

געגועים לחילוק הארוך

Longing for Division

מאת : Cornelis de Groot and Timothy Whalen

הופיע ב: Teaching Children Mathematics , Vol. 12 No. 8 , April. 2006, pp. 410-418

תרגום : ברכה סגליס

מאמר זה לקוח מתוך מדור בשם **חקירות** (Investigations) שמופיע בכתב העת Teaching Children Mathematics.

הפעילויות המוצגות במאמר זה מתמקדות בחילוק, במיוחד בחילוק ארוך.

על פי רוב, החילוק הארוך נלמד כסדרה של צעדים (חלק, כפול, חסר והורד למטה) הנראים לתלמידים כדבר מסתורי.

בפעילויות המוצגות במאמר זה התלמידים יחקרו שתי שיטות לחילוק:

א. השיטה של "נכנס ב...". המבוססת על **חילוק להכלה** או **חיסור חוזר**.

ב. השיטה של "חלוקה שווה" המבוססת על **חילוק לחלקים**.

לביצוע החילוק הארוך, התלמידים יתמקדו בשיטה השנייה של "חלוקה שווה" במקום בשיטה המסורתית של "נכנס ב...". שיטה זו תאפשר להם הן ללמוד את הטכניקה של אלגוריתם החילוק הארוך, והן להבין את האלגוריתם מנקודת המבט של ערך המקום.

מטרות הוראה, רציונל והקשר פדגוגי

בחקירה זו התלמידים יקשרו בין שימוש בחומרי המחשה קונקרטיים לייצוג מצבים של חלוקה שווה, לבין הייצוג הנומרי (המספר הכתוב) של מצבים אלה והשפה המתמטית המתקשרת אליו, העוסקת בערך המקום. חומרי המחשה מאפשרים לנו להסביר לתלמידים מדוע מתחילים לחלק את המחולק מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר. זה חשוב, משום שבאלגוריתמים המקובלים לחיבור, חיסור וכפל מתחילים עם הספרה בעלת ערך המקום הנמוך ביותר. ידוע כי תלמידים צעירים, שלא למדו עדיין את האלגוריתמים המקובלים לפעולות אלה, מעדיפים להתחיל את החישוב מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר (ראו לדוגמה, אצל Kamii, 2000). גישה כזו נכונה מבחינה מתמטית אבל לא תואמת את האלגוריתמים המקובלים. עם זאת, אנו צריכים לשמר גמישות כזו בפעולות החשבון, כי בבואנו לחילוק הארוך אנו לא מתחילים עם הספרה בעלת ערך המקום הנמוך ביותר. הפעילות המוצגת במאמר זה מאפשרת לתלמידים לגלות את היתרון שבהתחלת התהליך של החילוק הארוך מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר. הפעילות המוצגת במאמר זה הוגבלה לחלוקה במחלקים חד-ספרתיים, והיא מבוססת על שיעורים שניתנו לתלמידים בכיתות ג' ו-ד' ב-Ulster County, New York.

מטרות החקירה

- ללמוד להבחין בין חילוק להכלה ("נכנס ב...") לבין חילוק לחלקים (חלוקה שווה).
- לחקור חילוק להכלה במגוון הקשרים.
- לפתח הבנה מדוע צריך להתחיל את החילוק הארוך מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר.
- ללמוד לבצע, ולהבין את אלגוריתם החילוק הארוך מנקודת מבט של ערך המקום.

חומרים

- לשיעור 1: דף עבודה לכל תלמיד למיון שאלות מילוליות של חילוק (ראו **איור 3**).
- לשיעורים 2-3: לכל זוג תלמידים, בדידי כוח-עשר (6 מאות, 10 עשרות, 10 אחדות, ועוד עשרות ואחדות שישמשו להמרה), דפי נייר חלקים, וכסף מדומה (6 שטרות של מאה, 10 שטרות של עשר ו-10 שטרות של 1 וכסף נוסף שיהיה ב"בנק" לצורך החלפה).
- לשיעורים 3-4: אותם חומרים כמו בשיעור הקודם וכן כרטיס של "שיטת חמש השאלות לחילוק ארוך" (ראו **איור 9**).

ידע קודם

התלמידים שביצעו חקירה זו ידעו לבצע חלוקות שוות במגוון מצבים. כמו כן הם ידעו להציג כמויות (מספרים) באמצעות בדידי כוח-עשר ובאמצעות כסף. רוב התלמידים גם ידעו את עובדות הכפל (לוח הכפל) וידעו לבצע חיסור חוזר. תלמידי כיתה ד' ידעו לקשר בין העובדות שבלוח הכפל לבין מצבי חילוק כשהמחולק הוא פחות מ-100.

