק נוסף, או ציון טוב) או, אם נחוץ, בנקיטת אמצעי הענשה (כגון, נזיפה, עבודה נוספת, הפחתת זמן משחק, או ציון נכשל) או איום בכך (כפי שנהגה המורה בתיאור 2).
- שליטה מורכבת מתהליך יחיד, שהוא היזכרות בעובדה. (הנחה זו נעשית על ידי המורה ועל ידי האמא בתיאור 3). היזכרות בעובדות מצריכה את השליפה האוטומטית של התשובה הקשורה לביטוי. מרכיב זה של שליפת עובדה מהמוח הוא בלתי תלוי במרכיבי המושגים והחשיבה של המוח.

גישת תובנת המספר: השליטה הנמצאת בבסיס של רהיטות חישובית צומחת מתוך גילוי הדפוסים והיחסים הרבים המקשרים בין הצרופים של עובדות היסוד.

על פי הגישה של תובנת המספר, לשלבים 1 ו- 2 תפקיד הכרחי וחיוני בהשגת שלב 3. שליטה בעובדות היסוד נתפסת כתוצר או כפועל יוצא של תובנת המספר, המוגדר כידע מקושר היטב אודות מספרים וכיצד הם פועלים זה עם זה. גישה זו מתבססת על ההנחות הבאות המקבלות תמיכה הולכת וגוברת מן המחקרים:

- השגת שליטה בעובדות היסוד באופן יעיל ובצורה שתקדם רהיטות חישובית, הינה קרוב לודאי הרבה יותר מורכבת מאשר התהליך של למידה אסוציאטיבית פשוטה שהגישה המסורתית מציעה. הסיבה לכך היא שלימוד גוף גדול כלשהו של ידע עובדתי באופן משמעותי, קל יותר מאשר לימודו בדרך של שינון. חשבו, למשל, על המשימה של שינון המספר הבא בעל 11 הספרות: 25811141720. שינון מספר זה בעל-פה, אפילו אם יעשה בגושים (כגון, 258-111-417-20) דורש יותר זמן ומאמץ מאשר שינונו בדרך משמעותית - זיהוי דפוס או יחס (התחל ב- 2 ובאופן חוזר הוסף 3). כלומר, פסיכולוגים יודעים מזה זמן רב שאנשים לומדים גוף ידע בקלות רבה יותר כאשר הם מתמקדים במבנה שלו (כגון, דפוסים או יחסים) מאשר על ידי שינון חוזר של עובדות בודדות. יתר על כן, פסיכולוגים יודעים כבר זמן רב שידע עובדתי המקושר היטב קל יותר לשמור בזיכרון ולהעביר ללמידה של עובדות אחרות חדשות אך קשורות, מאשר עובדות מבודדות. כמו בכל ידע בעל ערך, שינון מתוך משמעות של עובדות היסוד דורש גילוי של דפוסים ויחסים. לדוגמה, ילדים המבינים את ה"רעיון הגדול" של **הרכבה** – ששלם, כמו למשל, מספר כלשהו, ניתן להרכבה מחלקיו, על פי רוב בדרכים שונות ועם חלקים שונים (כגון, 8 = 1+7, 2+6, 3+5, 4+4) - יכול להכיר בכך שהעובדות 1+7, 2+6, 3+5, ו- 4+4 הן עובדות קשורות, והן משפחה אחת של עובדות ש"הסכום שלהם הוא 8." הכרה זו עשויה לעזור לו להבין את הרעיון הגדול הקשור אליו שהוא **פירוק** – ששלם, כמו למשל, מספר כלשהו, ניתן לפרוק לחלקים היוצרים אותו, על פי רוב בדרכים שונות (כגון, ...4+4, 3+5, 2+6, 1+7 = 8). ילדים המבינים את הרעיונות הגדולים של הרכבה ופירוק עשויים להמציא אסטרטגיות חשיבה, כמו תרגום צירופים לביטויים קלים יותר או ידועים כגון,

  $7+8 = 7+[7+1] = [7+7]+1 = 14+1=15$,

  או $9+7 = 9+[1+6] = [9+1]+6 = 10+6 = 16$.

  כלומר, ילדים עם הבנה עשירה של המספר ושל דפוסים ויחסים חשבוניים עשויים יותר להגיע לרמה 2 .