שיעור 1: מיון וסיווג שאלות של חילוק

בשיעור זה התלמידים מתבקשים למיין לקבוצות 8 שאלות מילוליות של חילוק. למרות שאנו חושבים על מיון לשתי קבוצות (חילוק לחלקים וחילוק להכלה), אנו ממליצים שלא תכוונו את התלמידים לכך. בכך שתאפשרו להם לקבוע את הקטגוריות למיון, תרכשו תובנות נוספות לגבי החשיבה של תלמידיכם. למרות שהתלמידים לא התבקשו לפתור את הבעיות, חלק מהם נזקקו לפתרון כל בעיה לפני שיכלו למיין אותה לקטגוריות.

בתחילת השיעור הציגו לתלמידים מספר שאלות מילוליות של חילוק (ראו דוגמאות ב**איור 1**). דונו עם התלמידים בשאלה מדוע אלה שאלות של חילוק (למשל, משום שצריך לבצע חלוקה שווה, לחלק שווה בשווה, שכולם יקבלו אותו הדבר - עד שכלום לא נשאר). כפי שניתן לראות מהשאלות המופיעות ב**איור 1**, השתמשנו בכמויות שניתן לחלק אותן באמצעות דסקיות או פריטי מניה אחרים. כמו כן אנו ממליצים שהתלמידים ייצגו את הבעיות באמצעות תרשים ובתרגיל.

כאשר הצגנו בפני תלמידים את שאלה א' שבאיור 1, תלמידים אחדים אמרו "עשיתי 3 פעמים כמה שווה ל-15?" תלמידים אחרים ציירו שלושה עיגולים וסימנו קו עבור כל עוגייה שנתנו. כאשר הופיעו בשאלות כמויות גדולות יותר, כמו שאלה ד' שבאיור 1, התלמידים לא הצליחו לקשר את המספרים לעובדת הכפל המתאימה. במקום זה הם השתמשו בתרשימים או בחיסור חוזר (ראו **איור 2**). לפעמים תלמידים השתמשו בחיסור חוזר במצבים של חילוק לחלקים.

לדוגמה, תלמיד אחד הסביר שהוא חיסר 7 מ-42 שוב ושוב, כדי לפתור את שאלה ב' שבאיור 1. למרות שהחיסור החוזר הביא אותו לתוצאה מספרית נכונה, הפרוצדורה שבה הוא השתמש אינה תואמת את המצב המתואר בשאלה זו. חשוב שהתלמידים ידונו בכינויים השייכים למספרים שבשאלות. במקרה המופיע בשאלה ב' איננו יכולים להוריד 7 ילדים מ-42 צבעים. דיון כזה מוביל אותנו לחלק הבא של השיעור.

איור 1: דוגמאות לשאלות של חילוק

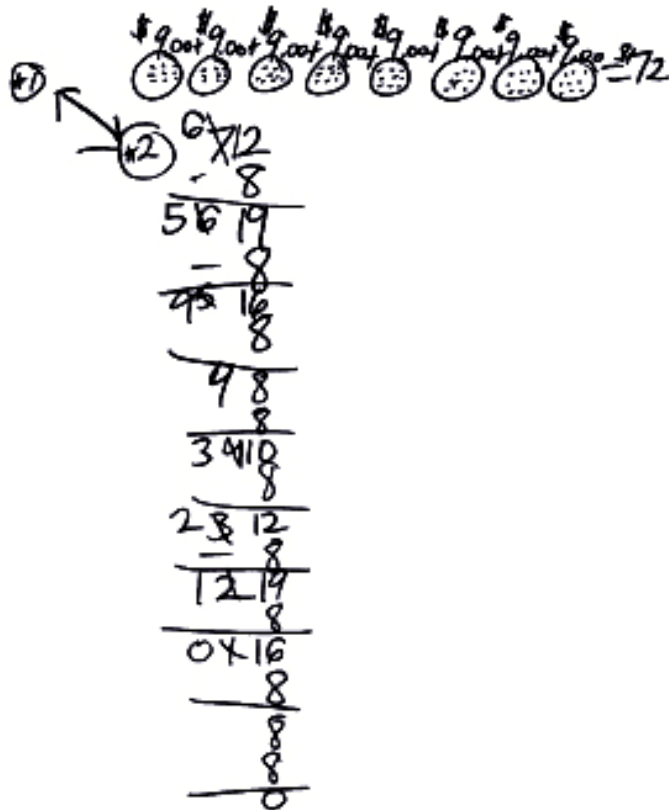
חילוק לחלקים (מספר החלקים ידוע):

- א. יש לי 15 עוגיות. אני רוצה לתת לשלושה חברים שלי אותה כמות, עד שלא יישארו לי עוגיות. כמה עוגיות כל אחד יקבל?
- ב. בקופסה 42 צבעים. בכל שולחן של שבעה ילדים יש קופסה אחת. כל ילד מקבל כמות שווה של צבעים. כמה צבעים כל אחד מקבל?

חילוק להכלה (ידוע כמה יש בכל חלק):

- ג. היו לי 18 ממתקים. הזמנתי חברים למסיבה שלי. ונתתי לכל אחד 2 ממתקים, עד שלא נשארו לי ממתקים. כמה חברים היו במסיבה שלי?
- ד. ביציע של התיאטרון יש 72 מקומות. בכל שורה יש 8 מקומות. כמה שורות יש ביציע?

איור 2: דוגמאות של תלמידים לחישוב באמצעות תרשים או חיסור חוזר



איור 3: מיון שאלות מילוליות של חילוק

- בעזרת בן הזוג, מיינו את שמונה השאלות שבדף לקבוצות. הסבירו מה משותף לכל השאלות שבכל קבוצה. בחרו שם לכל קבוצה.
- א. ששה תלמידים מנהלים את דוכן הממתקים שבביה"ס. בכל שבוע הם מחלקים ביניהם את הרווחים. השבוע הם הרוויחו 42 דולר. כמה כסף יקבל כל תלמיד?
- ב. המורה רוצה לתת צבעים לכל אחד מ-24 התלמידים שלה. יש לה קופסה עם 120 צבעים. כמה צבעים יקבל כל תלמיד?
- ג. לג'נט יש אוסף של 91 חרוזים. היא שמה אותם בשקיות לפי צבעים. בכל שקית יש 13 חרוזים. כמה צבעים שונים של חרוזים יש באוסף של ג'נט?
- ד. נטשה רוצה להכין עוגיות שוקו-צ'יפס. יש לה 98 שוקו-צ'יפס. אם היא שמה 7 שוקו-צ'יפס בכל עוגייה, כמה עוגיות היא יכולה להכין?
- ה. קבוצת תלמידים מנהלת את דוכן הממתקים של ביה"ס. בכל שבוע הם מחלקים ביניהם את הרווחים. השבוע הם הרוויחו 72 דולר. כל תלמיד קיבל 9 דולר. כמה תלמידים יש בקבוצה המנהלת את דוכן הממתקים?
- ו. 4 תלמידים אספו ביחד את כל הגרעינים שיש בדלעת. הם אספו 464 גרעינים. כל אחד מהם יקבל כמות שווה לקחת הביתה. כמה גרעינים יקבל כל אחד?
- ז. יונתן חוגג יום הולדת. יש לו שקית עם 64 פרסים. הוא רוצה שכל חבר ייקח הביתה ארבעה פרסים. כמה חברים יכול יונתן להזמין למסיבת יום ההולדת?
- ח. כיתה של 32 תלמידים יצאה לטיול. בצהריים הם אכלו במסעדה בה הם ישבו בשולחנות של ארבעה. כמה שולחנות הזמינה הכיתה?

בקשו מן התלמידים לקרוא את השאלות ולמייין אותן לקבוצות של שאלות שמתאימות להיות ביחד. בקשו מהם להסביר מדוע הם חושבים שהשאלות ששמו ביחד בקבוצה, דומות, ובמה הקבוצות שונות זו מזו. הציגו את תשובות התלמידים לחלוקה לקבוצות ולשמות הקבוצות. בכיתות שלנו כל התלמידים בסופו של דבר יצרו שתי קבוצות: חילוק לקבוצות ("שאלות בהן אני נותן אחד לכל קבוצה, שוב ושוב, עד שלא נשאר לי מה לתת"), וחילוק של חיסור חוזר ("שאלות שבהן אני מכין קבוצות שבכולן יש אותה כמות, ואז אני סופר, כמה קבוצות כאלה הכנת"). וודאו שבסופו של השיעור יש לתלמידים תמונה ברורה של שני סוגי החילוק. שאלות ג', ד', ה', ז' שבאיור 3, הן שאלות של חילוק להכלה, ושאלות א', ב', ו' הן שאלות של חילוק לחלקים. שימו לב ששאלה ח' מנוסחת כך שבתחילה היא נראית כשאלה של חילוק לחלקים, אבל הכמות הידועה היא מספר התלמידים בכל שולחן (כמה "מכיל" כל שולחן), ואילו השאלה היא על מספר החלקים (השולחנות) ולכן היא חילוק להכלה. הסוג של שאלת חילוק נקבע על פי מה שידוע (נתון) בשאלה. אנו ממליצים שתכינו סדרת שאלות משלכם עם תכנים שנשמעים הגיוניים לתלמידים שלכם.

המשך החקירה מתמקד בחילוק לחלקים (חלוקה שווה).

שיעורים 2-3: חלוקה שווה עם כסף ועם בדידי כוח-עשר

בחלק השני של החקירה, אפשרנו לתלמידים לחקור שאלות של חילוק לחלקים תוך שימוש בגישה תלת-שלבית:

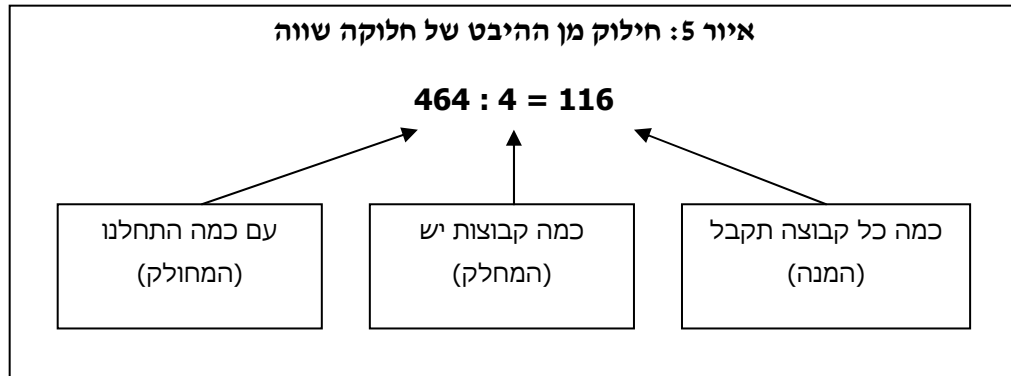
1. שימוש בכסף מדומה (שטרות של מאה דולר, של עשרה דולר ושל דולר). למרות שכסף אינו אמצעי המחשה השומר על פרופורציות קבועות (יש גם שטרות של עשרים וחמישים דולר), התחלנו איתו משום שהוא עוזר לראות את ההיגיון שבהתחלת תהליך החילוק מהמטבע בעלת הערך הגבוה ביותר.
2. שימוש בבדידי כוח-עשר. הכנו מספיק בדידים כך שיכולנו לחלק מספרים בטווח ה-600 במספר חד-ספרתי. בדידי כוח-עשר משמשים כהכנה לשלב השלישי של החקירה.
3. שימוש באלגוריתם לחילוק ארוך. למרות שבדידי כוח-עשר מתאימים יותר כי הם שומרים על היחס של 1 ל-10, הרי שהערך של כל בדיד מופיע באופן מרומז בלבד. לכן העדפנו להתחיל עם ההקשר של כסף המוכר לתלמידים ולאחר מכן להשתמש בבדידי כוח-עשר כקישור קפיצה לאלגוריתם.

בתחילת השיעור הציגו לתלמידים את השאלה המילולית הבאה, ללא עזרים:
אמא הרוויחה בלוטו \$464. היא החליטה לתת לכל אחד מארבעת ילדיה חלק שווה. כמה קיבל כל ילד?

אפשרו לתלמידים לפתור בעיה זו לבד או בזוגות. התלמידים שהשתתפו בחקירה זו היו בהתחלה קצת נדהמים, אך עם מעט עידוד הם התקדמו באופן משמעותי. לרוב התלמידים שבכיתה, לא היתה שיטה פורמלית לפתרון והם השתמשו בחיסור חוזר (ראו איור 2) או בתרשים (ראו איור 4). תלמיד אחד צייר ארבעה עיגולים על הדף וכתב בכל אחד מהם את המספר 100. ואז הוא שם לב שהבעיה הצטמצמה לחלוקה של 64. הוא הסביר שקודם הוא ניחש על 16 לכל אחד, ואז בדק זאת ע"י חיבור 16 ארבעה פעמים. תלמיד אחר חילק את ה-64 כך: "נתתי לכל קבוצה 10, ונשארו לי 24, ו-24 לחלק ל-4 הם 6 נוספים לכל אחד, וככה הגעתי ל-16". תלמידים אחדים חילקו ארבע עשרות ואז נתקעו עם ה-24, מכיוון שלא ידעו כיצד ניתן לחלק את 2 העשרות הנותרות בין ארבע הקבוצות.



חשוב להתחיל עם בעיות שלא מצריכות המרה ואין בהן מצב של שארית. ללא כל עידוד, התלמידים שלנו התחילו בערך המקום הגבוה ביותר, או ניסו להוריד קבוצות של 100. אנו חושבים שזה קשור להתנסות בכסף או בעזרי למידה דומים. בשלב זה, חשוב להציג את המשמעות של כל החלקים של תרגיל חילוק מההיבט של חלוקה שווה, כפי שמופיע באיור 5. בהמשך חשוב להציג גם בעיות של חילוק עם שארית, כמו: (שארית 3) $467:4=116$.



אנו ממליצים על הכנת כרזה כיתתית על פי הסכמה שבאיור או לחלק אותה לתלמידים. כדאי גם לשוחח על הביטויים בשפה הקשורים לחילוק. בתרגיל חילוק במאוזן נהוג לומר "**123 לחלק ל-3**" (וזהו שפה של חילוק לחלקים). בחילוק ארוך (המתבצע המאוּנָד) נהוג לומר "**3 מחלק את 123**" או "**3 נכנס ב-123**" (שהיא שפה של חילוק להכלה או חיסור חוזר).