- לילדים יש מוטיבציה פנימית למצוא היגיון בעולם, ולכן הם מחפשים סדר וקביעות. חקירה וגילוי מלהיבים אותם.
- שליטה בעובדות המבטיחה רהיטות חישובית עשויה להיות יותר מורכבת ממה שטוענת הגישה המסורתית. בדרך כלל, לאחר אימון, הרבה מאסטרטגיות החשיבה שפותחו בשלב 2 הופכות להיות חצי-אוטומטיות או אוטומטיות. אפילו מבוגרים משתמשים במגוון של

שיטות, כולל אסטרטגיות חשיבה יעילות, או - כפי שקרול עשתה בתיאור 3 – ספירה מהירה, כדי לקבוע באופן מדויק ומהיר תשובות לעובדות היסוד. לדוגמה, ילדים עשויים תחילה לשנן מספר עובדות של n+1, אבל, ברגע שהם מבחינים שעובדות כאלה קשורות לידע שקיים אצלם על ספירה – במיוחד הידע היעיל שלהם על המספר הבא (כגון, "אחרי 8 בא 9") – הם אינם צריכים לחזור ולתרגל את יתר העובדות של n+1 כדי להפיק אותם. כלומר, הם מגלים את **הכלל של המספר שאחרי** עבור עובדות כאלה: "הסכום של n+1 הוא המספר שבא אחרי n ברצף הספירה". תהליך חשיבה זה ניתן ליישום יעיל לכל צרוף של n+1 אשר לגביו הילד יודע את רצף הספירה, אפילו עבור אותם מספרים שהילד לא תרגל, כולל צרופים של מספרים גדולים, כמו 1 + 1,000,128. (שימו לב: היישום של הכלל של המספר שאחרי במספרים רב-ספרתיים, מסתמך על כללים שנלמדו ועל כללים אוטומטיים ליצירת רצף הספירה.) עם הזמן, הכלל של המספר שאחרי עבור הצרופים של n+1, הופך לאוטומטי וניתן ליישום מהיר, יעיל וללא מחשבה.

המחקר שנעשה לאחרונה תומך בגישה שהידע של עובדות היסוד אצל מומחים בחשבון מנטלי אינו רק אוסף של עובדות בודדות ונפרדות, אלא רשת עשירה של רעיונות קשורים. לדוגמה, ממצאים מראים שלא רק שהבנת חוק החילוף מאפשרת לילדים ללמוד את כל עובדות הכפל על ידי תרגול של מחציתם בלבד, אלא גם שידע מושגי זה עשוי גם לאפשר לזיכרון לאחסן את 2 העובדות החילופיות כייצוג יחיד. גישה זו נתמכת בתצפית שכשרון החישוב של מומחים בחשבון אינו נובע ממאגר עשיר של עובדות מבודדות אלא מתובנת מספרים עשירה (Heavey 2003). בקיצור, שלבים 1 ו- 2 הכרחיים להנחת התשתית המושגית – הגילוי של דפוסים ויחסים – ולקביעת אסטרטגיות החשיבה העומדות בבסיס ההשגה של רהיטות חישובית עם עובדות היסוד שבשלב 3.

הסיבות לקשיים של ילדים

על פי הגישה המסורתית, קשיי למידה נובעים לרוב מפגמים אצל הלומד. על פי הגישה של תובנת המספר, הם נובעים לרוב מהוראה לא הולמת או לא מתאימה.

הגישה המסורתית: קשיים נובעים מחסרים הטבועים בלומד:

לעיתים קרובות מדי, מייחסים את קשיי הלמידה של ילדים, כמו של אלן, המופיע בתיאור 1, בעיקר או רק למגבלות הקוגניטיביות **שלהם**. ואכן, ילדים המתויגים כ"לקויי למידה" מאופיינים לרוב כלא מקשיבים, שכחנים, נוטים לבלבול, וללא יכולת ליישם ידע לבעיות או מטלות השונות רק במעט. כפי שתיאור 1 מדגים, ההשערה היא שמאפיינים קוגניטיביים אלה הם תוצאה של חסרים בתהליכי העיבוד המנטלי, והם מסבירים את הסימפטומים הכמעט אוניברסאליים של ילדים לקויי למידה:

- הסתמכות חזקה על אסטרטגיות של ספירה
- יכולת ללמוד אסטרטגיות חשיבה, אבל כביכול אי יכולת להמציא אסטרטגיות כאלה באופן ספונטני.

- אי יכולת ללמוד ולשמר את צרופי עובדות היסוד, במיוחד אלה המערבים מספרים הגדולים מ- 5 (כגון, סכומים מעל 10).
- שיעור גבוה של טעויות בשליפת העובדות (כגון, ״בלבול אסוציאטיבי״, כמו מענה לתרגיל 8+7, "16" – הסכום של 8+8 – או "56" – המכפלה של 7×8).

במילים אחרות, ילדים עם קשיי למידה, במיוחד אלה המתויגים כלקויי למידה, יוצרים רושם שהם תקועים בשלב 1 של התפתחות רכישת עובדות היסוד. לפעמים הם משיגים את שלב 2, לפחות באופן זמני, אם מלמדים אותם באופן ישיר אסטרטגיות חשיבה. רבים, עם זאת, מעולם לא מגיעים לשלב 3.

גישת תובנת המספר: הקשיים נובעים מפגמים הטבועים בהוראה המסורתית.

למרות שלחלק מן הילדים המתויגים כלקויי למידה יש בהחלט פגמים בתהליכים הקוגניטיביים, הרי שרבים מילדים אלה או אפילו רובם ותלמידים מתקשים אחרים, מתקשים בשליטה בעובדות היסוד משתי סיבות. האחת היא, שלא כמו עמיתיהם היותר מצליחים, הם חסרים ידע לא פורמלי מתאים שהוא בסיס קריטי להבנה וללימוד מוצלח של מתמטיקה פורמלית, ולפיתוח אסטרטגיות יעילות לחשיבה ולפתרון בעיות. לדוגמה, יתכן שהן חסרים את ההתנסויות הלא פורמליות המאפשרות להם לבנות הבנה איתנה של הרכבה ופירוק. הבנה כזו הינה הבסיס לפיתוח אסטרטגיות חשיבה רבות.

סיבה שנייה היא שהגישה המסורתית הופכת את לימוד עובדות היסוד לקשה ללא צורך ומעוררת חרדה. המיקוד על שינון עובדות מבודדות גוזלת מן הילדים את המומחיות המתמטית. לדוגמה, היא אינה מעודדת חיפוש דפוסים ויחסים (למידה מושגית), היא מטה את המאמצים לנמק את התוצאות (חשיבה מתמטית אסטרטגית), ומפחיתה את העניין במתמטיקה ואת הביטחון ביכולת להבין את ההיגיון שבמתמטיקה (a productive disposition)[1] . למעשה, גישה כזו אפילו מפריעה לרהיטות חישובית ויוצרת את אותם סימפטומים של קשיי למידה המיוחסים לרוב לילדים לקויי למידה ומופיעים אצל ילדים מתקשים אחרים:

- **אי-יעילות.** משום שלימוד העובדות מתוך שינון הרבה פחות מאתגר מלימוד מתוך משמעות, ילדים רבים מתייאשים מלימוד כל העובדות. הם נראים כלא מקשיבים או כחסרי מוטיבציה, או נכשלים בלימוד העובדות (כמו שמדגימים תיאורים 1 ו- 4). משום שהרבה יותר קשה לזכור עובדות מבודדות מאשר עובדות קשורות, תלמידים רבים שוכחים עובדות רבות (כפי שמדגים תיאור 2). במילים אחרות, כפי שתיאור 4 מדגים, הפועל היוצא של שינון עובדות היסוד או כל מידע אחר הוא שכחה. בנוסף, אם התלמידים אינם מבינים את הכללים שהמורה הכתיבה, תלמידים עלולים להגיע לבלבול אסוציאטיבי. למשל, אם התלמיד אינו מבין מדוע הכפל של כל מספר ב- 0 הוא 0, או מדוע הכפל של כל מספר ב- 1 הוא המספר עצמו, הוא עלול לבלבל כללים אלה עם הכללים לחיבור 0 ו- 1 (כגון, לענות

[1] Students must develop a productive disposition toward mathematics such that they believe that mathematics makes sense and they can figure it out.

לתרגיל 7×0 ב- "7" ולתרגיל 7×1 ב- "8"). מאחר שהם נאלצים להסתמך על אסטרטגיות של ספירה ולהשתמש באסטרטגיות לא פורמליות אלה בגניבה ובמהירות, הם נוטים לעשות שגיאות (כגון, במאמץ לדלג ב- 7 כדי למצוא את המכפלה של 4×7 , התלמיד עלול לטעות במספר הקבוצות שעליו למנות ולענות "21" במקום "28").

- **יישומים לא מתאימים**. כאשר ילדים מתמקדים בשינון עובדות במקום בהבנת ההיגיון שבמתמטיקה של ביה״ס או קישור של העובדות לידע שכבר קיים אצלם, הם נוטים לא ליישם ידע זה משום שהם לא מתאמצים לבדוק את עצמם או מחמיצים הזדמנויות ליישם מה שהם כן יודעים (כגון, הם אינם מבחינים בכך שהתשובה ״שלוש״ לתרגיל 2+5 אינה הגיונית). לדוגמה, הידע הלא מקושר שדרל שינן בתיאור 4, סיפקה את דרישות המורה באופן זמני, אבל בסופו של דבר היה למעשה חסר ערך.
- **חוסר גמישות**. כאשר ההוראה אינה מסייעת או מעודדת את הילדים לבנות מושגים או לחפש דפוסים ויחסים, יש פחות סבירות שהם ימציאו אסטרטגיות חשיבה באופן ספונטני, ולכן הם ימשיכו להסתמך על אסטרטגיות של ספירה. לדוגמה, ילדים שלא היתה להם הזדמנות לעסוק בהרכבה ובפרוק של המספרים עד 18, לא יטו להמציא אסטרטגיות חשיבה לסכומים הגדולים מ- 10.