שאלות מילוליות של חילוק לחלקים העוסקות בכסף

הכינו מספר גרסאות של סיפור ה"לוטו" ובקשו מן התלמידים לבצע את החילוק בעזרת כסף מדומה, תוך שימוש בשטרות של 100, של 10 ושל 1. ניתן להשתמש בחתיכות נייר (בצבעים או בגדלים שונים) המייצגות את הקבוצות השונות (ראו איור 6). הם יזדקקו גם ל"בנק" שבו יוכלו להחליף שטרות של 100 ושטרות של 10. הסבירו לתלמידים שהם יבצעו חילוק שבו מספר הקבוצות ידוע וצריך למצוא כמה כל קבוצה תקבל. כמו כן בקשו מהם לייצג את הכסף בכמות השטרות הקטנה ביותר. למרות שניתן לייצג סכום של 369 עם 369 שטרות של 1, וודאו שהתלמידים משתמשים ב-3 שטרות של 100; 6 שטרות של 10; ו-9 שטרות של 1. בקשו מהם גם לארגן את השטרות בערמות לפי הסוג. ניתן להציע לתלמידים "קופה רושמת" הדומה לטבלת ערך המקום, אך מיועדת לכסף. תחילה, בקשו מן התלמידים לפתור בעיות בהן לא נדרשת המרה, כמו $369:3$, או $448:4$, ולאחר מכן הציגו לפנייהם בעיות שבהן צריך לבצע המרה, כמו $447:3$ או $672:4$.

לדוגמא, בבעיה $369:3$, התלמידים יכולים לתת קודם שטר של 100 לכל אחת משלוש הקבוצות, לאחר מכן לחלק את שטרות ה-10 בין שלוש הקבוצות ולבסוף את שטרות ה-1. וכך בכל קבוצה יש בסוף 123. כאשר יש בעיה כמו $447:3$, צריך לבצע המרות. זה המקום שבו התלמידים מתחילים לראות שאם מתחילים מערך המקום הגבוה ביותר, זה קל יותר, משום שאז ההמרות תואמות את סדר ביצוע החלוקה כאשר בכל פעם יורדים לערך המקום הנמוך יותר.

כאשר מחלקים 447 באופן שווה בין שלוש קבוצות, כל קבוצה מקבלת בהתחלה שטר אחד של 100. ואז נשאר שטר אחד של 100 שעל התלמידים להחליף בבנק ב-10 שטרות של 10. כעת עליהם למנות את כמות השטרות של 10 שיש להם (14 במקרה זה). שימו לב שבאלגוריתם המסורתי לחילוק ארוך שלב זה נקרא: "להוריד למטה". תלמידים אחדים, שהשתתפו בחקירה זו, היו צריכים תזכורת לשים ביחד את כל השטרות הדומים, לאחר שביצעו את ההמרה, ולפני שהם מתחילים לחלק את השטרות בין שלוש הקבוצות. זה קרה גם אחרי ההמרה מ-100 ל-10 עשרות וגם לאחר ההמרה מ-10 ל-10 יחידות. חשוב לשוחח עם התלמידים על נטייה זו לשאול אותם שאלות. לאחר מכן התלמידים חילקו את 14 השטרות של 10 ונתנו לכל קבוצה 4 שטרות. זה השאיר אותם עם 2 שטרות של 10 שצריך להחליף בבנק ל-20 שטרות של 1. כעת עליהם לקבוע שיש להם 27 שטרות של 1, אותן עליהם לחלק לשלוש הקבוצות, כך שכל קבוצה תקבל 9 יחידות. באופן כזה כל קבוצה מקבלת בסך הכל 149. שימו לב, שבכל הדוגמאות שהצגנו, המחלק שווה או קטן יותר מהספרה בעלת הערך הגבוה ביותר. מאוחר יותר, ניתן להציג מצבים בהם המחלק גדול יותר מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר. במצבים כאלה התלמידים צריכים להתחיל מהמרה. זה מצריך כמות גדולה יותר של כסף מדומה, תלוי כמובן במספרים שבחרים.

איור 6: תלמידים פותרים בעיות חילוק בעזרת כסף



Photograph by Cornelius de Groot; all rights reserved

מדוע אנו מתחילים את החילוק מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר?
 בקשו מן התלמידים להסביר את התהליך שביצעו. האם חייבים להתחיל מחלוקה של שטרות ה-100? מה היתרון של הליכה מ-100, ל-10 ול-1? תלמידים שהשתתפו בחקירה זו אמרו: "אני מתחיל עם השטר של 100 משום שקל יותר לתת קודם את החלקים הגדולים". לאחר מספר בעיות, תלמיד אחד שאל מדוע אנחנו לא משתמשים בשטרות של 20. שאלה כזו מדגישה את הרעיון שקל יותר לחלק שטרות של 20 מאשר לחלק שטרות של 10. בדיון הכיתתי, תלמידה אחרת הצביעה על כרזה שהציגה את הייצוג של בדידי כוח-עשר ואמרה: "תראו, זה כמו במספרים, אין מקום של עשרים." אם התלמידים שלכם לא יעלו את הנושא, כדאי לשקול הצגת שאלה זו בפני הכיתה.