מתן עזרה לילדים בשליטה בעובדות היסוד

חסידי הגישה המסורתית מציעים להתמקד בגישה ישירה קצרת טווח, בעוד שחסידי גישת תובנת המספר ממליצים על גישה עקיפה ארוכת טווח.

הגישה המסורתית: הדרך הטובה ביותר להגיע לשליטה היא על-ידי תרגול מתוכנן היטב.

על פי הגישה המסורתית, הדרך הטובה להבטיח שליטה בעובדות היסוד היא תרגול ושינון נרחב. מכיוון שמניחים שלילדים המתויגים כליקויי למידה יהיו חסכים בלמידה או בזיכרון, ממליצים לרוב לתת להם ״למידת יתר״ ("over learning"), כלומר תרגול רב עוד יותר, כדי שהם ישמרו את עובדות היסוד.

בשנים האחרונות הובעה דאגה מהגישה הכוחנית הזו הדורשת מן הילדים, ובמיוחד מאלה המתויגים כליקויי למידה, לשנן את כל עובדות היסוד של פעולה מסוימת בזמן קצר יחסית (Gersten and Chard, 1999). כלומר, הועלו דאגות אודות הגישה של תרגול ומבחני זמן הבודקים עובדות יסוד רבות בבת אחת. מספר חוקרים המליצו לצמצם את מספר העובדות הנלמדות למעטות בכל פעם, ולהבטיח שליטה בהן לפני שמציגים קבוצה חדשה של עובדות שצריך ללמוד. בפרוצדורה של זמן-תגובה-קבוע (constant-respons-time) נותנים לילדים רק מספר שניות כדי לענות ומספקים להם תשובה נכונה אם הם עונים תשובה שגויה או אם אינם עונים במסגרת הזמן שהוקצב. פרוצדורות אלה מיועדות למזער בלבול אסוציאטיבי בזמן הלימוד ולמנוע חיזוק אסוציאציות שגויות או אסטרטגיות ״לא בשלות״ (כמו ספירה וחשיבה). בגרסה משודרגת זו של הגישה המסורתית, שלבים 1 ו- 2 של התפתחות רכישת עובדות היסוד, עדיין נחשבים כצעדים לא הכרחיים ואפילו כמכשול להשגת שלב 3.

גישת תובנת המספר: הדרך הטובה ביותר להגיע לשליטה היא על ידי הוראה תכליתית, משמעותית, המבוססת על חקר – הוראה המקדמת את תובנת המספר.

התמקדות בקידום שליטה בעובדות יסוד מבודדות באמצעות שינון אינה הגיונית. גם אם המורה מתמקדת בקבוצות קטנות של עובדות בכל פעם ומשתמשת בפרוצדורות של זמן-תגובה-קבוע , עדיין המיגבלות והקשיים של גישת השינון נשארים ברובם. מסיבה זאת, ה- NRC ממליץ בספר Adding it Up שהמאמצים לקדם רהיטות חישובית יהיו משולבים במאמצים לקדם הבנה מושגית, חשיבה מתמטית אסטרטגית (כגון, הנמקה וכישורי פתרון בעיות), וביטחון ביכולת להבין את ההגיון שבמתמטיקה (productive disposition) . המלצות אלה והמחקר העכשווי מובילים לארבע השתמעויות להוראה:

1. עזרו בסבלנות לתלמידים לבנות תובנה למספרים על ידי עידודם להמציא, לשתף, ולעדן אסטרטגיות לא-פורמליות (כגון, ראו שלב 1 ב**איור 1**). זכרו שתובנת המספר אינה משהו שמבוגרים יכולים לכפות על הילדים. עזרו לילדים לבנות בהדרגה רעיונות גדולים, כמו הרכבה ופירוק (ראו **איור 2** ו**איור 3**, לדוגמאות של משחקים העוסקים ברעיונות גדולים אלה). ילדים, על פי רוב, מאמצים אסטרטגיות יעילות יותר ככל שתובנת המספר שלהם מתרחבת, או כאשר יש להם צורך אמיתי לעשות זאת (כגון, כדי לקבוע את התוצאה של הטלת קובייה במהלך משחק מעניין, כמו בגרסה החיבורית של מרוץ המכוניות המתוארת ב**איור 3**.)
2. קדמו שינון עם משמעות או שליטה בעובדות היסוד על ידי עידוד הילדים להתמקד בחיפוש דפוסים ויחסים; כדי להשתמש בגילויים אלה לבנית אסטרטגיות חשיבה; ולשתף, להצדיק ולדון באסטרטגיות שלהם (ראו שלב 2 של **איור 1**). מקו מנחה זה נובעות שלוש השתמעויות:
   - ההוראה צריכה להתמקד ב"משפחות של עובדות" ולא בעובדות מבודדות, וכיצד עובדות אלו קשורות זו לזו (ראו תיבה 5.6 שבעמ' 5-31 עד 5-33, אצל Baroody with Coslick [1998] לדיון יסודי בבסיס ההתפתחותי ובלמידה של משפחות של עובדות).
   - עודדו ילדים לבנות על מה שהם כבר יודעים. לדוגמה, שליטה בעובדות החיסור קלה יותר אם הילדים מבינים שעובדות אלה קשורות לעובדות המשלימות של החיבור שכבר נלמדו (כגון, 5-3 ניתן ללמידה כ- 5=?+3). ילדים שכבר למדו את עובדות התאומים בחיבור, על ידי גילוי, למשל, שסכומם הם המספרים הזוגיים מ- 2 עד 18, יכולים להשתמש בידע קיים זה כדי לשלוט בעובדות של $2\times n$ על ידי הבחנה שביטוי כזה זהה לביטוי הקודם (כגון, $2\times7=7+7=14$). קישור עובדות שאינן ידועות לכאלה שכבר נלמדו, יכול להפחית במידה רבה את כמות התרגול הנחוץ כדי לשלוט במשפחה של עובדות.
   - אסטרטגיות חשיבה שונות עשויות לדרוש גישות שונות. מחקרים מראים שדפוסים ויחסים שונים במידת הבולטות שלהם. הוראה בגישת הגילוי העצמי יכולה להתאים לדפוסים מאוד בולטים כמו חוק החילוף בחיבור. הוראה בגישת הגילוי המודרך עשוייה להידרש עבור דפוסים פחות בולטים, כמו יחסי ההשלמה שבין החיבור לחיסור (ראו לדוגמה **איור 4**).

3. תרגול הוא חשוב, אך השתמשו בו בתבונה.
   - השתמשו בתרגול כהזדמנות לגלות דפוסים ויחסים.
   - תרגול צריך להתמקד בהפיכת אסטרטגיות החשיבה לאוטומטיות יותר, לא בשינון עובדות מבודדות.
   - הלימוד והתרגול של צירופי מספרים צריך להיעשות באופן מכוון. תרגול מכוון אפקטיבי יותר משינון.
   - תרגלו כדי להבטיח שהיעילות לא תיעשה בטרם עת – כלומר, לפני שהילדים בנו הבנה מושגית של תרגילים כתובים וניתנה להם ההזדמנות לעבור דרך השלבים של ספירה וחשיבה.
4. כמו ש"מומחים" משתמשים במגוון של אסטרטגיות, כולל כללים אוטומטיים או חצי-אוטומטיים ותהליכי חשיבה, רהיטות של צירופי מספרים או שליטה צריכים להיות מוגדרים באופן רחב ככוללים כל אסטרטגיה יעילה, ולא רק כשליפה של העובדות. באופן כזה, צריך לעודד את התלמידים לגמישות תוך שימוש במגוון של אסטרטגיות ולא למנוע מהם מלפעול כך.

איור 1: שיטת המעקב במאונך (מבוסס על Wynroth , 1986)

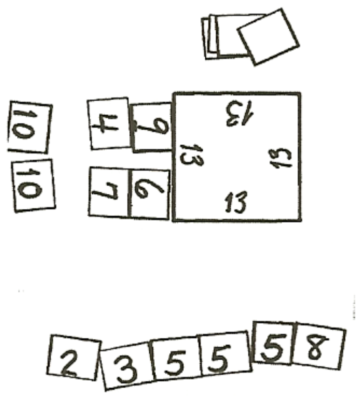
שלב 1: עודדו ילדים לסכם בטבלה את התוצאות של חישובי הכפל הלא פורמליים שלהם. לדוגמה, נניח שילדה צריכה לכפול 7×7. היא יכולה להציג שבע אצבעות, לספור את האצבעות פעם אחת (כדי לייצג קבוצה אחת של שבע), ולרשום את התוצאה 7 בשורה הראשונה מתחת ל- 7. היא יכולה לחזור על תהליך זה פעם שנייה (כדי לייצג שתי קבוצות של שבע) ולרשום 14 בשורה השנייה. הילדה יכולה להמשיך בתהליך זה עד שספרה באצבעותיה בפעם השביעית כדי לייצג שבע קבוצות של שבע, ואחרי זה לרשום את התוצאה, 49, בשורה השביעית. רישום זה יכול לשמש בהמשך לחישוב המכפלה של 8×7 (שמונה קבוצות של שבע). הילדה תצטרך אז רק לספור כלפי מטה מתחת ל- 7 עד שהיא מגיעה למכפלה של 7×7 (פעם אחת 7 זה 7, שתי פעמים 7 הם 14,... 7 פעמים 7 הם 49) ולספור בהמשך עוד שבע (50, 51, 52, 53, 54, 55, 56). במהלך הזמן הילדים יוצרים את לוח הכפל של עצמם.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	
8	8	16	24	32	40	48			
9	9	18	27		45				

שלב 2: כשהטבלה מלאה, ניתן לעודד ילדים למצוא דפוסים או יחסים בתוך המשפחות או מעבר למשפחות. ראו לדוגמה, חלק III ("דפוסי מכפלות") של חקירה 5.5 בעמוד 5-25 והקטע של "כפל וחילוק" בתיבה 5.6 שבעמ' 5-32, אצל Baroody with Coslick (1998).

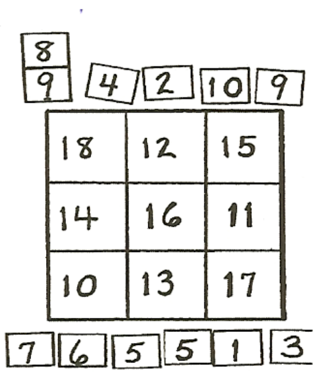
איור 2: דוגמאות של פעילות הרכבה - פרוק
(מבוסס על Baroody, Lai, and Mix , בפרסום)

משחק מספר המטרה



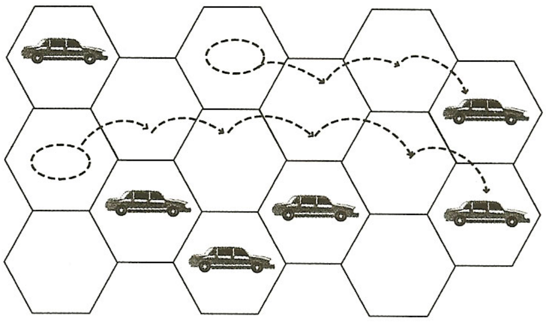
במשחק זה יכולים להשתתף 2-6 ילדים. מציבים במרכז כרטיס ריבועי גדול שעליו כתוב מספר, למשל, 13. כל משתתף לוקח ששה כרטיסים מתוך ערימת כרטיסים שעליהם המספרים 1-10, המונחים כשפניהם כלפי מטה. המשתתפים הופכים את כרטיסיהם, וכל אחד בתורו מנסה לצרף שניים או יותר כרטיסים משלו כדי לקבל את הסכום הזהה למספר המופיע בכרטיס המרכזי. לדוגמה, אם המשתתף קיבל את המספרים 2, 3, 5, 5, 5, 8 , הוא יכול לצרף את 5 ו- 8, ואת 3, 5, ו- 5, כדי לקבל 13. מכיוון שכל פתרון מזכה אותו בנקודה, הוא יקבל 2 נקודות עבור סיבוב זה. אם הוא יבחר את הצרוף 2+3+8, לא תהיה לו אפשרות להרכיב צרוף נוסף והוא יקבל נקודה אחת. דרך אחרת לקביעת הניקוד היא לתת ניקוד לפי כמות המספרים שבהם השתמש. (במקרה כזה הוא היה מקבל 5 נקודות, אם היה בוחר באפשרות הראשונה, או 3 נקודות, אם היה בוחר באפשרות השנייה).

מספר המטרה איקס מיקס דריקס (או – שלושה בשורה)



משחק זה דומה למשחק הקודם ומתאים לזוג שחקנים. כל משתתף לוקח ששה כרטיסים מתוך ערימת כרטיסים שעליהם המספרים 1-10, המונחים כשפניהם כלפי מטה. המשתתפים הופכים את כרטיסיהם, וכל אחד בתורו מנסה לצרף שניים או יותר כרטיסים משלו כדי לקבל את הסכום הזהה לאחד המספרים המופיעים בטבלה של 3×3. אם המשתתף הצליח הוא מניח אסימון בצבע שלו על המספר המתאים, מניח בצד את הכרטיסים בהם השתמש ולוקח במקומם כרטיסים חדשים. מטרת המשחק היא ליצור רצף של שלושה אסימונים.

איור 3: משחקי מרוץ מכוניות



גרסאות הרכבה של המבנה החיבורי

בגרסה זו, כל שחקן מקבל שתי מכוניות מרוץ. מטרת המשחק היא להיות הראשון ששתי המכוניות שלו הגיעו לקו הגמר. כל שחקן בתורו מטיל שתי קוביות משחק כדי לדעת בכמה צעדים הוא יכול להתקדם עם המכוניות שלו. (המכוניות אינן יכולות לנוע אחורה או הצידה). ברמה הבסיסית משחקים עם קוביות שעליהן 0 עד 5 נקודות. ברמת הביניים משחקים עם קוביה אחת של נקודות וקוביה אחת של המספרים 0 עד 5. הבחנה זו יכולה לעודד מניית המשך (כגון, אם מטילים 4 ו-  הילד יכול לומר "ארבע" ולהמשיך בספירה "חמש, שש, שבע" תוך כדי הצבעה על שלוש הנקודות). ברמה המתקדמת, בשתי הקוביות יש מספרים 0 עד 5. שלבים מתקדמים יותר יהיו עם קוביות הממוספרות 5 עד 9, ברמות בסיסית (רק נקודות), ביניים (אחת עם נקודות אחת עם מספרים) ומתקדמת (שתיהן עם מספרים).