מעבר לשפה של ערך המקום

בשלב הבא, בקשו מן התלמידים לחזור על פתרון הבעיות הקודמות בעזרת בדידי כוח-עשר (ראו **איור 7**). נהלו שוב דיון עם תלמידי הכיתה אודות השיטות שבהן הם השתמשו ומדוע זה הגיוני להתחיל מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר. בשלב זה שנו את השפה שבה אתם מדברים מערכים של כסף לערכים על פי ערך המקום (מאות, עשרות ואחדות). מעבר זה חשוב בשביל השיעור האחרון. אחד ההבדלים הבולטים שראינו כאשר עברנו משימוש בכסף לשימוש בבדידי כוח-עשר הוא, שהתלמידים התקשו פחות לשמור את הערכים השונים בקבוצות נפרדות, ונטו יותר לזכור לצרף ביחד את כל היחידות מאותו הערך לאחר שביצעו המרה. אפשרו לתלמידים להשתמש תחילה בשיטות משלהם, בשלב הבא נעשה את המעבר לשיטת החילוק הארוך ולשפה הפורמאליות.

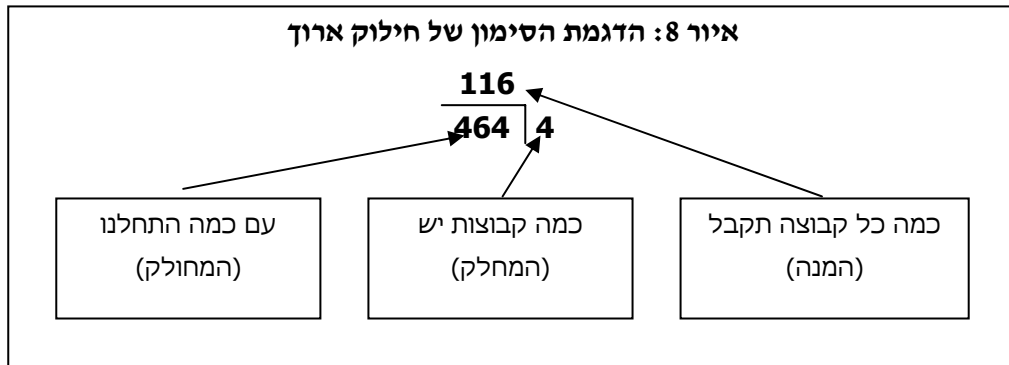
איור 7: תלמידים בכיתה ד' מייצגים בעיות חילוק בעזרת בדידי כוח-עשר



Photograph by Cornelius de Groot; all rights reserved

שיעורים 3 – 4: חילוק ארוך

בחלק האחרון חוזרים אל העבודה עם בדידי כוח-עשר ומאפיינים את בעיות החילוק בעזרת שפה של ערך המקום. בשלב זה עוברים גם מכתובת התרגיל במאוזן (עם סימן החילוק :), לכתובה במאונך (עם סימן החילוק $\overline{\quad}$). כמו כן תתבקשו לשנות את השפה המקובלת של "נכנס ב...". עבור חילוק ארוך, לשפה של "לחלק ל...", ולגשת לחילוק הארוך מן ההיבט של חילוק לחלקים. לשם כך תשתמשו ב"שיטת חמש השאלות" או "המרה מפורשת" (Van de Walle 2004, pp. 222-223), כאשר תמיד מתחילים מהספרה בעלת ערך המקום הגבוה ביותר. זה נובע לוגית מהעבודה עם הכסף המדומה. התחילו בכך שתסבירו לתלמידים שישנה דרך שונה לכתובת תרגיל חילוק הנקראת חילוק ארוך, ואפשרו להם לתעד כל מה שהם עושים. הראו להם שוב את הכרזה של החילוק במאוזן (**איור 5**), ולידה הציגו כרזה עם התרשים המופיע ב**איור 8**.



הדגישו שמדובר באותם חלקים ורק אופן הסימון השתנה, ושאומרים זאת כך: "ארבע מאות ששים וארבע לחלק לארבע שווה מאה ושש עשרה". כעת הדגישו לתלמידים את שיטת חמש השאלות לחילוק ארוך (ראו **איורים 9 ו-10**) עבור תרגיל זה. ביחד עם הקניית שיטה זו נקנה גם את אופן הסימון בתרגיל החילוק הארוך. כאשר יהיה צורך לבצע המרה, התלמידים ישתמשו בבדידי כוח-עשר כדי להמחיש את מה שהם עושים בתרגיל, ובמקביל ירשמו כל צעד של התהליך (ראו **איור 11**). התלמידים יעבדו בקבוצות של שלושה: תלמיד אחד יעבוד עם הבדידים, תלמיד אחד ישאל את השאלות ותלמיד אחד יבצע את הרישום. בכל תרגיל נוסף שנו את תפקידי התלמידים. יש לחזור על תהליך זה עד שהשאלות הופכות אצל כל הילדים לטבע שני.