לאחר הטלת הקוביות, השחקן צריך להחליט האם להזיז כל מכונית לפי אחד המספרים שקיבל בקוביות, או לצרף את שני המספרים ולהזיז מכונית אחת לפי הסכום שלהם. יתר השחקנים צריכים לאשר שהתשובה נכונה. אם הם מוצאים שהתשובה שגויה, הוא מפסיד את התור.

ההחלטה באיזה מסלול להתקדם תלויה בתנאים של המשחק ובאסטרטגיות של השחקן. מסלול המרוצים, שחלק ממנו מופיע באיור שמעל, בנוי מסריג של משושים ברוחב של שתיים או שלוש. בדוגמה המופיעה באיור, על ידי הזזת מכונית אחת בשלושה צעדים ומכונית שנייה בחמישה צעדים, השחקן חוסם את המסלול. חוקי המשחק מציינים שמכונית אינה יכולה לרדת מן המסלול או לדלג מעל מכונית אחרת. ולכן המכוניות של יתר השחקנים צריכות לעצור במחסום שנוצר ללא קשר למספרים שהטילו בקוביה, עד שהמסלול מתפנה.

גרסאות פירוק של המבנה החיבורי

למשחק שתי גרסאות של פירוק. בשתי הגרסאות, ניתן לשחק בשלוש רמות קושי. ברמה הבסיסית משחקים עם כרטיסים שעוסקים במספרים 1 – 5, ברמת הביניים - עוסקים במספרים 1 – 10, וברמה המתקדמת – עוסקים במספרים 2 – 18. בגרסה הראשונה עוסקים בפירוק יחיד. הילד מרים כרטיס הכולל חלק עם מספר וחלק חסר, למשל ?+3, וכרטיס נוסף המכיל את השלם, למשל 5. הילד צריך לקבוע את החלק החסר, 2, להזיז מכונית אחת מספר צעדים השווה לחלק הידוע (3) ואת המכונית השנייה מספר צעדים השווה לחלק החסר (2). בגרסה השנייה עוסקים בפירוק כפול. הילד מרים כרטיס מספר, למשל 5, ומפרק אותו לשני חלקים לפי רצונו (כגון, הזזת מכונית אחת חמישה צעדים ומכונית שנייה אפס צעדים, או הזזת מכונית אחת שלושה צעדים ומכונית שנייה שני צעדים).

גרסאות פירוק של המבנה הכפלי

כמו במשחק הקודם רק שהכרטיסים מכילים מצבי כפל. לדוגמה, אם הרים את הכרטיסים, ?×3 ו- 18, יצטרך למצוא את הגורם 6. בגרסה המתקדמת השחקן ירים כרטיס, לדוגמה 18, ויחליט מהם הגורמים שהוא בוחר 2 ו- 9, או 3 ו- 6.

איור 4: מה קשור (מבוסס על Barood 1989)

<u>מטרות:</u> א) לחזק באופן מפורש את עיקרון ההשלמה של חיבור – חיסור

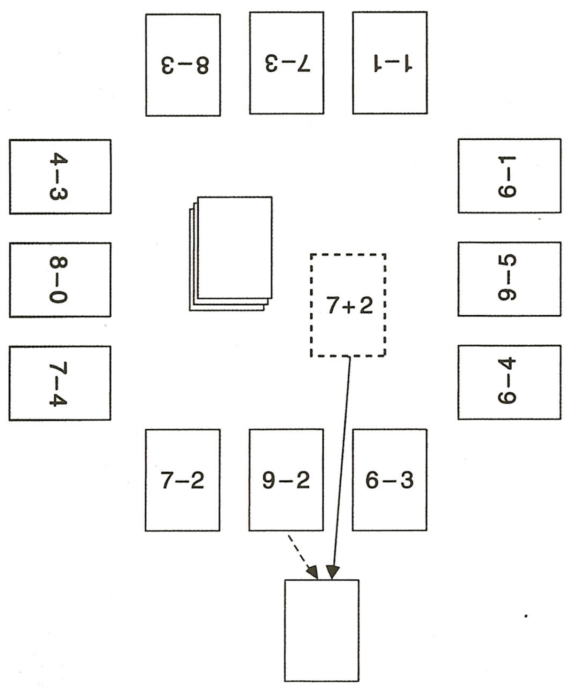
ב) לספק תרגול משמעותי לעובדות החיסור של מחוסרים חד-ספרתיים (גרסת בסיס) ושל מחוסרים בעשרת השנייה (גרסה מתקדמת).