לדוגמה, ניקח את התרגיל 423:3 הכתוב כתרגיל של חילוק ארוך (ראו **איור 11**). וודאו תחילה שהתלמידים לקחו את הכמות הנכונה של בדידי כוח-עשר. הם צריכים להבין שהמספר 423 הוא הכמות שאיתה מתחילים ושהמספר 3 הוא מספר הקבוצות שלהן יש לחלק את הכמות הזאת. את 3 הקבוצות ייצגו שלושה דפי נייר עליהם הם יניחו את הבדידים שחילקו. ניתן להכין שקף או כרזה של טבלה ריקה, כמו זו המופיעה ב**איור 11**.

התחילו בכך שתרשמו בטבלה את תרגיל החילוק בסימון המקובל לחילוק ארוך. לאחר מכן שאלו את השאלה הראשונה. שאלו את התלמידים כיצד ידעו איזו ספרה לבחור? הם עשויים לומר: "ארבע, מכיוון שזה במקום של המאות, אז יש לי ארבע מאות". הם עשויים גם להצביע על בדידי כוח-עשר שלהם. במקרה כזה נסו לעזור לתלמידים לקשר את הבדידים לספרות שבמספר. כתבו כתשובה את המספר 4, והראו את הייצוג שלו בבדידי כוח-עשר. המשיכו לענות על כל חמש השאלות, ואז עברו לערך המקום הבא וחיזרו על כל התהליך. בחקירה שאנו עשינו, הסברנו שהחץ משמעותו "לאחר המרה", ולא "הורד למטה" כפי שבדרך כלל אומרים. ולכן החץ המופיע באיור 11, בעמודה של הבדידים, משמעותה "אחרי המרה יש לנו 12 עשרות". חשוב לציין שבדוגמה זו, הספרה 1, שלפני ההמרה ייצגה מאות, כעת מייצגת 10 עשרות. לכן, החץ הוא סימן חשוב, משום שהוא מציין שכעת אנחנו מסתכלים על החילוק מנקודת המבט של ערך המקום הנמוך יותר הסמוך אליו.

איור 9: שיטת חמש השאלות לחילוק ארוך

ענו על כל שאלה עבור כל ערך מקום, כשאתם מתחילים מערך המקום הגבוה ביותר.

1. כמה _____ יש לכם?

(רשמו מעל הקו את ערך המקום: מאות, עשרות, אחדות, וענו על השאלה)

2. שימו את ה _____ בתוך _____ קבוצות, כך שבכל קבוצה תהיה אותה כמות.

(רשמו מעל הקו הראשון את ערך המקום, ומעל הקו השני את מספר הקבוצות שאליהן מחלקים את הכמות הכוללת)

2. כמה _____ יש בכל קבוצה?

(רשמו מעל הקו את ערך המקום, וענו על השאלה)

3. בכמה _____ השתמשתם בסך הכל?

(רשמו מעל הקו את ערך המקום, וענו על השאלה)

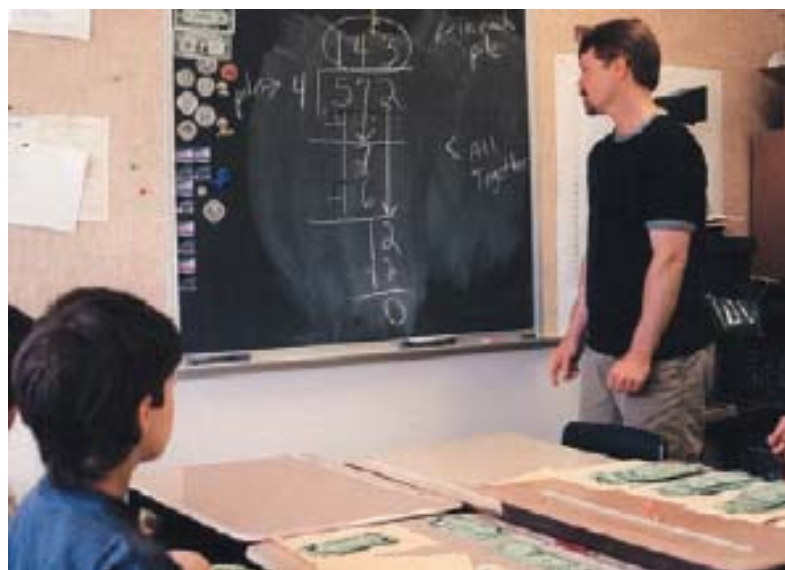
4. כמה _____ נשארו לכם?

(רשמו מעל הקו את ערך המקום, וענו על השאלה)

5. אם נשארה שארית, המירו אותה ליחידה קטנה יותר לפי סדר ערך המקום.

חזרו כעת לשאלה 1 עבור ערך מקום קטן יותר, לפי הסדר, וענו שוב על כל השאלות. המשיכו כך עד שאי אפשר לשים יותר בדידים בקבוצות.