<u>רמות גיל:</u> לגרסת בסיס- כיתות א' ב', לגרסה המתקדמת – כיתות ב ' ג'.

<u>משתתפים:</u> 2 – 6.

<u>חומרים:</u> חפיסת כרטיסים עם צירופי החיסור למחוסרים חד-ספרתיים, או צירופי החיסור למחוסרים בעשרת השנייה, וחפיסת כרטיסים של עובדות החיבור הקשורות.

<u>מהלך המשחק:</u> מחלק הקלפים נותן לכל שחקן 3 כרטיסים של צירופי החיסור כשפניהם כלפי מעלה (ראו איור). הוא מניח את חפיסת עובדות החיבור במרכז השולחן כשפניהם כלפי מטה והופך את הכרטיס הראשון. השחקן שמשמאלו של מחלק הקלפים מתחיל ראשון. אם יש לו כרטיס עובדת חיסור הקשור לעובדת החיבור שעל הכרטיס הגלוי, הוא לוקח את שניהם ושם בצד. מחלק הקלפים הופך כעת כרטיס נוסף מחפיסת עובדות החיבור והמשחק ממשיך. השחקן הראשון שמתאים את כל שלושת כרטיסי עובדות החיסור שלו הוא המנצח (גרסה קצרה של המשחק), או מקבל נקודה (גרסה ארוכה של המשחק).



סיכום

השקפה המבוססת על הגישה המסורתית, כולל בן-הכלאיים המודרני שלה (הפרוצדורה של זמן-תגובה-קבוע) יכולה לעזור לילדים להגיע לשליטה בעובדות היסוד אך לעיתים קרובות רק עם מאמץ וקושי רב. יתר על כן, גישה כזו יכולה להביא את הילדים להשגת יעילות אבל ללא האספקטים האחרים של רהיטות חישובית – דהיינו, יישום הולם וגמיש, או אספקטים אחרים של מומחיות מתמטית – דהיינו, הבנה מושגית,חשיבה מתמטית אסטרטגית ו-productive disposition. למעשה, השקפה המבוססת על הגישה המסורתית עלולה לשמש כמחסום למומחיות מתמטית (כגון, ליצור חוסר גמישות וחרדת מתמטיקה).

השגת רהיטות חישובית עם עובדות היסוד תהיה בסבירות גבוהה יותר, אם המורים ישתמשו בקווים המנחים של הוראה משמעותית, מבוססת חקר, ומכוונת, שנידונו כאן. ילדים הלומדים את עובדות היסוד באופן כזה יהיו מסוגלים להשתמש בידע בסיסי זה בדייקנות ובמהירות (ביעילות), מתוך מחשבה הן במצבים מוכרים והן במצבים לא מוכרים (באופן הולם), ובאופן המצאתי במצבים חדשים (בגמישות). שימוש בקווים המנחים לגישה משמעותית, מבוססת חקר ומכוונת, יכול גם לעזור לתלמידים להשיג את האספקטים האחרים של מומחיות מתמטית : הבנה מושגית, חשיבה מתמטית אסטרטגית ו- productive disposition ללימוד ושימוש במתמטיקה. גישה כזו יכולה לעזור לכל הילדים ובמיוחד עבור ילדים המתויגים כלקויי למידה אך ללא פגיעה ביכולת הקוגניטיבית. למעשה, היא עשויה גם לעזור לבעלי לקויות קשות גנטיות או נרכשות.

ביבליוגרפיה

Baroody, Arthur J.A. *Guide to Teaching Mathematics in the Primary Grades*. Boston: Allyn & Bacon, 1989.

Baroody, Arthur J., with Ronald T. Coslick. Fostering *Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

Baroody, Arthur J., Meng-lung Lai, and Kelly S. Mix. "The Development of Young Children's Number and Operation Sense and Its Implications for Early Childhood Education." In *Handbook of Research on the Education of Young Children*, edited by Bernard Spodek and Olivia Saracho. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, in press.

Brownwell, William A. "Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic." in *The Teaching of Arithmetic*, Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by William D. Reeve, pp. 1-50. New York: Teachers College, Columbia University, 1935.

Gersten, Russel, and David Chard. "Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities." *The Journal of Special Education* 33, no. 1 (1999) 18-28.

Heavey, Lisa. "Arithmetical Savants." In *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*, edited by Arthur J. Baroody and Ann Dowker, pp. 409-33. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

Kilpatrick, Jeremy, Jane Swafford, and Bradford Findell, eds. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC. National Academy Press, 2001.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

Wynroth, Lloyd. *Wynroth Math Program - The Natural Numbers Sequence*. 1975. Reprint, Ithaca, NY: Wynroth Math Program, 1986.