איור 10: מורה ותלמיד דנים באלגוריתם



Photograph by Cornelius de Groot; all rights reserved

איור 11: דוגמה לחילוק ארוך

חלוקת הבדידים	בדידי כוח-עשר	תשובה	שאלה	סימון
		4	1. כמה מאות יש לנו?	$\begin{array}{r} 3 \overline{)423} \\ \uparrow \end{array}$
		1	2. שימו מאות אלה ב-3 קבוצות שווה בשווה. כמה מאות יש בכל קבוצה?	$\begin{array}{r} 1 \dots \\ 3 \overline{)423} \\ \downarrow \end{array}$
		3	3. בכמה מאות השתמשתם?	$\begin{array}{r} 1 \dots \\ 3 \overline{)423} \\ \uparrow \\ 3 \end{array}$
		1	4. כמה מאות נשארו לכם?	$\begin{array}{r} 1 \dots \\ 3 \overline{)423} \\ \underline{3} \\ 1 \end{array}$
			5. אם יש לכם שארית, המירו לערך קטן יותר.	
		12	1. לאחר ההמרה, כמה עשרות יש לכם?	$\begin{array}{r} 1 \dots \\ 3 \overline{)423} \\ \underline{3} \\ 12 \end{array}$

הערת המתרגמת: הסימון בעמודה הראשונה לקוח ממאמר המקור, כך נוהגים בארה"ב לסמן את החילוק הארוך.

חיפוש דפוסים

תנו לקבוצות התלמידים מספיק הזדמנויות לחקור את תהליך החילוק הארוך. השגיתו שהם ישתמשו בשאלות באופן נכון. עודדו אותם גם לחפש דפוסים. לדוגמה, שאלו אותם אם הם מבחינים בקשרים בין מספר הקבוצות, כמה כל קבוצה קיבלה (במאות, עשרות או אחדות) ובכמה (מאות, עשרות או אחדות) הם השתמשו באותו השלב של החילוק. הבנת הקשר הזה (שמבטא את תרגיל הכפל שמתאים לאותו שלב¹) הינו מרכיב חשוב במעבר לביצוע החילוק הארוך ללא מודל מוחשי. שמנו גם לב שתלמידים אחדים שהשתתפו בחקירה זו, התחילו לחלק את הבדידים בקבוצות ולא אחד אחד זה איפשר לנו לשאול את התלמידים כיצד לדעתם, תהיה הדרך היעילה ביותר לחלק את הבדידים. התלמידים נוכחו לדעת שאם הם ימצאו מיד את הכמות הגדולה ביותר שניתן לחלק לכל קבוצה, הם יסיימו את החלוקה מהר יותר. זה הביא אותם להעריך את היעילות של האלגוריתם. בשיעורים שהיו לאחר מכן, הם חקרו רעיונות אלה הלאה, ורובם פיתחו רהיטות בשימוש באלגוריתם.

הערות לסיכום

במשך שנים הצגתי ולימדתי חילוק ארוך בשיטה המסורתית. הייתי מדגים את התהליך המורכב הזה צעד אחר צעד, בתקווה שזה יעזור לתלמידים להגיע לתשובה נכונה, כל עוד פעלו בהתאם לצעדים. למען האמת, לא הגעתי אף פעם לאחוזי ההצלחה שקיוויתי. התלמידים היו לעיתים תכופות נבוכים או מבולבלים לגבי המקום שבו הם נמצאים ומהו הצעד הבא. ידעתי שהם לא קלטו את התמונה המלאה של מה שהם היו אמורים לעשות. התלמידים היו צריכים לסמוך על שיטה טכנית שלא היתה הגיונית עבורם. במבט לאחור, לא אפשרתי להם מספיק להתבסס על הידע המתמטי והיכולות שלהם, במיוחד בנוגע לערך המקום. לאחר שהשתמשתי בשיטה חדשה זו, עם תלמידי, התוצאות היו שונות באופן דרסטי. הם יצרו לעצמם בסיס מוצק של משמעות החילוק הארוך והיו להם מספיק התנסויות מוחשיות שעליהן יכולתי להתבסס כאשר עברנו לאלגוריתם היותר מסורתי. כעת, הצעדים שהיו פעם כל כך מורכבים, קיבלו משמעות, והם יכלו בקלות לעקוב אחריהם ולהבין אותם. במיוחד הביטוי "להוריד למטה" הובן כעת על ידי התלמידים, שהם כעת עוברים לעבוד עם הספרה שערך המקום שלה נמוך יותר. בגישה כזו, לקחתי מושג שהיה לעיתים קרובות מופשט מדי ושרירותי עבור התלמידים, והפכתי אותו למשהו מוחשי ובר-ביצוע שהם יכלו לפעול עליו ולהבין.

ביבליוגרפיה

- Kamii, Constance. *Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory*. 2nd ed. New York: Teachers College Press, 2000.
- Van de Walle, John. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. 5th ed. New York: Pearson Education, 2004.

¹ הערת המתרגמת: החקירה המוצגת במאמר זה, לא מקשרת מלכתחילה את החילוק לכפל, אלא מתחילה מחלוקה ממש, ומנסה להוביל את התלמידים לגלות בעצמם את הקשר שבין החילוק לכפל.